Diszkrét matematika feladatok

2013/14 tanév, I. félév

1 gyakorlat

1.1 Bizonyítsa be teljes indukcióval az alábbi állításokat!

(a) $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(d) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(e) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(f) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(g) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(h) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(i) $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right) = \dfrac{n+2}{2n+2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(j) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(k) $6 | (n^3 - n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(l) $6 | (n^3 + 5n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(m) $5 | (2^{4n+1} + 3) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(n) $3 | (n^3 + 5n + 6) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(o) $9 | (10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(p) $4 | (7^n + 10n - 5) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(q) $\dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^5}{5} + \dfrac{7n}{15}$ egész szám minden $n \in \mathbb{N}$ esetén,

(r) $(n+1)! > 2^{n+3}$, ha $n \geq 5$,

(s) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{n+1} - 1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(t) $\dbinom{2n}{n} < 4^{n-1}$, ha $n \geq 5$,

(u) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén,

(v) $n^3 < 2^{n+1}, \quad$ ha $n > 8$,

(w) $\displaystyle\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén.

1.2 Tegyük fel, hogy $n \geq 4$ idős hölgy mindegyike tud egy pletykát (mindenki különbözőt). A hölgyek mindegyikének van telefonja, és ha két hölgy felhívja egymást, akkor az összes addig tudomásukra jutott pletykát elmondják egymásnak. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy $2n - 4$ telefonhívással megoldható, hogy mindannyian ismerjék az összes pletykát!

2 gyakorlat

2.1 Igazolja az alábbi oszthatóságokat!

(a) $9|(10^{19} + 53)$,

(b) $36|(10^{17} - 64)$,

(c) $6|(10^7 - 88)$,

(d) $12|(10^{16} + 44)$.

2.2 Milyen számjegyeket írhatunk a és b helyére, hogy teljesüljön az oszthatóság?

(a) $33|52ab71$

(b) $36|762a4b$

(c) $45|61a24b$

(d) $72|44a21b$

2.3 Igazolja az alábbi oszthatóságokat!

(a) $200|(199^3 - 199)$

(b) $7|(11^9 - 4^9)$

(c) $200|(101^3 + 99^3)$

(d) $99|(11^{22} - 22^{11})$

2.4 Számítsa ki 100! hány nullára végződik!

2.5 Létezik-e olyan n egész szám, hogy $n!$ pontosan 5 nullára végződik?

2.6 Igazolja, hogy négy egymást követő egész szám szorzata mindig osztható 24-gyel!

2.7 Igazolja, hogy ha egy tetszőleges pozitív háromjegyű számot önmaga mögé írunk, az így kapott hatjegyű szám osztható lesz 13-mal!

2.8 Euklideszi algoritmus segítségével számítsa ki az alábbi számok legnagyobb közös osztóját!

(a) 672 és 360,

(b) 455 és 312,

(c) 1225 és 216,

(d) 680 és 845,

(e) 783 és 1160,

(f) 3751 és 1240.

2.9 Mutassa meg, hogy nem léteznek olyan a és b egész számok, hogy $a^2 = 5b^2$.

2.10 Bizonyítsa be, hogy az alábbi egyenletek nem oldhatók meg a pozitív egész számok körében!

(a) $n^{k+1} = (n+1)^k$,
(b) $a^6 + 25a = 7425$,
(c) $k(k^4 + 1) = 3267$,
(d) $30^n + 31^m = 32^k$.

2.11 Oldja meg az alábbi egyenleteket az egész számok körében!

(a) $a^2 - b^2 = 100$,
(b) $a^2 - 4b^2 = 116$,
(c) $ab + a + b = 12$,
(d) $ab + a + b = 5$,
(e) $ab + 3a - 5b + 3 = 0$,
(f) $ab + 2a + 3b = 137$.

2.12 Miért nem lehet két prímszám összege 2009?

2.13 Lehet-e 2009 egymást követő egész szám összege prímszám?

2.14 Van-e olyan n egész szám, melyre $2^n - 1$ és $2^n + 1$ is prímszám?

2.15 Lehetnek-e az $n + 5$, $n + 7$ és $n + 12$ számok egyszerre prímszámok, ahol $n \in \mathbb{Z}$?

2.16 Legyen $p > 3$ prímszám. Mutassuk meg, hogy $3|p^2 - 1$ és $24|p^2 - 1$.

3 gyakorlat

3.1 Határozza meg az alábbi számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét!

(a) 450 és 420,
(b) 539 és 364,
(c) 1260 és 14850,
(d) 663 és 308,
(e) 495 és 300,
(f) 990 és 420.

3.2 Bizonyítsa be, hogy négy egymást követő természetes szám között mindig van egy, amely a másik háromhoz relatív prím!

3.3 Hány pozitív osztója van az alábbi számoknak?

(a) 252,
(b) 600,
(c) 528.

3.4 Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek pontosan 12 pozitív osztója van?

3.5 Hány olyan pozitív osztója van 7560-nak, amely a 15-höz relatív prím?

3.6 Oldja meg (amennyiben lehetséges) az alábbi lineáris diofantikus egyenleteket!

(a) $14x - 18y = 6$, (c) $12x - 15y = 26$, (e) $495x + 300y = 15$,
(b) $15x + 28y = 12$, (d) $21x - 15y = 12$, (f) $18x + 28y = 10$.

3.7 Gombóc Artúrnak 1420 Ft-ja van, ezt mindet csokoládéra szeretné költeni. A boltban kétféle csokoládét lehet kapni: a lyukas csokoládénak 35 Ft darabja, a kerek csokoládénak 40 Ft. Hogyan választhat csokoládét Gombóc Artúr?

3.8 Péter egy 20 szál virágból álló csokrot vásárolt 1430 Ft-ért. A csokorban háromféle virág található, amelyekből egy szál rendre 50, 70, ill. 80 Ft-ba kerül. Hány szál virágot tartalmaz az egyes fajtákból a csokor, ha tudjuk, hogy egyik fajtából sincs benne 10-nél több?

3.9 Egy vasáru boltban háromféle kiszererelésben árulják a csavarokat. Ha az egyes kiszerelésekből 3, 4, ill. 7 darabot veszünk, akkor 83 csavarunk lesz, ha 4, 5, ill. 1 darabot, akkor 80 csavarunk lesz. Hány darab csavar található az egyes kiszerelésekben?

3.10 Oldja meg (amennyiben lehetséges) az alábbi lineáris kongruenciákat!

(a) $3x \equiv 5 \pmod 7$, (e) $5x \equiv 24 \pmod{13}$,
(b) $12x \equiv 8 \pmod{16}$, (f) $14x \equiv 8 \pmod{21}$,
(c) $9x \equiv 15 \pmod{12}$, (g) $11x \equiv 12 \pmod{18}$,
(d) $5x \equiv 4 \pmod{11}$, (h) $30x \equiv 48 \pmod{58}$.

3.11 Mennyi maradékot ad

(a) 39^{28}, ha 29-cel osztjuk, (d) 17^{18}, ha 40-nel osztjuk,
(b) 17^{40}, ha 25-tel osztjuk, (e) $54^{55^{56}}$, ha 13-mal osztjuk,
(c) 23^{81}, ha 50-nel osztjuk, (f) $38^{39^{40}}$, ha 11-gyel osztjuk?

3.12 Mi az utolsó két számjegye 19^{81}-nek?

4 gyakorlat

4.1 Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán! Ábrázolja a megoldásokat a komplex számsíkon!

(a) $x^2 + 4 = 0$, (c) $x^2 - x + 1 = 0$,
(b) $x^2 + 2x + 2 = 0$, (d) $x^3 - 6x^2 + 13x = 0$.

4.2 Írja fel az alábbi komplex számok algebrai alakját!

(a) $(3+i)(2+3i)$, $(-2+3i)(5-2i)$, $i(1+2i)$, $(-1+i)(1-2i)(1+2i)$,
(b) $\overline{5-2i}$, $\overline{(3+4i)}(2+i)$,

(c) $(2-i)^3, \quad i^6+3i^5-2i^3+i^2-1, \quad i^{2008}, \quad i^{103}$,

(d) $\dfrac{5+3i}{i}, \quad \dfrac{1-i}{2+i}, \quad \dfrac{1-2i}{1-3i}, \quad \dfrac{2-i}{(3-2i)(2+5i)}$.

4.3 Határozza meg az alábbi számok abszolútértékét: $0, 1, i, -i, 3i, 4+7i$.

4.4 Milyen komplex számokra igaz: $\bar{z} = z$, $\bar{z} = iz$, $\bar{z} = \frac{1}{z}$?

4.5 Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

(a) $\overline{z} + 2z = 9 + 2i$,

(b) $\overline{z} + |z|^2 = 31 - i$,

(c) $i^3 \cdot \overline{z} = -3 - 2i$,

(d) $z^2 + |z|^2 = 2 - 6i$,

(e) $\overline{z} \cdot z^2 = 8i$,

(f) $z^2 = i$.

4.6 Ábrázolja a komplex számsíkon az alábbi halmazokat!

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0\}$,

(b) $B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0\}$,

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$,

(d) $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \geq 2\}$,

(e) $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$,

(f) $F = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$.

4.7 Adja meg az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját!

(a) 2,

(b) i,

(c) $-i$,

(d) $1-i$,

(e) $1+i$,

(f) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

(g) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

4.8 Legyen $x = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{9} + i\sin\dfrac{\pi}{9}\right)$ és $y = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{5} + i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$. Határozza meg az alábbi kifejezések értékét!

(a) $x \cdot y$, (b) $\dfrac{x}{y}$, (c) x^3, (d) y^5, (e) $\dfrac{1}{x}$, (f) x^2y.

4.9 Trigonometrikus alak segítségével határozza meg az alábbi kifejezések értékét!

(a) $\sqrt{i}$,

(b) $\sqrt[3]{i}$,

(c) $(2+2i)^{2008}$,

(d) $(1+\sqrt{3}i)^{301}$.

4.10 Számítsa ki a $z = 81\left(\cos\dfrac{\pi}{5} + i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$ komplex szám második, harmadik, negyedik gyökeit! Ábrázolja a gyököket a komplex számsíkon!

4.11 Írja fel és ábrázolja a komplex számsíkon a harmadik, negyedik, ötödik és hatodik egységgyököket!

4.12 Az alábbi komplex számok közül melyek egységgyökök?

$$1+i,\quad \frac{1}{4}+\frac{3}{4}i,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,\quad 2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right),\quad \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2},$$
$$\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8},\quad \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad -1,\quad i.$$

4.13 Legyen $\varepsilon=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$. Mutassa meg, hogy $k=1,\ldots,8$ esetén ε^k előállítja az összes nyolcadik egységgyököt!

4.14 Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

(a) $z^2-3iz+4=0$,

(b) $z^3+z^2+z=0$,

(c) $z^5-z=0$,

(d) $z^2+(2+4i)z-3+3i=0$,

(e) $2iz^2+(4+5i)z+5=0$.

5 gyakorlat

5.1 Határozza meg az alábbi polinomok gyökeit! Írja fel a polinomok gyöktényezős felbontását!

(a) $2x^2-2x-12$,

(b) $-x^3-3x^2+4x$,

(c) $4x^2-4x-3$,

(d) x^2-3x+1,

(e) x^3+3x^2+3x+1,

(f) $x^3-6x^2+12x-8$,

(g) x^3-3x^2-x+3,

(h) x^4-16,

(i) x^4-2x^2+1,

5.2 Írjon fel olyan minimális fokszámú valós együtthatós polinomot, melynek

(a) a -3 kétszeres, az 1 egyszeres gyöke,

(b) a 2, az $1+i$ és az $1-i$ gyöke,

(c) az 5 és az i gyöke,

(d) az i kétszeres gyöke!

5.3 Végezze el a kijelölt osztásokat!

(a) $(2x^3-x^2-5x-2):(x-2)$,

(b) $(2x^4-5x^3-7x^2+14x-6):(x-3)$,

(c) $(-3x^3+48x):(x-4)$,

(d) $(6x^3+9x^2-5x-4):(2x+1)$,

(e) $(6x^4-7x^3+5x^2-2x):(2x^2-x+1)$,

5.4 Végezze el az alábbi polinomokon a maradékos osztást!

(a) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6,\ \ x^2 - 3x + 1;$

(b) $2x^5 - 5x^3 - 8x,\ \ x + 3;$

(c) $x^5 - 3x^4 + 1,\ \ x^2 + x + 1;$

(c) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1,\ \ x^3 + x^2 - x - 1;$

(d) $x^4 - 10x^2 + 1,\ \ x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1.$

5.5 Hogyan kell megválasztani a következő polinomok ismeretlen együtthatóit, hogy teljesüljön az oszthatóság?

(a) $(x-3)|(4x^2 - 6x + p);$

(b) $(x-a)|(x^4 + pa^2x^2 - 5a^3x + a^4);$

(c) $(x^2 + px + q)|(x^4 + 1).$

5.6 Adja meg az alábbi polinomok gyöktényezős felbontását!

(a) $x^2 - 8x + 15,$

(b) $6x^3 + 13x^2 + 15x - 25,$

(c) $2x^3 + 4x^2 + 4x - 10,$

(d) $x^4 + 4.$

5.7 Horner-algoritmus segítségével határozza meg az alábbi helyettesítési értékeket!

(a) $p(x) = 6x^3 + 9x^2 - 5x - 4,\ p(-1/2) =?$

(b) $p(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 - 5x^2 + 2x - 4,\ p(2) =?$

(c) $p(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^2 + 3x + 2,\ p(-1) =?$

(d) $p(x) = 2x^6 - 3x^4 + x^2 + 2x + 1,\ p(-2) =?$

6 gyakorlat

6.1 Bontsa parciális törtekre a alábbi törteket!

(a) $\frac{1}{(x-2)(x+3)},$

(b) $\frac{3}{(x+1)(x-3)(x+4)},$

(c) $\frac{2}{(x+4)(x+3)},$

(d) $\frac{1}{(x-3)(x+3)(x+2)}.$

6.2 Bontsa parciális törtekre:

(a) $\frac{1}{x^2-3x-10},$

(b) $\frac{x}{x^2+3x+2},$

(c) $\frac{x^2+x}{x^3-4x+x^2-4},$

(d) $\frac{x+1}{x^2+x+1}.$

6.3 Bontsa parciális törtekre:

(a) $\frac{x^3-1}{x^2+2x-3}$,

(b) $\frac{x^2+2x-3}{x+3}$,

(c) $\frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2+6x+9}$,

(d) $\frac{x^4-10x^3+35x^2-50x+24}{x^3-6x^2+11x-6}$.

6.4 Hányféleképpen lehet a sakktáblán elhelyezni 8 egyforma bástyát úgy, hogy egyik se üsse a másikat? Mennyi lesz az eredmény, ha a 8 bástyát meg tudjuk különböztetni egymástól?

6.5 Melyikből van több: csupa különböző számjegyből álló tízjegyű, vagy csupa különböző számjegyből álló kilencjegyű számból?

6.6 Hányféleképpen rakhatunk sorba 12 könyvet, ha 3 bizonyos könyvet egymás mellé akarunk rakni és

a) a három könyv sorrendje nem számít?

b) a három könyv sorrendje számít?

6.7 Hányféleképpen ültethetünk egymás mellé 10 különböző életkorú embert úgy, hogy a legidősebb és a legfiatalabb ne üljön egymás mellett?

6.8 Hányféleképpen ültethetünk egy kerek asztal köré 7 embert, ha a forgatással egymásba vihető ülésrendeket azonosnak tekintjük?

6.9 Hányféleképpen ültethetünk egy kerek asztal köré 5 férfit és 5 nőt úgy, hogy se két férfi, se két nő ne kerüljön egymás mellé? (A forgatással egymásba vihető ülésrendeket azonosnak tekintjük.)

6.10 Hányféleképpen ültethetünk egy kerek asztal köré 5 házaspárt úgy, hogy a házastársak egymás mellett üljenek? (A forgatással egymásba vihető ülésrendeket azonosnak tekintjük.)

6.11 Hány olyan hatjegyű szám van, melyben három 1-es, két 2-es és egy 3-as számjegy szerepel?

6.12 Egy urnában 5 piros, 7 fehér és 3 zöld golyó található. Egyesével kihúzzuk a golyókat és a húzás sorrendjében feljegyezzük a kihúzott golyók színét. Hányféle színsorozatot kaphatunk?

6.13 Egy kiránduláson 10 diák vesz részt. Hányféleképpen helyezhetjük el őket egy két-, egy három- és egy ötágyas szobában?

6.14 Hányféleképpen lehet kitölteni egy totószelvényt (14 mérkőzés, mindegyik eredménye lehet 1, 2 vagy X)?

6.15 Hányféleképpen oszthatunk szét 12 gyerek között 15 könyvet, ha nem muszáj minden gyereknek könyvet adnunk?

6.16 Hat ajánlott levelet kell kikézbesíteni, ehhez három postás áll rendelkezésre. Hányféleképpen oszthatjuk szét a leveleket közöttük?

6.17 Hányféleképpen választhatunk ki 6 fiúból és 8 lányból egy táncoló párt?

6.18 Hányféleképpen választhatunk ki egy csomag francia kártyából (4 szín, színenként 13 lap) négy páronként különböző színű lapot? Hányféleképpen választhatunk akkor, ha azt is megköveteljük, hogy ne legyen két azonos értékű sem?

6.19 Hányféleképpen tölthetünk ki egy ötöslottó szelvényt?

6.20 A számegyenesen az origóból indulva 10-et lépünk úgy, hogy minden lépésnél 1 egységet lépünk jobbra, vagy balra. Hányféleképpen fordulhat elő, hogy a 10 lépés után visszaérünk az origóba?

6.21 Hányféleképpen juthatunk el a síkbeli koordináta rendszerben az origóból az $(5, 3)$ pontba, ha mindig csak jobbra, vagy felfelé léphetünk 1 egységet?

6.22 Az (x,y,z) térbeli koordináta rendszerben hányféleképpen juthatunk el az origóból a (4,3,2) pontba, ha minden lépésnél az x-, y-, vagy z-tengely mentén léphetünk egy egységnyit pozitív irányban?

6.23 Hányféleképpen lehet kiolvasni az alábbi táblázatból a kombinatorika szót?

K	O	M	B	I	N	A	T
O	M	B	I	N	A	T	O
M	B	I	N	A	T	O	R
B	I	N	A	T	O	R	I
I	N	A	T	O	R	I	K
N	A	T	O	R	I	K	A

6.24 Hányféleképpen rakhatunk sorba 5 piros és 8 fehér golyót úgy, hogy ne legyen egymás mellett 2 piros golyó?

6.25 Hányféleképpen rakhatunk sorba n darab nullát és k darab egyest $(k \leq n + 1)$ úgy, hogy két egyes ne kerüljön egymás mellé?

6.26 Hányféleképpen állíthatunk sorba 4 fiút és 6 lányt úgy, hogy két fiú ne álljon egymás mellett?

6.27 Hányféleképpen rakhatunk sorba 6 piros, 5 fehér és 4 kék golyót úgy, hogy 2 piros golyó ne kerüljön egymás mellé?

6.28 Egy társaságban 15 férfi és 16 nő van. Hányféleképpen választhatunk ki belőlük 7 embert úgy, hogy pontosan 4 férfi legyen közöttük?

6.29 Hányféleképpen választhatunk ki 6 fiúból és 8 lányból 4 táncoló párt (a párok tagjai különböző neműek)?

6.30 Hányfélekébben választhatunk ki egy 11 fős társaságból két négyfős csapatot?

6.31 Egy adott héten hányféleképpen fordulhat elő, hogy pontosan három találatunk van az ötöslottón?

6.32 Egy adott héten egy szelvénnyel játszva hányféleképpen fordulhat elő, hogy legalább három találatunk van az ötöslottón?

6.33 Egy csomag francia kártyából kihúzunk 10 lapot.

a) Hány esetben lesz ezek között ász?
b) Pontosan egy ász?
c) Legfeljebb egy ász?
d) Pontosan két ász?
e) Legalább két ász?

6.34 Öt fiú és hat lány közül hányféleképpen tudunk kiválasztani négy embert úgy, hogy legyen közöttük legalább két lány?

6.35 Egy csomag francia kártyából hányféleképpen tudunk kiválasztani 5 lapot úgy, hogy legyen közöttük pikk és hetes?

6.36 A boltban háromféle csokoládét árulnak. Hányféleképpen vásárolhatunk 12 darab csokoládét (feltéve, hogy mindegyikből van legalább 12)?

6.37 Hányféleképpen oszthatunk szét 4 gyerek között 7 almát és 9 körtét?

7 gyakorlat

7.1 Bizonyítsa be az alábbi összefüggést!

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

7.2 Az $(2+x)^8$ hatványozást elvégezve mi lesz az x^3 tag együtthatója?

7.3 Hogyan lehet számológép használata nélkül gyorsan kiszámítani 11^4 értékét?

7.4 Igazolja az alábbi összefüggéseket!

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}$$

7.5 Hány páros elemszámú részhalmaza van egy n elemű halmaznak?

7.6 Hány páratlan elemszámú részhalmaza van egy n elemű halmaznak?

7.7 Igazolja az alábbi összefüggést! $(k \neq 0)$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

7.8 Igazolja az alábbi összefüggést!

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

7.9 Igazolja az alábbi összefüggést!

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$$

7.10 Igazolja az alábbi összefüggést!

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \cdots + \binom{k}{k-1} + \binom{k-1}{k-1}$$

7.11 Az előző feladat eredményét felhasználva igazolja, hogy az első n természetes szám összege $\frac{n(n+1)}{2}$.

7.12 Igazolja az alábbi összefüggést $(k \leq n, m)$!

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

7.13 Igazolja az alábbi összefüggést!

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

7.14 Igazolja az alábbi összefüggést!

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

7.15 Igazolja az alábbi összefüggést!

$$\binom{n}{2} + \binom{3}{2}\binom{n}{3} + \binom{4}{2}\binom{n}{4} + \binom{5}{2}\binom{n}{5} \cdots + \binom{n}{2}\binom{n}{n} = \binom{n}{2}2^{n-2}$$

7.16 Adott n esetén k mely értékére (értékeire) lesz $\binom{n}{k}$ értéke maximális?

8 gyakorlat

8.1 Állapítsa meg, hogy vektorteret alkot-e

(a) a valós számok halmaza $\mathbb{R}$ felett,

(b) a komplex számok halmaza $\mathbb{R}$ felett,

(c) a valós számok halmaza $\mathbb{C}$ felett,

(d) a komplex számok halmaza $\mathbb{C}$ felett,

(e) $\mathbb{R}^n$ (a valós szám n-esek halmaza) $\mathbb{R}$ felett,

(f) $\mathbb{R}^n$ (a valós szám n-esek halmaza) $\mathbb{C}$ felett,

(g) $\mathbb{C}^n$ (a komplex szám n-esek halmaza) $\mathbb{R}$ felett,

(h) $\mathbb{C}^n$ (a komplex szám n-esek halmaza) $\mathbb{C}$ felett.

8.2 Állapítsa meg, hogy a műveleteket a szokásos módon értelmezve vektorteret alkot-e $\mathbb{R}$ felett

(a) az $\mathcal{F} := \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$ halmaz (a $[0,1]$ intervallumon értelmezett valós függvények halmaza),

(b) az $\mathcal{F} := \{f : [0,1] \to \mathbb{Z}\}$ halmaz (a $[0,1]$ intervallumon értelmezett egész értékű függvények halmaza),

(c) az $\{(a,b,c) : a,b,c \in \mathbb{Z}\}$ halmaz,

(d) a pontosan harmadfokú valós polinomok halmaza,

(e) a legfeljebb n-edfokú valós polinomok halmaza,

(f) azon legfeljebb n-edfokú valós p polinomok halmaza, melyekre $p(0) = 0$ teljesül,

(g) azon legfeljebb n-edfokú valós p polinomok halmaza, melyekre $p(0) = 1$ teljesül,

(h) azon legfeljebb n-edfokú valós p polinomok halmaza, melyekre $p(1) = 0$ teljesül,

(i) a valós számsorozatok halmaza.

8.3 Mutassa meg, hogy az $(1,2)$, $(3,2)$ vektorok lineárisan függetlenek $\mathbb{R}^2$-ben!

8.4 Állapítsa meg, hogy lineárisan függetlenek-e $\mathbb{R}^3$-ban az alábbi vektorrendszerek!

(a) $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,1)$,

(b) $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (1,1,1)$,

(c) $v_1 = (1,2,2)$, $v_2 = (-1,-1,3)$, $v_3 = (2,3,0)$,

(d) $v_1 = (1,1,2)$, $v_2 = (2,3,-1)$, $v_3 = (-1,2,-17)$,

(e) $v_1 = (1,1,2)$, $v_2 = (-2,-2,-4)$,

(f) $v_1 = (-1,2,1)$, $v_2 = (2,-3,1)$, $v_3 = (1,1,2)$.

8.5 Állapítsa meg, hogy lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek a valós polinomok terében!

(a) $1,\ x,\ x^2, \dots, x^n$,

(b) $1,\ 1+x,\ 1-x^2$,

(c) $1,\ 1+x+x^2,\ 1-x^2$,

(d) $1,\ 1+x^2,\ 1-x^2$,

(e) $-x^2+2x+1,\ 2x^2-3x+1,\ x^2+x+2$.

8.6 Állapítsa meg, hogy lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek a valós függvények terében!

(a) $2,\ 3\sin^2 x,\ \cos^2 x$,

(b) $x,\ \sin x,\ \cos x$,

(c) $\sin x,\ \cos x$,

(d) $1,\ \mathrm{e}^x,\ \mathrm{e}^{2x}$.

9 gyakorlat

9.1 Állapítsa meg, hogy alteret alkot-e

(a) $\mathbb{R}^2$-ben a $\{(0,a) \ : \ a \in \mathbb{R}\}$ halmaz,

(b) $\mathbb{R}^2$-ben az $\{(1,a) \ : \ a \in \mathbb{R}\}$ halmaz,

(c) $\mathbb{R}^3$-ban az $\{(x,0,z) \ : \ x,z \in \mathbb{R}\}$ halmaz

(d) $\mathbb{R}^2$-ben az $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x+y=1\}$ halmaz,

(e) $\mathbb{R}^2$-ben az $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x+y=0\}$ halmaz,

(f) $\mathbb{R}^4$-ben az $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_2=x_3\}$ halmaz,

(g) $\mathbb{R}^3$-ban az $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1=x_2=x_3\}$ halmaz,

(h) $\mathbb{R}^3$-ban az $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1+x_2=x_3\}$ halmaz,

(i) $\mathbb{R}^2$-ben az $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1,x_2 \geq 0\}$ halmaz,

(j) az $[a,b]$ intervallumon értelmezett valós függvények terében a folytonos függvények halmaza,

(k) a legfeljebb n-edfokú valós polinomok terében azon legfeljebb n-edfokú valós p polinomok halmaza, melyekre $p(0)=0$ teljesül,

(l) a legfeljebb n-edfokú valós polinomok terében a páros fokszámú polinomok halmaza,

(m) a valós számsorozatok terében a számtani sorozatok halmaza,

(n) a valós számsorozatok terében a konvergens sorozatok halmaza.

9.2 Határozza meg a

(a) $(1,0)$, $(0,1)$,

(b) $(-2,0)$, $(0,1)$,

(c) $(1,-2)$, $(2,-4)$,

(d) $(3,2)$,

(e) $(1,2)$, $(3,1)$,

(f) $(1,0)$, $(2,-4)$, $(0,2)$.

vektorok által generált alteret $\mathbb{R}^2$-ben!

9.3 Határozza meg a

(a) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$,

(b) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$,

(c) $(1,1,0)$, $(0,1,0)$,

(d) $(0,0,1)$,

(e) $(1,1,1)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$,

(f) $(1,0,0)$, $(2,2,0)$, $(0,-1,0)$.

vektorok által generált alteret $\mathbb{R}^3$-ban!

9.4 Határozza meg milyen alteret generálnak az alábbi vektorok a valós polinomok terében!

(a) $1,\ x,\ x^2$,

(b) $1,\ x,\ x^2 \dots, x^n$,

(c) $x,\ 2x^2+x,\ x^3$,

(d) $x^2-1,\ 2x+1,\ 2$,

(e) $-1,\ 3x+1,\ x^2+2x,\ 3x^2$,

(f) $1, x^2, x^4, \dots, x^{2n}$.

9.5 Írja fel az $(1,2)$ vektor koordinátáit az $\mathbb{R}^2$ alábbi bázisaira vonatkozóan!

(a) $(1,0)$, $(0,1)$,

(b) $(-1,2)$, $(1,1)$,

(c) $(3,1)$, $(1,2)$,

(d) $(1,-1)$, $(1,3)$.

9.6 Írja fel az $(1,-1,2)$ vektor koordinátáit az $\mathbb{R}^3$ alábbi bázisaira vonatkozóan!

(a) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$,

(b) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,1)$,

(c) $(-1,2,1)$, $(2,-3,1)$, $(1,1,2)$,

(d) $(1,2,2)$, $(-1,-1,3)$, $(2,3,0)$.

9.7 Tekintsük a legfeljebb másodfokú valós polinomok terének alábbi bázisait. Fejezze ki ezekben a bázisokban a $p(x)=2x^2-3x+1$ polinomot!

(a) $1,\ \ x,\ x^2$,

(b) $-2,\ \frac{1}{2}x,\ 3x^2$,

(c) $1,\ x^2-1,\ \ x^2+2x+1$,

(d) $1-x,\ \ x+x^2,\ \ x^2$.

9.8 Határozza meg az $\mathbb{R}^3$ tér alábbi altereinek dimenzióját!

(a) $A := \{(x_1,x_2,x_3)\ :\ x_3 = 0\}$,

(b) $B := \{(x_1,x_2,x_3)\ :\ x_2 = x_3\}$,

(c) $C := \{(x_1,x_2,x_3)\ :\ x_1 + x_2 = x_3\}$.

9.9 Döntse el, hogy az alábbi vektorrendszerek bázist alkotnak-e a legfeljebb harmadfokú polinomok terében!

(a) $1,\quad x+x^2,\quad x^3,$

(b) $1,\quad x,\quad x^2,\quad x^3,$

(c) $-1,\quad 1-x,\quad x+x^2,\quad x^3,$

(d) $1,\ 1+x,\ 1+x+x^2,\ 1+x+x^2+x^3,$

(e) $1,\quad x+x^2,\quad 1+x+x^2,\quad x^3,$

(f) $2,\quad 3x-1,\ x+x^2,\quad x^3.$

10 gyakorlat

10.1 Legyen

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\qquad \text{és}\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 5 & -2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Számítsa ki az alábbi kifejezések értékét:

$$2A+B,\ A^\top+B^\top,\ 3A-4B,\ A^\top-A.$$

10.2 Határozza meg az alábbi szorzatokat:

(a) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$

10.3 Legyen

$$A=\begin{pmatrix}3 & 7 & 5\\ 1 & -1 & 4\\ 2 & 1 & 8\end{pmatrix}.$$

Határozza meg AX-et és $X^\top A$-t a következő mátrixok mindegyikére:

(a) $X=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, (b) $X=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

10.4 Legyen

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}\pi & 0 & 0\\ 0 & \pi^2 & 0\\ 0 & 0 & \pi^3\end{pmatrix}$$

Számítsa ki $A^2,\ A^3,\ B^2,\ B^3,\ B^4,\ C^{1000}$ mátrixokat.

10.5 Mutassa meg, hogy ha A négyzetes mátrix, akkor $A+A^\top$ szimmetrikus és $A-A^\top$ ferdén szimmetrikus.

10.6 Határozza meg az $f(x)=3x^2-2x+5x^0$ illetve a $g(x)=x^3-7x^2+13x$ polinom értékét az

$$x=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}$$

helyen!

11 gyakorlat

11.1 Felléphetnek-e ötödrendű determinánsban a következő szorzatok? Ha igen, milyen előjellel?

(a) $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$;

(b) $a_{15}a_{22}a_{34}a_{43}a_{51}$;

(c) $a_{11}a_{22}a_{32}a_{41}a_{54}$;

(d) $a_{24}a_{31}a_{55}a_{13}a_{42}$.

11.2 Egészítse ki a következő szorzatot úgy, hogy egy ötödrendű determinánsban pozitív/negatív előjelű legyen!

$$a_{13}a_{32}a_{45}$$

11.3 Felléphetnek-e egy hetetrendű determinánsban az alábbi szorzatok?

(a) $a_{45}a_{71}a_{23}a_{67}a_{34}a_{12}a_{56}$;

(b) $a_{23}a_{52}a_{77}a_{34}a_{61}a_{12}a_{45}$;

(c) $a_{71}a_{17}a_{26}a_{62}a_{53}a_{35}a_{44}$;

(d) $a_{26}a_{35}a_{44}a_{17}a_{53}a_{62}a_{31}$.

11.4 Bizonyítsa be, hogy ha egy n-ed rendű determinánsban több mint $n^2 - n$ elem nulla, akkor a determináns értéke nulla.

11.5 A Sarrus-szabály segítségével számolja ki a következő mátrixok determinánsát:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

(e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & -7 \end{pmatrix}$,

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

11.6 Oldja meg az alábbi egyenletet

$$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

11.7 Igazolja, hogy

(a) $\begin{vmatrix} sin2x & -cos2x & 1 \\ sinx & -cosx & cosx \\ cosx & sinx & sinx \end{vmatrix} = 0$;

(b) $\begin{vmatrix} 1+cosx & 1+sinx & 1 \\ 1-sinx & 1+cosx & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

11.8 Milyen λ esetén invertálhatóak az alábbi mátrixok?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -12 \\ -2 & -3 & \lambda \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

11.9 Számolja ki a következő determinánsokat a kifejtési tétel segítségével:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

11.10 Számítsa ki az A mátrix determinánsát, ha

(a)
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

(b)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 12 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 11 & 0 & -5 \\ 1 & -4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -10 & 2 \\ 0 & 21 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & -7 & 9 & 6 \end{pmatrix};$$

(c)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -10 & 2 \\ 0 & 21 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

11.11 Számítsa ki a következő mátrixok inverzeit (ha léteznek) adjungált algebrai aldeterminánsok segítségével!

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix};$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

11.12 Határozza meg Gauss eliminációval az alábbi mátrixok rangját:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$ (e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & -7 \end{pmatrix},$

(b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix},$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$

12 gyakorlat

12.1 Határozza meg Gauss eliminációval az alábbi determinánsok értékét:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

12.2 Válasszuk meg a λ-t úgy, hogy a

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= \lambda \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldható legyen.

12.3 Oldja meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszereket Gauss eliminációval és határozza meg a megoldás szerkezetét!

(a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 &= 0; \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0; \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0; \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} 8x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0; \end{aligned}$$

(e)

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 0;$$

(f)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 &= 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 &= 0; \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 &= 0 \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 &= 0 \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 &= 0; \end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned} 9x_1 + 21x_2 - 15x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 12x_1 + 28x_2 - 20x_3 + 7x_4 &= 0. \end{aligned}$$

12.4 Oldja meg az alábbi inhomogén lineáris egyenletrendszereket Gauss eliminációval és határozza meg a megoldás szerkezetét!

(a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 7; \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 6; \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2; \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0; \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 &= 2; \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 116x_3 - 15x_4 &= 1; \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= 12. \end{aligned}$$

12.5 Oldja meg (amennyiben lehetséges) a Cramer-szabályt alkalmazva az egyenletrendszereket!

(a)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 8x_2 - 6x_3 &= -5 \\ 6x_1 + 10x_2 + 3x_3 &= 4; \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 3 \\ 3x_1 - 4x_2 - 6x_3 &= 5; \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 &= 9 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5; \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4. \end{aligned}$$

12.6 Tegyük fel, hogy az

$$\begin{aligned} ay + bx &= c \\ cx + az &= b \\ bz + cy &= a \end{aligned}$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. Bizonyítsuk be, hogy $abc \neq 0$, és adjuk meg az egyenletrendszer megoldását.

13 gyakorlat

13.1 Határozza meg, hogy az alábbi leképezések közül melyek lineárisak! Amelyek igen, azokra adja meg a leképezés természetes bázisra vonatkozó mátrixát!

(a) $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3);$

(b) $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) + (1, 1, 1);$

(c) $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2);$

(d) $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x_1, x_2) = (x_1 \cdot x_2);$

(e) $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2 - 3);$

(f) $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, 2x_2 + 3x_3);$

(g) $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(x) = (x, 2x, 3x);$

(h) $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3);$

(i) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = (|x_1 + x_2|, |x_2 - x_3|).$

13.2 Írja fel az alábbi lineáris leképezéseket!

(a) $\mathbb{R}^2$-beli vektorok tükrözése a koordinátarendszer x-tengelyére,

(b) $\mathbb{R}^3$-beli vektorok vetítése az $[x, y]$ síkra,

(c) $\mathbb{R}^2$-beli vektorok tükrözése az $y = x$ egyenesre,

(d) $\mathbb{R}^2$-beli vektorok elforgatása az origó körül 90 fokkal.

13.3 Létezik-e olyan $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés, melyre

$$\varphi(1, 1, 1) = (1, 2, 3) \qquad \varphi(1, 0, 1) = (1, -1, 1) \qquad \varphi(0, 1, 0) = (0, 2, 1)$$

teljesül?

13.4 Legyenek ϕ, $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_2 + x_3), \qquad \psi(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3).$$

Adja meg $\phi + \psi$, $\phi - 2\psi$ mátrixát a természetes bázisra vonatkozóan.

13.5 Az előző feladatban lévő leképezésekre számolja ki $(\phi+\psi)(x_1,x_2,x_3)$ illetve $(\phi-2\psi)(1,2,-1)$ értékét.

13.6 Legyen a $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa a természetes bázisra vonatkozóan

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mivel egyenlő $\varphi(x)$, ha az x vektor természetes bázisra vonatkozó koordinátái $x=(-1,3,2)$? Adja meg azt a vektort, melynek a transzformáció általi képe az $y=(2,1,0)$ vektor!

13.7 Legyen a $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ és $\psi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ lineáris transzformációk mátrixa a természetes bázisra vonatkozóan A és B, ahol

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Írja fel a $\varphi+\psi$, -4ψ, $2\varphi-\psi$, $\varphi\circ\psi$ transzformációk természetes bázisra vonatkozó mátrixát!

13.8 Írja fel a $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2,2x_2+x_3,x_1-3x_3)$ lineáris transzformáció mátrixát az

(a) $a_1=(1,0,0)$, $a_2=(0,1,0)$, $a_3=(0,0,1)$,

(b) $a_1=(-1,2,1)$, $a_2=(2,-3,1)$, $a_3=(1,1,2)$,

(c) $a_1=(1,2,2)$, $a_2=(-1,-1,3)$, $a_3=(2,3,0)$,

(d) $a_1=(1,1,1)$, $a_2=(1,1,0)$, $a_3=(0,1,1)$.

bázisra vonatkozóan!

13.9 Legyen adott $\mathbb{R}^3$ két bázisa: $\mathbf{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, ill. $\mathbf{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$. Adja meg az $\mathbf{a}\to\mathbf{b}$ bázistranszformáció mátrixát, ha

(a) $a_1=(-1,2,1)$, $a_2=(2,-3,1)$, $a_3=(1,1,2)$,
$b_1=(1,1,1)$, $b_2=(1,1,0)$, $b_3=(0,1,1)$,

(b) $a_1=(1,2,2)$, $a_2=(-1,-1,3)$, $a_3=(2,3,0)$,
$b_1=(1,1,1)$, $b_2=(1,1,0)$, $b_3=(0,1,1)$.

13.10 Határozza meg az alábbi mátrixokkal adott lineáris transzformációk sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -6 & 2 & -2 \\ 15 & 5 & 7 \\ 21 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

13.11 Határozza meg a $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$ transzformáció sajátértékeit!

13.12 Legyen a $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transzformáció a koordinátarendszer $y = x$ egyenesére való tükrözés. Adja meg φ sajátértékeit és sajátvektorait!

13.13 Határozza meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

14 gyakorlat

14.1 Számítsa ki az alábbi vektorpárok összegét, belső szorzatát, normáját és szögét:

(a) $a = (1, 1, 1, 1)$ $\quad b = (1, 1, 1, -3)$,
(b) $a = (5, 1, 3, 4)$ $\quad b = (10, 2, 6, 8)$,
(c) $a = (0, \sqrt{3}, 0, 1)$ $\quad b = (0, 1, 0, \sqrt{3})$,
(c) $a = (1, 4, 0, 1)$ $\quad b = (7, 1, 0, 3)$.

14.2 Ortogonálisak-e az alábbi vektorpárok:

(a) $a = (0, 1, 1, 2)$ $\quad b = (4, 1, 1, 0)$,
(b) $a = (30, 1, 7, 4)$ $\quad b = (0, 2, 6, 11)$,
(c) $a = (0, \sqrt{3}, 0, 1)$ $\quad b = (0, 1, 0, -\sqrt{3})$,
(c) $a = (1, 4, 0, 1)$ $\quad b = (7, 1, 0, 3)$.

14.3 Skaláris szorzatot definiál-e $\mathbb{R}^3$-ban az alábbi formula:

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{3} |x_i| \cdot |y_i|,$$

ahol $x = (x_1, x_2, x_3)$ és $y = (y_1, y_2, y_3)$.

14.4 Mutassa meg, hogy az alábbi formulák skaláris szorzatot definiálnak $\mathbb{R}^2$-ben:

(a) $(x, y) = 2\alpha_1\beta_1 + 5\alpha_2\beta_2$,

(b) $(x, y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2$,

ahol $x = (\alpha_1, \alpha_2)$, $y = (\beta_1, \beta_2)$.

14.5 Normát definiálnak-e az alábbi formulák $\mathbb{R}^n$-ben:

(a) $||x|| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,

(b) $||x|| = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.

14.6 Ortonormáljuk a Gram-Schmidt eljárással a következő vektorrendszereket:

(a) $a_1 = (0, 1, 0, 1)$, $a_2 = (-2, 3, 0, 1)$, $a_3 = (1, 1, 1, 5)$;

(b) $b_1 = (1, 1, 1, 1)$, $b_2 = (3, 3, -1, -1)$, $b_3 = (-2, 0, 6, 8)$;

(c) $c_1 = (1, 1, 0, 0)$, $c_2 = (1, 0, -1, 1)$, $c_3 = (0, 1, 1, 1)$;

(d) $b_1 = (1, -2, 2)$, $b_2 = (-1, 0, -1)$, $b_3 = (5, -3, -7)$.

14.7 Adjunk meg ortonormált bázist az alábbi vektorok által generált altérben:

(a) $v_1 = (2, 3, -4, -6)$, $v_2 = (1, 8, -2, -16)$, $v_3 = (12, 5, -14, 5)$, $v_4 = (3, 11, 4, -7)$;

(b) $v_1 = (1, 1, -1, -2)$, $v_2 = (-2, 1, 5, 11)$, $v_3 = (0, 3, 3, 7)$, $v_4 = (3, -3, -3, -9)$.

Irodalom

[1] Denkinger Géza, *Valószínűségszámítási gyakorlatok.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1995.

[2] Nagy Márta, Sztrik János, *Valószínűségszámítás és matematikai statisztika feladatgyűjtemény.* KLTE Debrecen, 1992.

[3] *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1995.

[4] D. K. Fagyejev, I. Sz. Szominszkij, *Felsőfokú algebrai feladatok.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.

[5] Róka Sándor, *2000 feladat az elemi matematika köréből.* Typotex, Budapest, 2006.

[6] Knuth Sydsæter, Peter I. Hammond, *Matematika közgazdászoknak.* Aula Kiadó, Budapest, 2006.

[7] Szendrei János, *Algebra és számelmélet.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996.

A feladatok jelentős részét alábbi kollégáktól kölcsönöztük

[8] Baran Ágnes, DE IK, Alkalmazott Matematika és Valószínűségszámítás tanszék, `www.inf.unideb.hu/valseg/dolgozok/szagnes/szagnes.html`