

Az $a^n + b^n = z^3$ diofantoszi egyenletről

Maurice Mignotte (Strasbourg) és Pethő Attila ^{*}(Debrecen)

Abstract

Let a, b, n, z be natural numbers for which the equation

$$a^n + b^n = z^3$$

holds. We proved that under the conditions $n > 1, a < b, a + b < 16$ and $(a, b) = 1$ the only solution is $(a, b, n, z) = (2, 11, 2, 5)$.

In the proof we used a combination of elementary congruence considerations and A. Baker's type theory.

1 Bevezetés

Legyenek a és b egész számok. Pethő [9], valamint Shorey and Stewart [12] egy általános tételéből következik, hogy van olyan csak a és b -től függő, effektíven kiszámítható $c > 0$ konstans, hogy az

$$a^n + b^n = z^3 \tag{1}$$

diofantoszi egyenlet minden $n, z \in \mathbb{Z}_+$ megoldására $n, z < c$ teljesül. Dolgozatunkban $\mathbb{Z}_+$ -al a pozitív egész számok halmazát fogjuk jelölni.

Az effektív megoldhatóság azonban nem jelenti azt, hogy egy konkrét egyenlet összes megoldását ténylegesen meg is tudjuk határozni. A megoldásokat korlátozó konstansok ugyanis általában olyan nagyok, hogy addig a határig a közvetlen behelyettesítés reménytelenül hosszú ideig tartana. A 4.részben látni fogjuk például, hogy ha $a = 2$ és $b = 11$, akkor az (1) egyenletből n -re közvetlenül levezethető felső korlát $4.5 \cdot 10^{10}$.

Bizonyos egyenlettípusokra sikerült az utóbbi időben olyan numerikus technikákat kifejleszteni, amellyel az elméleti felső korlát annyira lecsökkenthető, hogy az alatt már a behelyettesítés is célhoz vezet. Ilyen módszereket dolgoztak

^{*}A szerző ez úton fejezi ki köszönetét az Université Louis Pasteur vendégszeretetéért és olyan alkotó légkör biztosításáért, amelyik többek között ennek a dolgozatnak az elkészítéséhez is hozzájárult.

ki többek között Thue egyenletekre: Pethő und Schulenberg [10], de Weger [15]; Thue–Mahler egyenletekre: de Weger and Tzanakis [14]; és indexforma egyenletekre: Gaál and Schulte [4] valamint Gaál, Pethő and Pohst [2],[3]. Az (1)–el analóg

$$a^n + b^n = z^2$$

egyenlet megoldásainak megkeresésével Mignotte [6] foglalkozott. Dolgozatunkban az ő módszerét finomítva és az (1) egyenletre alkalmazva bizonyítjuk az alábbi tételt:

Tétel 1 *Ha az a, b, n, z pozitív egész számokra $n > 1, a < b, a + b \leq 16, (a, b) = 1$ és (1) teljesül, akkor $(a, b, n, z) = (2, 11, 2, 5)$.*

Megjegyzés 1 *Az $a + b \leq 16$ feltétel csak technikai jellegű, arra szolgál, hogy dolgozatunk ne legyen túl terjedelmes. Mint látni fogjuk módszerünk, amelyik több eljárás kombinációja, alkalmazható tetszőleges rögzített a és b mellett (1) megoldásainak a meghatározására.*

Számítógéppel megvizsgáltuk az (1) egyenlet megoldhatóságát modulo 9, 7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 127, 181, 211, 331, 397, 421, 463, 73, 79, 97, 241, 313, 337, 547, 673, 859, 937. Azt tapasztaltuk, hogy az $1 < a < b < 1001$ intervallumban, az $(a, b) = 1$ feltételnek eleget tevő számpárok közül, ha $a + b$ vagy $a^2 + b^2$ nem köbszám, akkor (1) nem megoldható. Amennyiben $a + b$ vagy $a^2 + b^2$ köbszám, akkor pedig néhány esettől eltekintve $n \equiv 1$ illetve $2 \pmod{1441440}$. Ezek a tapasztalati tények azt sejtetik, hogy ha valamely a, b párra (1) teljesül, akkor $n < 3$.

2 Segédtelemek

Segéd-tétel 1 *Ha $3|n$, akkor (1)-nek nincs triviálistól különböző megoldása.*

Ez Euler tétele. Bizonyítását lásd például a Turán– Gyarmati [13, T.10.9] jegyzetben.

Segéd-tétel 2 *Ha $a = 1$ és $n > 1$, akkor (1) nem oldható meg.*

Ezt a tételt Nagell [8] bizonyította.

Legyen a d -ed fokú α algebrai szám definiáló polinomja $a_0x^d + \dots + a_d$. Jelöljük α konjugáltjait $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ -vel. Ekkor az α abszolút logaritmikus magasságán a

$$h(\alpha) = \frac{1}{d} \log \left(|a_0| \prod_{i=1}^d \max \{1, |\alpha_i|\} \right)$$

számot értjük. Ezzel a jelöléssel meg tudjuk fogalmazni a következő, Mignotte és Waldschmidtől [7] származó tételt.

Segédttétel 3 Legyenek α és β egy D -ed fokú $\mathbb{K}$ algebrai számtest elemei $a, b \in \mathbb{Z}$, $|a|, |b| < B$ és

$$\Lambda = a \log \alpha + b \log \beta.$$

Ha $\Lambda \neq 0$, akkor

$$|\Lambda| \geq \exp(-270D^4 h(\alpha)h(\beta)(7.5 + \log B)^2).$$

Az első lemmában nagyon egyszerű kongruenciameggondolásokat használva szűrjük ki a megoldhatatlan egyenletek jelentős hányadát.

Lemma 1 Legyenek a, b, n és z olyan pozitív egész számok, melyekre $b, n > 1$, $3 \nmid n$, $a < b$, $a + b \leq 16$ és $(a, b) = 1$. Ha $(a, b) \neq (2, 11), (3, 8)$ és $(3, 10)$, akkor (1) nem teljesülhet.

Bizonyítás Az (1) egyenletet először modulo 9 vizsgáljuk. Felhasználjuk, hogy $\varphi(9) = 6$ és modulo 9 a harmadik hatványmaradékok 0, valamint ± 1 .

Mivel $n > 1$, ezért ha $3 \mid a$ akkor

$$b^n \equiv \pm 1 \pmod{9}$$

következik. Felhasználva, hogy $3 \nmid n$ kapjuk a $b \equiv \pm 1 \pmod{9}$ feltételt. Ezeknek és az $a + b \leq 16$, $(a, b) = 1$ követelményeknek csak az $(a, b) = (3, 8)$ és $(3, 10)$ számpárok felelnek meg.

Amikor a nem osztható 3-mal, akkor négy esetet kell megkülönböztetnünk attól függően, hogy $n \equiv 1, 2, 4$ vagy $5 \pmod{6}$.

Ha $n \equiv 1 \pmod{6}$, akkor (1)-ből $a^n + b^n \equiv a + b \equiv 0, \pm 1 \pmod{9}$. Felhasználva az $0 < a + b \leq 16$ és $1 < a < b$ egyenlőtlenségeket ebből következik, hogy $a + b = 8, 9$ vagy 10 , azaz csak a $(2, 7)$ és $(4, 5)$ párok teljesíthetik a feltételeket.

Hasonlóan vizsgálható a másik három alternatíva is, amely után azt találjuk, hogy a fenti négy eseten kívül még a $(2, 11)$ és $(5, 8)$ párok is, de több nem, kielégítik a kongruenciafeltételeket.

Tegyük fel most, hogy van olyan $(n, x) \in \mathbb{N}^2$, hogy

$$2^n + 7^n = x^3. \quad (2)$$

Ezt az egyenletet modulo 7 vizsgáljuk. Ha $3 \nmid n$, akkor $2^n \equiv 2$ vagy $4 \pmod{7}$. Másrészt $x^3 \equiv 0, 1, 6 \pmod{7}$ teljesül minden $x \in \mathbb{Z}$ -re, így a (2) egyenletnek nincs megoldása.

A $4^n + 5^n = x^3$ egyenletet modulo 31 vizsgálva azt találjuk, hogy a bal oldal 2, 9 illetve 10-el kongruens modulo 31, amikor $n \equiv 0, 1$ illetve $2 \pmod{3}$. Azonban 9 és 10 nem harmadik hatványmaradék, így $3 \mid n$, ami az 1. Segédttétel szerint nem lehetséges.

Végezetül, az $5^n + 8^n = x^3$ egyenlőség teljesüléséből, azt modulo 7 vizsgálva, következik $n \equiv 1 \pmod{6}$, ami miatt $5^n + 8^n \equiv 4 \pmod{9}$. Mivel az $x^3 \equiv$

4 (mod 9) kongruencia nem teljesülhet ez az egyenlet sem oldható meg. A bizonyítást befejeztük. $\square$

A következő lépésben még mindig elemi kongruenciamegfontolásokkal szűrünk ki megoldhatatlan egyenleteket.

Lemma 2 Az $(a, b) = (3, 8)$ és $(3, 10)$ párokra az (1) egyenlet nem oldható meg.

Bizonyítás Először az

$$f_1(n) = 3^n + 8^n = x^3 \quad (3)$$

egyenletet vizsgáljuk. Az 1. Segédétel szerint elegendő azzal az esettel foglalkozni, amikor n nem osztható 3-mal. Ha (3) megoldható, akkor megoldható modulo 7 is. Ebből egyszerű számolással következik, hogy $n \equiv 5 \pmod{6}$. Következésképpen n páratlan és így $11 \mid 3^n + 8^n$, ami miatt $11^2 = 121 \mid 3^n + 8^n$.

Legyen $n = 6m + 5$ és

$$3^5(3^6)^m + 8^5(8^6)^m \equiv 11 \cdot x_m \pmod{121},$$

ahol $0 \leq x_m < 11$. Az $\{x_m\}_{m=0}^\infty$ sorozat periódikus és periódushossza 11. A sorozat első 13 tagját az 1. táblázatban találja az olvasó.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x_m	9	0	7	9	2	8	6	9	4	9	7	5	0	7

1. táblázat

A táblázatból látható, hogy $11 \mid x_m$ akkor és csakis akkor, ha $m \equiv 1 \pmod{11}$. Ebből következik, hogy $121 \mid f_1(n)$ pontosan akkor, ha $n \equiv 11 \pmod{66}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha $n \equiv 11 \pmod{66}$, akkor

$$f_1(n) \equiv 3^{11} + 8^{11} \equiv -2 \pmod{67}.$$

Másrészt szintén egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy -2 nem lehet harmadik hatványmaradék modulo 67. Az utóbbi két tényből következik, hogy a (3) egyenletnek nincs megoldása.

Vizsgáljuk most az

$$f_2(n) = 3^n + 10^n = x^3 \quad (4)$$

egyenletet. Gondolatmenetünk hasonló az előző esetben alkalmazotthoz. A (4) egyenletet modulo 7 vizsgálva azt találjuk, hogy $n \equiv 1 \pmod{6}$, tehát ha (4) megoldható, úgy $13 \mid x$.

Legyen $n = 6m + 1$ és

$$3(3^6)^m + 10(10^6)^m \equiv 13x_m \pmod{169},$$

ahol $0 \leq x_m < 13$. Az $\{x_m\}_{m=0}^\infty$ sorozat első 14 tagját a 2. táblázatban adtuk meg.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
x_m	1	7	0	6	12	5	11	4	10	3	9	2	8	1	7

2. táblázat

Ebből látható, hogy $13|x_m$ pontosan akkor, ha $m \equiv 2 \pmod{13}$. Ezért $13^2|f_2(n)$ pontosan akkor, ha $n \equiv 13 \pmod{78}$. Ha $n \equiv 13 \pmod{78}$, akkor

$$f_2(n) \equiv 25 \pmod{79},$$

azonban 25 nem harmadik hatványmaradék modulo 79, így (4) sem oldható meg. $\square$

3 A tétel bizonyítása

Az 1. és 2. Lemma valamint az 1. és 2. segédtétel következtében az a feladatunk maradt csak, hogy belássuk: a

$$2^n + 11^n = x^3 \tag{5}$$

egyenletnek egyetlen megoldása van, mégpedig $(n, x) = (2, 5)$. Mielőtt a bizonyításra rátérnénk megjegyezzük, hogy az 1. és 2. lemmában alkalmazott módszerek (5)-re valószínűleg nem vagy legalábbis csak hosszas kísérletezés, ügyeskedés után alkalmazhatóak. Használhatóságuk korlátairól szinte kizárólag csak numerikus tapasztalataink vannak. Az alábbiakban ismertetendő eljárással ugyan- akkor mindig meg lehet határozni (1) megoldásait. A módszer hátránya az, hogy komoly elméleti és számítástechnikai apparátus szükséges az alkalmazásához. Ezért konkrét esetben, különösen ha azt sejtjük, hogy a feladatnak nincs megoldása, először érdemes moduláris teszteket végrehajtani és csak azok sikertelensége után bevetni a Baker módszert.

Az 1. Segédtételből tudjuk, hogy n nem osztható 3-mal, azaz $n = 3m + r$, ahol $r = 1$ vagy 2 . Legyen $\vartheta = \sqrt[3]{2}$ és $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Akkor $\mathbb{K}$ egészeinek gyűrűje $\mathbb{R}$ főideálgyűrű, amelyben $1, \vartheta, \vartheta^2$ egészbázist alkot. A θ elem konjugáltjai $\vartheta' = \zeta\vartheta$ és $\vartheta'' = \zeta^2\vartheta$, ahol $\zeta = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ egy primitív harmadik egységgyök. Hasonlóképpen, α' és α'' fogja jelölni az $\alpha \in \mathbb{K}$ elem α -tól különböző konjugáltjait. $\mathbb{R}$ -ben csak 1 és -1 az egységgyökök és $\mathbb{R}$ egy alapegysége $\eta = 1 + \vartheta + \vartheta^2$. Ezek az adatok megtalálhatók például Delone és Faddeev [1] könyvében. Egyszerűen kiszámítható a (11) (a 11 által generált ideál) felbontása is $\mathbb{R}$ -ben. Ha $\mathcal{P} = 3 + 2\vartheta + \vartheta^2$ és $\mathcal{Q} = 5 - 4\vartheta + \vartheta^2$, akkor $N(\mathcal{P}) = 11$, $N(\mathcal{Q}) = 11^2$ és $(\mathcal{P}\mathcal{Q}) = (11)$.

Az (5) egyenletből következik, hogy

$$(x - \vartheta^r 2^m)(x - \zeta\vartheta^r 2^m)(x - \zeta^2\vartheta^r 2^m) = (\mathcal{P}\mathcal{Q})^n. \tag{6}$$

Tekintettel arra, hogy x páratlan és (6) teljesül, ezért $\mathbb{R}$ -ben igazak az alábbiak
 $(x - \vartheta^r 2^m, x^2 + x\vartheta^r 2^m + \vartheta^{2r} 2^{2m}) = (x - \vartheta^r 2^m, 3x\vartheta^r 2^m) = (x - \vartheta^r 2^m, 3) = (1)$.

Mivel $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = 1$, ezért (6)-ból következik, hogy vannak olyan $u, v \in \mathbb{Z}$, amelyekkel

$$x - \vartheta^r 2^m = \eta^u \mathcal{P}^v \quad (7)$$

vagy

$$x - \vartheta^r 2^m = \eta^u \mathcal{Q}^v. \quad (8)$$

Tekintve (7), illetve (8) konjugáltjait és felhasználva a $\mathcal{P}'\mathcal{P}'' = \mathcal{Q}$ valamint a $\mathcal{Q}'\mathcal{Q}'' = 11\mathcal{P}$ azonosságokat arra a következtetésre jutunk, hogy

$$v = \begin{cases} n & (7)\text{-ben} \\ n/2 & (8)\text{-ban.} \end{cases}$$

Elosztva (7)-et illetve (8)-at ugyanezen egyenletek megfelelő konjugáltjával kapjuk az

$$\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^u \left(\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}'}\right)^v = \frac{x - \vartheta^r 2^m}{x - \vartheta^r \zeta^r 2^m} = 1 + \frac{\vartheta^r - 1}{x - \vartheta^r \zeta^r 2^m} \vartheta^r 2^m \quad (9)$$

illetve

$$\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^u \left(\frac{\mathcal{Q}}{\mathcal{Q}'}\right)^v = \frac{x - \vartheta^r 2^m}{x - \vartheta^r \zeta^r 2^m} = 1 + \frac{\vartheta^r - 1}{x - \vartheta^r \zeta^r 2^m} \vartheta^r 2^m \quad (10)$$

egyenleteket.

Mivel (5) miatt $x \geq \sqrt[3]{11} \cdot 11^m$, hacsak $m \geq 1$ és így $|x - \vartheta^r \zeta^r 2^m| \geq \sqrt[3]{3} \cdot 11^m$, ezért

$$\left| \frac{\vartheta^r - 1}{x - \vartheta^r \zeta^r 2^m} \vartheta^r 2^m \right| \leq \sqrt[3]{4} \left(\frac{2}{11}\right)^m < \frac{1}{9}, \quad (11)$$

ha $m \geq 2$. A logaritmusfüggvény tulajdonságaiból következik, hogy ha az x valós szám olyan, hogy $|x| < 1/3$, akkor $|\log(1+x)| < 1.16|x|$. Ezért (11)-et felhasználva (9) illetve (10)-ból következik, hogy

$$|\Lambda_1| = \left| u \log \left| \frac{\eta}{\eta'} \right| + v \log \left| \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}'} \right| \right| < 5.5 \left(\frac{2}{11}\right)^m \quad (12)$$

illetve

$$|\Lambda_2| = \left| u \log \left| \frac{\eta}{\eta'} \right| + v \log \left| \frac{\mathcal{Q}}{\mathcal{Q}'} \right| \right| < 5.5 \left(\frac{2}{11}\right)^m. \quad (13)$$

Tekintettel arra, hogy sem $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}'}$, sem $\frac{\mathcal{Q}}{\mathcal{Q}'}$ nem egység, ezért $\Lambda_1, \Lambda_2 \neq 0$. Alkalmazható tehát rájuk a 3. Segédétel. Az alsó becslés kiszámításához szükséges paraméterek a következők: $D = 6, B = |v|$,

$$h\left(\left|\frac{\eta}{\eta'}\right|\right) < 3.32, \quad h\left(\left|\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}'}\right|\right) < 2.51, \quad h\left(\left|\frac{\mathcal{Q}}{\mathcal{Q}'}\right|\right) < 0.44.$$

A 3. Segédttétel szerint tehát

$$|\Lambda_1|, |\Lambda_2| \geq \exp(-3 \cdot 10^6(7.5 + \log |v|)^2).$$

Összehasonlítva ezt a becslést (12) illetve (13)-mal kapjuk, hogy $|v| < 5 \cdot 10^9$, azaz így a legrosszabb esetben is $m < 1.5 \cdot 10^{10}$, azaz $n \leq 4.5 \cdot 10^{10}$.

Az (5) egyenlet helyességének közvetlen ellenőrzése a $0 < n \leq 4.5 \cdot 10^{10}$ intervallumban igen nagy teljesítményű számítástechnikai kapacitást igényel. Közvetett utat kell tehát keresnünk, amit a (12) illetve a (13) egyenlőtlenség biztosít. Ehhez a lánc törtek egy fontos tulajdonságára kell emlékeztetnünk. Legyen a valós, irracionális α szám lánc törtelőállítása

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$$

és jelölje p_n, q_n az α n -dik ($n \geq 0$) közelítő törtjének számlálóját illetve nevezőjét. Ekkor teljesül az alábbi, lásd pl. Hua [5], Theorem 10.3.1

Lemma 3 Ha $0 < q_{n-1} \leq q < q_n$ és $p \in \mathbb{Z}$, akkor

$$|\alpha q - p| > |\alpha q_n - p_n|.$$

A (12) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\left| v \log \left| \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}'} \right| / \log \left| \frac{\eta}{\eta'} \right| + u \right| < 2.75 \left(\frac{2}{11} \right)^m.$$

Legyen $\alpha = \log \left| \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}'} \right| / \log \left| \frac{\eta}{\eta'} \right|$ és határozzuk meg az α lánc törtelőállítást olyan pontossággal, hogy az n -dik közelítő tört nevezője nagyobb legyen, mint $|v|$, ami legfeljebb $5 \cdot 10^9$. Ehhez 23 lánc törtjegyet kell kiszámítanunk, amit az alábbiakban közlünk:

$$\alpha = [0; 1, 6, 3, 1, 4, 1, 7, 1, 3, 1, 3, 2, 2, 1, 1, 110, 2, 3, \dots]$$

A számítást a MAPLE V komputer algebrai rendszerrel végeztük, de tehetjük volna más, hasonló programcsomagokkal is, mint például a PAPI-GP. Könnyen ellenőrizhető a MAPLE V-el, hogy $g_{23} > 5 \cdot 10^9$, így a 3. Lemma állítása szerint

$$2.32 \cdot 10^{-9} < |\alpha q_{23} - p_{23}| < |v\alpha + u| < 2.75 \left(\frac{2}{11} \right)^m.$$

Ebből következik, hogy $m \leq 12$, azaz $v \leq 38$.

A legutolsó gondolatmenetet még egyszer megismételhetjük csak most már a $v \leq 38$ nevezőjű törtre és az n -re vonatkozó korlátot leredukálhatjuk 3-ra, ami ebben az esetben a tétel bizonyítását is jelenti.

A (13) egyenlőtlenség lehetetlensége a fentiekből és a

$$\log \left| \frac{\eta}{\eta'} \right| / \log \left| \frac{\mathcal{Q}}{\mathcal{Q}'} \right| = -\log \left| \frac{\eta}{\eta'} \right| / \log \left| \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}'} \right|$$

egyenlőtlenségből rögtön következik.

References

- [1] B.N. Delone and D.K. Faddeev *The Theory of Irrationalities of the Third Degree*, Translations of Mathematical Monographs Vol. 10, AMS, 1964.
- [2] I. Gaál, A. Pethő and M. Pohst *On the resolution of index form equations corresponding to biquadratic number fields II.*, J. Number Theory, **38** (1991) 35–51.
- [3] I. Gaál, A. Pethő and M. Pohst *On the resolution of index form equations corresponding to biquadratic number fields III.*, J. Number Theory, megjelenés alatt.
- [4] I. Gaál and N. Schulte *Computing all power integral bases of cubic number fields*, Math. Comp., **53** (1989) 689–696.
- [5] Hua Loo Keng, *Introduction to number theory*, Springer–Verlag, 1982.
- [6] M. Mignotte *Su una classe di equazioni del tipo $a^n + b^n = z^2$* , Rend. del Sem. Univ. Cagliari, **62** (1992) fasc. 1.
- [7] M. Mignotte and M. Waldschmidt, *Linear forms in two logarithms and Schneider’s method, III* Annales Fac. Sci. Toulouse (1990) 43–75.
- [8] T. Nagell, Des équations indéterminées $x^2 + x + 1 = y^n$ et $x^2 + x + 1 = 3y^n$, Norsk. Mat. Forenings Skr. (1) **2** (1921), 14 pp.
- [9] A. Pethő, *Perfect powers in second order linear recurrences*, J. Number Theory, **15** (1983) 117–127.
- [10] A. Pethő und R. Schulenberg, *Effektives Lösen von Thue Gleichungen*, Publ. Math. Debrecen, **34** (1987) 189–196.
- [11] A. Pethő, *Über kubische Ausnahmeeinheiten*, Arch. Math., **60** (1993) 146–153.
- [12] T.N. Shorey and C.L. Stewart, *On the Diophantine equation $ax^{2t} + bx^t y + cy^2 = d$ and pure powers in recurrences*, Math. Scand., **52** (1983) 24–36.
- [13] Turán Pál, Gyarmati Edit, *Számelmélet* 8. utánnnyomás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.
- [14] N. Tzanakis and B.M.M. de Weger, *On the practical solution of the Thue–Mahler equation*, in: *Computational Number Theory* Eds.: A. Pethő, M.E. Pohst, H.C. Williams and H.G. Zimmer, Walter de Gruyter 1991. pp. 289–294.
- [15] B.M.M. de Weger, *Algorithms for Diophantine Equations* CWI Tract 65, Centre for Math. and Comp. Sci. Amsterdam, 1989.

Maurice Mignotte
Université de Strasbourg
Département de Mathématique 7, Rue René Descartes
67–Strasbourg, France

Pethő Attila
Debreceni Orvostudományi Egyetem
Informatikai Laboratórium
4028–Debrecen, Nagyerdei krt. 98.