

Az informatika számítástudományi alapjai

1. feladatsor

Alapfogalmak

- $V = \{a, b, c, \dots\}$: ábécé - betűk (szimbólumok) halmazaként
- bab : egy szó a V ábécé betűiből
- szó hossza
- λ : a „nulla hosszúságú” szó (üres szó)
- Concatenáció (egyszerű társítás) :
 $ab \cdot abc = ababc$

Alphabet Σ

$$V^0 = \{\lambda\}$$

$$V = \{a, b, c\}$$

$$V^1 = \{a, b, c\}, \quad V^2 = \{aa, ab, ba, bb, ac, ca, cc, bc, cb\}$$

is in Σ^*

- $V^* = V^0 \cup V^1 \cup V^2 \cup \dots = \bigcup_{i \geq 0} V^i$
- $V^+ = V^1 \cup V^2 \cup \dots = \bigcup_{i \geq 1} V^i$

Műveletek nyelvekkel

unió (egyesítés, összeadás): $L_1 \cup L_2 = \{ p \mid p \in L_1 \text{ vagy } p \in L_2 \}$

metszet: $L_1 \cap L_2 = \{ p \mid p \in L_1 \text{ és } p \in L_2 \}$,

különbség: $L_1 \setminus L_2 = \{ p \mid p \in L_1 \text{ és } p \notin L_2 \}$,

komplementer: $\overline{L_1} = V^* \setminus L_1$.

konkatenáció, $L_1 \cdot L_2 = \{ pq \mid p \in L_1 \text{ és } q \in L_2 \}$

$$\begin{aligned} L^0 &= \{\lambda\} \\ L^1 &= L \\ L^2 &= L \cdot L \quad \text{és így tovább} \quad L^i = L \cdot L \cdot \dots \cdot L \\ L^* &= \bigcup_{i \geq 0} L^i, \quad L^+ = \bigcup_{i \geq 1} L^i \end{aligned}$$

Műveleti tulajdonságok

- $L_1 \cdot \emptyset = \emptyset \cdot L_1 = \emptyset$, *Az előadáson elfelejtettem visszatérni a kérdésre, hogy mi van \emptyset^* -gal, \emptyset^0 -val.*
- $L_1 \cdot \{ \lambda \} = \{ \lambda \} \cdot L_1 = L_1$ (a konkatenáció egységeleme a $\{ \lambda \}$ nyelv),
- $L_1 \cup \emptyset = \emptyset \cup L_1 = L_1$ (az unió egységeleme az \emptyset nyelv),
- $L_1 \cap V^* = V^* \cap L_1 = L_1$ (a metszet egységeleme a V^* univerzális nyelv),
- $L_1^+ = L_1 \cdot L_1^* = L_1^* \cdot L_1$,
- $L_1^* = L_1^+ \cup \{ \lambda \}$,
- $(L_1^*)^* = L_1^*$ (az iteráció idempotens tulajdonsága),
- $(L_1^+)^+ = L_1^+$ (a $+$ művelet idempotens tulajdonsága),
- $(L_1^*)^+ = (L_1^+)^* = L_1^*$.

4.3. Legyen $V = \{0\}$, $W = \{1\}$. Határozzuk meg, hogy mely szavak alkotják a következő nyelveket:

- a) $(V \cup W)^*$;
- b) $(VW)^*$;
- c) V^*W^* ;
- d) $(V \cup W)^*VW$.

Mondjunk olyan szavakat, amik nincsenek az alábbi nyelvekben, ha $A = \{a\}$, $B = \{b\}$.

- $B^*(AB)^*A^*$
- $(A^* \cup B^*)(A^* \cup B^*)(A^* \cup B^*)$
- $A^*(BA^+)^*B^*$
- $B^*(A \cup BA)^*B^*$

4.8. Határozzuk meg, hogy mikor lehetnek az L^* , ill. az L^+ nyelvek végesek. Előfordulhat-e, hogy L^* vagy L^+ az üres nyelvvel egyenlő?

4.5. Legyen $V = \{0, 1\}$. Adjuk meg a következő nyelvek egy-egy meghatározását a V -ből és részhalmazából kiindulva úgy, hogy közben csak a nyelvek iterációját, egyesítését és szorzását használjuk:

a) $L = \{\omega : \omega \in V^* \text{ és } \omega \text{ két egymás utáni 1-esre végződik}\}$;

b) $L = \{\omega : \omega \in V^* - \{\varepsilon\} \text{ és } \omega \text{ pontosan egy 0-t tartalmaz}\}$;

4.4. Legyen adva egy V ábécé, és legyenek L_1, L_2, L_3 tetszőleges V -ből alkotott nyelvek. Bizonyítsuk be a következő egyenlőségeket, vagy pedig adjunk meg olyan ellenpéldát, amelyre nem teljesül a tekintett egyenlőség:

a) $(L_1 L_2)^* = L_1^* L_2^*$;

b) $(L_1^* L_2^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$;

c) $L_1^*(L_2 \cup L_3) = (L_1^* L_2) \cup (L_1^* L_3)$;

d) $(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*$;

e) $(L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cup L_2^*$;

f) $L_1(L_2^* \cap L_3^*) = (L_1 L_2^*) \cap (L_1 L_3^*)$.

- 1.32.** For a finite language L , let $|L|$ denote the number of elements of L . For example, $|\{\Lambda, a, ababb\}| = 3$. This notation has nothing to do with the length $|x|$ of a string x . The statement $|L_1L_2| = |L_1||L_2|$ says that the number of strings in the concatenation L_1L_2 is the same as the product of the two numbers $|L_1|$ and $|L_2|$. Is this always true? If so, give reasons, and if not, find two finite languages $L_1, L_2 \subseteq \{a, b\}^*$ such that $|L_1L_2| \neq |L_1||L_2|$.
- 1.36.**
- Consider the language L of all strings of a 's and b 's that do not end with b and do not contain the substring bb . Find a finite language S such that $L = S^*$.
 - Show that there is no language S such that S^* is the language of all strings of a 's and b 's that do not contain the substring bb .