Az általánosított kvázi-aritmetikai- és a Kubo-Ando közepek kapcsolata pozitív (invertálható) operátorokon

Szokol Patricia
Társszerző: Nagy Gergő

A MAGYAR TUDOMÁNY NAPJA ERDÉLYBEN – 2018

Matematika és informatika alkalmazásokkal

Parajd, Románia, november 16 – november 18, 2018

A kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatala támogatta – NKFIH: PD124875.

Valós számok közepei

Definíció

Legyen D egy nemüres intervallum. Ekkor az $M: D \times D$ leképezést a D-n értelmezett középnek nevezzük, ha

$$\min\{x, y\} \leq M(x, y) \leq \max\{x, y\}, \quad (x, y) \in D.$$

Azt mondjuk, hogy M szigorú közép, ha minden $x \neq y$ esetén az előző feltételben szigorú egyenlőtlenségek vannak.

Példák

Az alapvető közepek:

- számtani közép;
- geometriai közép;
- harmonikus közép.

Kvázi-aritmetikai közepek

Megjegyzés

A valós számok mellett, a pozitív operátorokon (nemkommutatív eset) is lehet különböző módon definiálni közepeket.

Definíció

Legyen $h\colon D \to \mathbb{R}$ *egy folytonos, szigorúan monoton függvény, ahol* $D \subset \mathbb{R}$ *és* $p \in (0,1)$. *Ekkor az alábbi módon definiált* $M_h^{[p]}\colon D \times D \to \mathbb{R}$ *leképezést súlyozott kvázi-aritmetikai középnek nevezzük:*

$$M_h^{[p]}(x,y) = h^{-1}(ph(x) + (1-p)h(y)).$$

Ha $p = 1/2$, *akkor a kvázi-aritmetikai közepet kapjuk, azaz*

$$M_h^{[\frac{1}{2}]}(x,y) := M_h(x,y) = h^{-1}\left(\frac{h(x)+h(y)}{2}\right).$$

Áltlánosított súlyozott kvázi-aritmetikai közép

Definíció

Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy intervallum. Tegyük fel, hogy az $f_1, f_2 \colon D \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak, monotonok ugyanolyan értelemben és nincs olyan nemtriviális intervallum, amin egyszerre lennének konstansok. Ekkor az $M_{f_1,f_2} \colon D \times D \to \mathbb{R}$ leképezés

$$M_{f_1,f_2}(x,y) = (f_1 + f_2)^{-1}(f_1(x) + f_2(y)), \quad x, y \in D$$

közepet definiál D-n, amit általánosított súlyozott kvázi-aritmetikai középnek hívunk.

Ha $h \colon D \to \mathbb{R}$ egy szigorúan monoton, folytonos függvény, $p \in [0,1]$, továbbá $f_1(x) = ph(x)$ és $f_2(x) = (1-p)h(x)$. Akkor

$$\begin{aligned} M_{f_1,f_2}(x,y) &= (f_1 + f_2)^{-1}(f_1(x) + f_2(y)) \\ &= h^{-1}(ph(x) + (1-p)h(y)) = M_h^{[p]}(x,y). \end{aligned}$$

Megjegyzés

J. Matkowski: karakterizálta az általánosított súlyozott kvázi-aritmetikai közepeket és a súlyozott kvázi-aritmetikai közepeket.

Operátor közepek

$\mathcal{H}$: komplex Hilbert-tér;

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$: I egységelemmel rendelkező, összes H értelmezett korlátos lineáris operátor C^*-algebrája;

$\mathcal{L}(\mathcal{H})_{sa}$: $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ önadjungált elemeinek vektortere;

$\mathcal{L}(\mathcal{H})_{sa}^D$: $\mathcal{L}(\mathcal{H})_{sa}$, D spektrumú operátorainak halmaza (bármely $D \subset \mathbb{R}$ intervallumra).

Az általános rendezés egy $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér önadjungált operátorainak terén a következőképpen van definiálva:

$$A \leq B \Leftrightarrow \langle Ax, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle, \quad (x \in \mathcal{H})$$

Továbbá, az $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operátort pozitívnak nevezünk, ha $A \geq 0$.

$\mathcal{L}(\mathcal{H})_+$: $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ pozitív operátorainak a halmaza;

$\mathcal{L}(\mathcal{H})_{++}$: $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ pozitív invertálható operátorainak a halmaza.

Operátorok általánosított súlyozott kvázi-aritmetikai közepe

Definíció

Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, $f_1, f_2 \colon D \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, amelyek monotonok ugyanolyan értelemben és nincs olyan nemtriviális intervallum, amin egyszerre lennének konstansok. Ekkor az f_1 és f_2 függvények által generált (kétváltozós) Matkowski-féle operátor közepe minden $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_{sa}^D$ esetén

$$M_{f_1,f_2}(A,B) = (f_1 + f_2)^{-1}(f_1(A) + f_2(B)).$$

A fenti formulában az operátorok folytonos függvénybe vannak beleírva, amely az önadjungált operátorok folytonos függvénykalkulusa szerint van értelmezve. Azaz, ha $\dim \mathcal{H} < \infty$, akkor

$$f(A) = U \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_2)) U^*$$

minden $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_+$ és $f \colon]0,\infty[\to \mathbb{C}$ folytonos függvény esetén, ahol $A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_2) U^*$ az A spektrális felbontása.

Megőrzési probléma a kvázi-aritmetikai közepekre vonatkozóan

Egy $N\colon \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}$ normát szimmetrikusnak nevezünk, ha minden $A, B, R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ esetén $N(ARB) \leq \|A\| N(R) \|B\|$ teljesül, ahol $\|.\|$ az operátor normát jelöli.

Tétel

Legyen D egyike a $\mathbb{R}$, $]0,\infty[$ halmazoknak és $f, g\colon]0,\infty[\to D$ két folytonos bijekció, amelyek ugyanolyan értelemben monotonok és eleget tesznek a $|\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))| = \infty$ feltételnek. Továbbá, rögzítsünk egy $N\colon \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}$ szimmetrikus normát. Ha $\phi\colon \mathcal{L}(\mathcal{H})_{++} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})_{++}$ egy, a közép N normáját megőrző bijekció, azaz

$$N(M_{f_1,f_2}(\phi(A),\phi(B))) = N(M_{f_1,f_2}(A,B)) \tag{1}$$

minden $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_{++}$, akkor létezik $\mathcal{H}$-n egy U unitér vagy antiunitér operátor, mellyel ϕ az alábbi alakú

$$\phi(A) = UAU^* \quad (A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_{++}).$$

A tétel unitér invariáns normák esetén is igaz marad.

Kubo-Ando közepek

Definíció

Egy $\sigma : \mathcal{L}(\mathcal{H})_+ \times \mathcal{L}(\mathcal{H})_+ \to \mathcal{L}(\mathcal{H})_+$ *binér leképezést Kubo-Ando középnek nevezünk, ha rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal. Tetszőleges* $A, B, C, D \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_+$ *operátorok és* $(A_n), (B_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_+$ *sorozatok esetén:*

(i) $I\sigma I = I$;

(ii) *ha* $A \leq C$ *és* $B \leq D$, *akkor* $A\sigma B \leq C\sigma D$;

(iii) $C(A\sigma B)C \leq (CAC)\sigma(CBC)$;

(iv) *ha* $A_n \downarrow A$ *és* $B_n \downarrow B$, *akkor* $A_n\sigma B_n \downarrow A\sigma B$.

A fentiekben a $X_n \downarrow X$ *azt jelöli, hogy* X_n *monoton csökkenő módon tart az* X*-hez az erős operátor topológiában.*

Legyen σ egy Kubo-Ando közép $\mathcal{L}(\mathcal{H})_+$-n. Ekkor minden $t > 0$ számra, $I\sigma(tI)$ az I skalár-szorosa. Így megadható egy $f_\sigma :]0, \infty[\to]0, \infty[$ generáló függvénye σ-nak az alábbi módon:

$$f_\sigma(t)I = I\sigma(tI), \quad (t > 0).$$

Kubo-Ando közép

A σ közép reprezentálható a generáló függvénye segítségével a következőképpen. Ha $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_+$, akkor

$$A\sigma B = A^{1/2} f_\sigma(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2}.$$

Példák

A számtani, geometriai és harmonikus közepek is definiálva vannak operátorokon, melyek szintén Kubo-Ando közepek és az alábbi formulákkal adottak:

$$\frac{A+B}{2}, \quad A^{1/2}(A^{-1/2} B A^{-1/2})^{1/2} A^{1/2}, \quad 2(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$$

minden $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_{++}$ esetén. Ha, A és B kommutálnak, akkor ezen formulák egybeesnek a számokon definiált közepekkel.

Megőrzési probléma a Kubo-Ando közepekre vonatkozóan

Tétel (Molnár, Szokol)

Legyen σ *egy Kubo-Ando közép* $\mathcal{L}(\mathcal{H})_+$*-n, amelyhez tartozó* f_σ *operator monotone,* $\lim_{t\to 0} f_\sigma(t) = 0$ *és* $f_\sigma \neq \mathrm{id}|_{]0,\infty[}$*. Tegyük fel, hogy* $N\colon \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}$ *egy szimmetrikus norma és* $\phi\colon \mathcal{L}(\mathcal{H})_+ \to \mathcal{L}(\mathcal{H})_+$ *egy, a közép* N *normáját megőrző bijekció, azaz*

$$N(\phi(A)\sigma\phi(B)) = N(A\sigma B), \quad A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_+.$$

Ekkor létezik $\mathcal{H}$*-n egy* U *unitér vagy antiunitér operátor, mellyel* ϕ *az alábbi alakú*

$$\phi(A) = UAU^* \quad (A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_{++}).$$

Kapcsolat a két operátor közép osztály között

Tétel

Egy $M\colon \mathcal{L}(\mathcal{H})_+ \times \mathcal{L}(\mathcal{H})_+ \to \mathcal{L}(\mathcal{H})_+$ leképezés pontosan akkor általánosított súlyozott kvázi-aritmetikai közép $f_1, f_2\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ injektív generáló függvényekkel és Kubo-Ando közép egyszerre, ha egy súlyozott aritmetikai közép pozitív súlyokkal.

Hivatkozások

- M. Gaál and G. Nagy, *Preserver problems related to quasi-arithmetic means of invertible positive operators*, Integral Equations Operator Theory **90** (2018), Article:7.
- F. Kubo, T. Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann. **246** (1980), 205–224.
- J. Matkowski, *Generalized weighted quasi-arithmetic means*, Aequat. Math. **79** 2010, 203–212.
- L. Molnár, *Order-automorphisms of the set of bounded observables*, J. Math. Phys. **42** (2001), 5904–5909.
- L. Molnár and P. Szokol, *Transformations preserving norms of means of positive operators and nonnegative functions*, Integral Equations Operator Theory **83** (2015), 271–290.