Über außergewöhnliche kubische Einheiten

Attila Pethö *
Lehrstuhl für Informatik
Kossuth Lajos Universität
H-4010 Debrecen, Pf. 12
Ungarn

November 28, 2009

1 Einleitung

Bezeichne $\mathbb{H}$ die Menge der ganzen kubischen algebraischen Zahlen. Es sei $P(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} p_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$. Bezeichne D(P) und H(P) die Diskriminante und die Höhe von P. Unter der Höhe eines, nicht unbedingt einvariables, Polynoms verstehen wir die Maximum der Absolutbeträge seiner Koeffizienten. Es seien $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ und bezeichne $\mathbb{H}_{m_1 m_2}$ die Menge aller $\eta \in \mathbb{H}$ mit

$$\begin{aligned} N(\eta) &= m_1 \\ N(P(\eta)) &= m_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Für eine ganze algebraische Zahl α sei $N(\alpha)$ bzw. $H(\alpha)$ das Produkt aller ihrer Konjugierten bzw. die Höhe ihres Minimalpolynoms definiert. Setzen wir $m_1 = m_2 = 1$ und $P(x) = x-1$, dann ist $\mathbb{H}_{m_1 m_2}$ die Menge der außergewöhnlichen, kubischen Einheiten. Ausführliche Literaturangaben über die außergewöhnlichen Einheiten findet man bei Ennola [1] und Narkiewicz [5].
Nach einem Satz von Györy [3] sind die Lösungen der S-Einheitengleichungen effektiv berechenbar. Daraus folgt, S.z.B Fung et.al. [2], daß wenn das Polynom $P(x)$ und ein (nicht unbedingt kubischer) Zahlkörper $\mathbb{K}$ gegeben ist, dann existieren nur endlich viele $\eta \in \mathbf{Z_K}$ mit (1). Läßt man aber $\mathbb{K}$ variieren, dann kann (1) unendlich viele Lösungen haben. (S.z.B. Ennola [1]) Wir wollen in der vorliegenden Arbeit zeigen, daß dieser Fall nur dann Vorkommen kann, wenn P ein lineares oder ein quadratisches Polynom ist. Es gilt genauer

*Diese Arbeit entstand während der Gastprofessur des Authors am Fachbereich 14 - Informatik, Universität des Saarlandes.

Satz 1 *Es sei P eine Potenz eines linearen oder indefiniten quadratischen Polynoms. Ist für ein Paar $m_1, m_2 \neq 0$ die Menge $\mathbb{H}_{m_1 m_2}$ nicht leer, dann enthält sie unendlich viele Elemente.*
Treffen die Voraussetzungen der ersten Behauptung nicht zu, dann ist $\mathbb{H}_{m_1 m_2}$ endlich.

Der Fall n=2, den wir in [6] bewiesen haben wurde durch die Untersuchungen von Fung et al. [2] motiviert. Dort haben sie die Torsionsstrukturen, der über kubischen Zahlkörpern definierten, elliptischen Kurven untersucht. Es stellte sich heraus, daß gewisse Torsionsstrukturen nur dann vorkommen können, wenn (1) mit dem Polynom $x^2 - 11x + 1$ in $\mathbb{H}$ lösbar ist.
Satz 1 ist für $n > 2$ im allgemeinen nicht effektiv. In seinem Beweis benutzen wir nämlich den folgenden, nicht effektiven Satz von Schinzel [7].

Hilfssatz 1 (Schinzel) *Es sei $f(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ ein über $\mathbf{Q}[x, y]$ irreduzibles Polynom. Wenn die Diophantische Gleichung*

$$f(x, y) = 0$$

unendlich viele $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ Lösungen hat, dann ist der höchste homogene Anteil von $f(x, y)$ eine Potenz einer linearen oder einer indefiniten quadratischen Form.

Unter etwas schwächeren Voraussetzungen können wir sogar einen effektiven Aussage beweisen.

Satz 2 *Nehmen wir an, daß P entweder mindestens zwei, über $\mathbf{Q}[x]$, irreduzible Teiler P_1, P_2 mit $(P_1, P_2) = (P_1, x) = (P_2, x) = 1$ hat, oder P eine Potenz eines positiv-definites quadratisches Polynoms ist. Dann gibt es eine nur von $H(P), n, m_1$ und m_2 abhängige, effektiv berechenbare Konstante c_1, so daß*

$$H(\eta) < c_1$$

gilt für alle $\eta \in \mathbb{H}_{m_1 m_2}$.

Aus der Sätze 1 und 2 ergibt sich die nächste Behauptung unmittelbar

Folgerung 1 *Es sei $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ein Hauptpolynom vom Grad n. Gelten die Voraussetzungen vom Satz 1, dann gibt es nur endlich viele kubische Einheiten η, so daß $P(\eta)$ ebenfalls eine Einheit ist. Gelten sogar die Voraussetzungen vom Satz 2, dann sind diese Einheiten effektiv berechenbar.*

2 Hilfsergebnisse

Bezeichne $\sigma_i = \sigma_i(x, y, z), i = 1, 2, 3$ die elementarsymmetrischen Polynome der Unbestimmten x, y, z. Sei $k \geq 0$ eine ganze Zahl und

$$S_k = x^k + y^k + z^k.$$

Die folgenden Newtonschen Formeln beschreiben den Zusammenhang zwischen S_k und σ_i

$$\begin{aligned} S_0 &= 3, S_1 = \sigma_1, S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \\ S_{k+3} &= \sigma_1 S_{k+2} - \sigma_2 S_{k+1} + \sigma_3 S_k, \quad \text{wenn} \quad k \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Im weiteren bezeichnen i, j, k, l, s immer nicht negative ganze Zahlen. Das folgende Lemma ist mit Induktion einfach zu beweisen.

Lemma 1 *Es gilt*

$$S_k = \sigma_1^k + \sum_{\substack{i+2j+3s=k \\ i<k}} a_{ijs}^{(k)} \sigma_1^i \sigma_2^j \sigma_3^s, \tag{3}$$

für alle $k \geq 1$ mit $a_{ijs}^{(k)} \in \mathbb{Z}$.

Lemma 2 *Es gilt*

$$S_l^2 - S_{2l} = 2\sigma_2^l + 2 \sum_{\substack{i+2j+3s=l \\ i<l}} a_{ijs}^{(l)} \sigma_1^j \sigma_2^i \sigma_3^{j+2s} \tag{4}$$

für alle $l \geq 1, l \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Wir haben

$$S_l^2 - S_{2l} = (x^l + y^l + z^l)^2 - (x^{2l} + y^{2l} + z^{2l}) = 2((xy)^l + (xz)^l + (yz)^l).$$

Aus Lemma 1 ergibt sich

$$\begin{aligned} (xy)^l + (xz)^l + (yz)^l &= \sum_{i+2j+3s=l} a_{ijs}^{(l)} (xy + xz + yz)^i (x^2yz + xy^2z + xyz^2)^j (xyz)^{2s} \\ &= \sigma_2^l + \sum_{\substack{i+2j+3s=l \\ i<l}} a_{ijs}^{(l)} \sigma_1^j \sigma_2^i \sigma_3^{j+2s}, \end{aligned} \tag{5}$$

woraus (4) unmittelbar folgt.

□

Lemma 3 *Es seien $k > l > 0$. Dann gilt*

$$S_k S_l - S_{k+l} = \sigma_1^{k-l} \sigma_2^l + \sum_{\substack{i+2j+3s=k+l \\ i+j<k}} b_{i,j,s}^{(k,l)} \sigma_1^i \sigma_2^j \sigma_3^s. \tag{6}$$

mit $b_{i,j,s}^{(k,l)} \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Das Lemma wird durch Induktion nach k bewiesen. Seine Richtigkeit kann für $k \leq 3$ mit einfacher Rechnung nachvollziehen. Diesen Schritt überlassen

wir dem Leser. Es sei $K \geq 3$ und wir nehmen an, daß (6) für alle $K \geq k > l > 0$ erfüllt ist. Aus (2) erhalten wir die Identität

$$S_{K+1}S_l - S_{K+1+l} = \sigma_1(S_K S_l - S_{K+l}) - \sigma_2(S_{K-1}S_l - S_{K-1+l}) + \sigma_3(S_{K-2}S_l - S_{K-2+l}). \tag{7}$$

Nun unterscheiden wir vier Fällen.

Fall 1, $K - 2 > l$. In diesem Fall dürfen wir (6) auf alle drei Summanden, die auf der rechten Seite von (7) stehen, anwenden. Nach Einsetzung sieht diese Summe wie folgt aus:

$$\sigma_1^{K+1-l}\sigma_2^l + \sum_{\substack{i+2j+3s=K+l \\ i+j<K}} b_{i+1,j,s}^{(K,l)}\sigma_1^{i+1}\sigma_2^j\sigma_3^s -$$
$$\sigma_1^{K-l}\sigma_2^{l+1} + \sum_{\substack{i+2j+3s=K+l-1 \\ i+j<K}} b_{i,j+1,s}^{(K-1,l)}\sigma_1^i\sigma_2^{j+1}\sigma_3^s +$$
$$\sigma_1^{K-l}\sigma_2^l\sigma_3 + \sum_{\substack{i+2j+3s=K+l-2 \\ i+j<K}} b_{i,j,s+1}^{(K-2,l)}\sigma_1^i\sigma_2^j\sigma_3^{s+1} =$$
$$\sigma_1^{K+1-l}\sigma_2^l + \sum_{\substack{i+2j+3s=K+l+1 \\ i+j<K+1}} b_{i,j,s}^{(K+1,l)}\sigma_1^i\sigma_2^j\sigma_3^s.$$

In diesem Fall ist (6) also richtig.
Fall 2, $K - 2 = l$. Hier können wir Formel (6) nur auf die ersten beiden Summanden von der rechten Seite von (7) anwenden. Für den dritten Summanden setzen wir (4) ein. Sonst ist die Rechnung ähnlich wie im Fall 1.
Fall 3, $K - 1 = l$. Den ersten Summand können wir wiederum durch (6) ersetzen und den zweiten durch (4). Wenn wir die Rolle von k und l vertauschen, dann können wir (6) auch auf den dritten Summanden anwenden. Dadurch erhalten wir die folgende Summe

$$\sigma_1^2\sigma_2^l + \sum_{\substack{i+2j+3s=K+l \\ i+j<K}} b_{i+1,j,s}^{(K,l)}\sigma_1^{i+1}\sigma_2^j\sigma_3^s -$$
$$2\sigma_2^{l+1} - 2\sigma_2 \sum_{\substack{i+2j+3s=l \\ i<l}} a_{ijs}^{(l)}\sigma_1^j\sigma_2^i\sigma_3^{j+2s} +$$
$$\sigma_1\sigma_2^l\sigma_3 + \sum_{\substack{i+2j+3s=K+l-2 \\ i+j<K}} b_{i,j,s+1}^{(l,K-2)}\sigma_1^i\sigma_2^j\sigma_3^{s+1}.$$

Da $l + 1 < K + 1$ und in dem vierten Summanden $i + 2j + 3s = l$, d.h. $j + 2(i + 1) + 3(j + 2s) = 2(i + 2j + 3s) + 2 = 2l + 2 = K + l + 1$ gilt, wir haben (6) auch in diesem Fall bewiesen.

Fall 4, $K = l$. Wir gehen nun vor wie in Fall 3 mit dem Unterschied, daß die Rolle von k und l sowohl bei dem zweiten als auch bei dem dritten Summanden vertauscht wird.

□

Lemma 4 *Es sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper und* $P(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} p_i x^i \in \mathbb{K}[x]$. *Dann gilt*

$$P(x)P(y)P(z) = p_0\sigma_2^n P(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}) + \sum_{i+j<n} c_{ijk}^{(n)} \sigma_1^i \sigma_2^j \sigma_3^k, \tag{8}$$

mit $c_{ijk}^{(n)} \in \mathbb{Z}[p_0, ..., p_{n-1}]$.

Beweis: Für n=1 kann man (7) sehr einfach verifizieren. Wir nehmen an, (8) ist wahr für $n-1$, mit $n > 1$. Es sei $P(x) = x^n + P_1(x)$ mit $P_1(x) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i x^i \in \mathbb{K}[x]$. Durch Multiplikation erhält man

$$P(x)P(y)P(z) = (xyz)^n + A_1 + A_2 + A_3, \tag{9}$$

wobei die drei Summanden

$$\begin{aligned} A_1 &= (xy)^n P_1(z) + (xz)^n P_1(y) + (yz)^n P_1(x) \\ A_2 &= x^n P_1(z)P_1(y) + z^n P_1(x)P_1(y) + y^n P_1(x)P_1(y) \\ A_3 &= P_1(x)P_1(y)P_1(z) \end{aligned}$$

getrennt untersucht werden.
Sei $0 \le J \le n-1$ die größte ganze Zahl mit $p_J \neq 0$, dann ist $P_1(x) = p_J \tilde{P}_1(x)$ mit $\tilde{P}_1(x) = \sum_{i=1}^{J} \frac{p_i}{p_J} x^i$. Aus der Induktionsannahme folgt

$$A_3 = \sum_{i+j\le J} d_{ijk} \sigma_1^i \sigma_2^j \sigma_3^k. \tag{10}$$

Die Summe A_1 können wir mit der Hilfe von (5) wie folgt umgestalten

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{i=0}^{n-1} p_i (xyz)^i ((xy)^{n-i} + (xz)^{n-i} + (yz)^{n-i}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} p_i \sigma_3^i \sum_{k+2j+3l=n-i} a_{kjl}^{(n-i)} \sigma_1^j \sigma_2^k \sigma_3^{j+2l}. \end{aligned}$$

Ist einer der Zahlen i, k oder l größer als 0, dann gilt $j + k < n$. Wir haben nach (5) auch $a_{n00}^{(n)} = 1$, somit erhalten wir

$$A_1 = p_0\sigma_2^n + \sum_{i+j<n} d_{ijk} \sigma_1^i \sigma_2^j \sigma_3^k. \tag{11}$$

Wir beschäftigen uns schließlich mit A_2. Es gilt zunächst

$$A_2 = \sum_{i=0}^{n-1} p_i^2 \sigma_3^i S_{n-i} + \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} p_i p_j \sigma_3^i (S_{n-i} S_{j-i} - S_{n+j-2i}).$$

Wir können hier auf den ersten Summanden Lemma 1 und da $n-i > j-i$ ist, auf den zweiten Summand Lemma 3 anwenden. Dadurch erhalten wir

$$A_2 = p_0 \sum_{i=0}^{n-1} p_i \sigma_1^{n-i} \sigma_2^i + \sum_{i+j<n} d_{ijk} \sigma_1^i \sigma_2^j \sigma_3^k. \tag{12}$$

Aus (9),(10),(11) und (12) folgt (8) unmittelbar. □

Lemma 5 *Es seien $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ vom Grad n mit $P(0) \neq 0$ und $R(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$ vom Grad kleiner als n. Es sei $T(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$ ein Teiler des Polynoms $Q(x,y) = y^n P(\frac{x}{y}) + R(x,y)$. Dann gibt es $P_1(x) \in \mathbb{K}[x]$ vom Grad n_1 und $R_1(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$ vom Grad kleiner als n_1 so daß $P_1(x)|P(x)$ und $T(x,y) = y^{n_1} P_1(\frac{x}{y}) + R_1(x,y)$ erfüllen sich.*

Beweis: Sei $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_i \in \mathbb{K}, i = 0, ..., n; a_n \neq 0$. Wegen der Annahme $P(0) \neq 0$ gilt auch $a_0 \neq 0$. Ist $T(x,y)$ ein konstantes Polynom, dann ist die Behauptung unmittelbar klar. Nehmen wir an, daß $T = T_1 \notin \mathbb{K}$ und es gibt ein $T_2 \in \mathbb{K}[x,y]$ mit

$$Q(x,y) = T_1(x,y) T_2(x,y). \tag{13}$$

Es sei

$$T_i(x,y) = \sum_{j=0}^{n_i} a_{ij}(y) x^j$$

mit $a_{ij}(y) \in \mathbb{K}[y], a_{in_i}(y) \neq 0, i = 1,2$. Aus (13) folgt $n_1 + n_2 = n$ und $a_{1,n_1}(y) a_{2,n_2}(y) = a_n$. Deswegen ist sowohl a_{1,n_1} als auch a_{2,n_2} eine Konstante. Betrachtet man $T_i(x,y)$ als Polynom in y, dann kann man auf dieselben Art nachweisen, daß in $T_i(x,y)$ die höchste Potenz von y separat vorkommt. Bezeichne k_i die höchste Potenz von y in $T_i(x,y), i = 1,2$. Es gilt $n_1 + n_2 = k_1 + k_2 = n$ wegen (13). Würde eventuell $n_1 < k_1$ gelten, dann wäre auch $n_2 > k_2$. In diesem Fall kommt das Monom $x^{n_2} y^{k_1}$ auf der rechten Seite von (13) vor, aber nicht auf der linken Seite. Deswegen gilt $n_1 = k_1$ und $n_2 = k_2$ und wir können

$$T_i(x,y) = y^{n_i} P_i(\tfrac{x}{y}) + R_i(x,y)$$

schreiben, mit $P_i(x) \in \mathbb{K}[x], R_i(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$, wobei der Grad von $R_i(x,y)$ kleiner ist als $n_i, i = 1,2$. Aus (13) folgt nun

$$P(x) = P_1(x)P_2(x).$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

3 Beweis der Sätze

Zum Beweis der Sätze brauchen wir das folgende Ergebniss von Mignotte [4].

Hilfssatz 2 *Es sei $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ vom Grad n und $T(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ein Teiler vom $Q(x)$. Dann gilt*

$$H(T) \leq 2^n\sqrt{n+1}H(Q).$$

Beweis vom Satz 1.
Es sei

$$P(x) = P_1(x)^{e_1} \cdots P_t(x)^{e_t} \tag{14}$$

die irreduzible Faktorisierung von $P(x)$ in $\mathbb{Z}[x]$. Wir werden im weiteren $t = 1$ annehmen, da der Fall $t > 1$ im Beweis vom Satz 2, in schärferen Form, behandelt wird.
Es sei $\eta \in \mathbb{H}$ eine Lösung von (1). Dann gehört $N(P(\eta))$ zu $\mathbb{Z}$ und m_2 muß eine e_1-ste Potenz einer ganzen Zahl sein. Somit dürfen wir o.B.d.A. $e_1 = 1$ und $P(x)$ irreduzibel annehmen. Der Fall $n = 1$ ist sehr einfach nachzuvollziehen. Den Fall $n = 2$ habe ich in [6, Corollary 1 und 2] bewiesen. Im weiteren werden wir also $n > 2$ annehmen.
Es sei $\eta \in \mathbb{H}$ eine Lösung von (1) und bezeichne $E(x) = x^3 - vx^2 + ux - m_1 \in \mathbb{Z}[x]$ das Minimalpolynom von η.
Ist $P(\eta) \in \mathbb{Z}$, dann bedeutet $N(P(\eta)) = m_2$ nichts anderes, als $P(\eta) = m_2$. Dann ist $E(x)$ einer der endlich vielen Teiler von $P(x) - m_2$. Somit besitzt (1) endlich viele Lösungen in $\mathbb{H}$ und diese sind effektiv berechenbar.
Im weiteren nehmen wir $P(\eta) \notin \mathbb{Z}$ an. Dann ist $P(\eta)$ eine ganze, kubische algebraische Zahl. Bezeichnen wir ihre Konjugierten mit X, Y, Z. Dann bedeutet das Gleichungssystem (1)

$$\begin{aligned} XYZ = \sigma_3(X,Y,Z) &= m_1 \\ P(X)P(Y)P(Z) &= m_2. \end{aligned} \tag{15}$$

Mit der Anwendung von Lemma 4 erhalten wir

$$P(X)P(Y)P(Z) = p_0\sigma_2^n P(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}) + \sum_{i+j<n} c_{ijk}^{(n)}\sigma_1^i\sigma_2^j\sigma_3^k. \tag{16}$$

Ersetzen wir in (14) σ_1 durch u und σ_2 durch v, dann bekommen wir

$$P(X)P(Y)P(Z) - m_2 = p_0u^nP(\tfrac{v}{u}) + R(u,v) = F(u,v),$$

wobei $R(u,v) \in \mathbb{Z}[u,v]$ vom Totalgrad kleiner als n ist. Das Polynom $F(u,v)$ ist nach Lemma 5 irreduzibel. Da das Polynom $p_0 u^n P(\frac{v}{u})$ ebenfalls irreduzibel ist und sein Grad n größer als 2 ist hat die Diophantische Gleichung

$$F(x,y) = 0$$

nach Hilfssatz 1 nur endlich viele Lösungen. Dadurch folgt, daß die Menge $H_{m_1 m_2}$ auch in diesem Fall endlich ist.

Beweis vom Satz 2.

Es sei (14) wieder die irreduzible Faktorisierung von $P(x)$, wobei nun t¿1 gilt. Wir dürfen o.B.d.A. $(P_1(x),x) = (P_2(x),x) = 1$ annehmen. Die Lösungen $\eta \in \mathbb{H}$ von (1) müssen, wegen der multiplikativen Eigenschaft der Normfunktion, einer der Gleichungssystemen der Form

$$\begin{aligned} N(\eta) &= m_1 \qquad (17)\\ N(P_1(\eta)) &= m_{21}\\ N(P_2(\eta)) &= m_{22} \qquad (18) \end{aligned}$$

genügen, wobei $m_{21}, m_{22} | m_2$. Die Anzahl solcher Gleichungssystemen ist kleiner als $4m_2^2$. Nach Hilfssatz 2 gilt auch

$$H(P_1), H(P_2) \leq c_2,$$

wobei c_2 nur von n und $H(P)$ abhängt und effektiv berechenbar ist.

Diejenige $\eta \in \mathbb{H}$ mit $P_1(\eta) \in \mathbb{Z}$ oder $P_2(\eta) \in \mathbb{Z}$ sind, wie wir im Beweis vom Satz 1 gezeigt haben, effektiv berechenbar. Wir müssen also uns nur noch mit solchen $\eta \in \mathbb{H}$ beschäftigen, für welche $P_1(\eta), P_2(\eta) \notin \mathbb{Z}$ gilt. Es sei $degP_j(x) = n_j$ und $P_j(0) = p_{j0} \neq 0, j = 1,2$. Wenden wir die Überlegung des Beweises vom Satz 1 auf die ersten und zweiten, sowie auf die ersten und dritten Gleichungen von (17) an, dann sehen wir, daß u und v den Gleichungen

$$F_j(u,v) = p_{j0} u^{n_j} P_j(\frac{u}{v}) + R_j(u,v) = 0, j = 1,2 \qquad (19)$$

genügen müssen, wobei $R_j(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$ mit $degR_j < n_j$ $j = 1,2$ ist. Aus dem Beweis vom Lemma 4 ist es klar, daß $H(F_j) < c_3$ gilt mit einer nur von $H(P), m_1, m_2$ und n abhängigen, effektiv berechenbaren Konstanten c_3. Die Polynome F_1, F_2 sind nach Lemma 5 über $\mathbf{Q}[x,y]$ irreduzibel und teilerfremd, da P_1 und P_2 dieselbe Eigenschaften über $\mathbf{Q}[x]$ besitzen. Somit gilt

$$Res_v(F_1(u,v), F_2(u,v)) = F_{12}(u) \neq 0,$$

wobei $Res_v(A,B)$ die Resultante von $A, B \in \mathbf{Q}[u,v]$ bezüglich v bezeichnet. Eine offensichtliche Abschätzung liefert

$$H(F_{12}) \leq n! n^{logn} (max\{H(F_1), H(F_2)\})^n,$$

d.h. $H(F_{12}) < c_4$, mit einer effektiv berechenbaren Konstanten c_4.
Ist $\eta \in \mathbb{H}$ eine Lösung von (1), dann ist $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ eine Lösung von (18) und es gilt $F_{12}(u) = 0$. Dann teilt u die konstanten Term von F_{12}, d.h. $|u| \leq H(F_{12}) < c_4$. Vertauscht man die Rollen von u und v, dann erhält man dieselbe Abschätzung auch für v. Damit ist Satz 2 auch bewiesen.

References

[1] V. Ennola, *Cubic number fields with exceptional units,* in: "Computational Number Theory" Eds.: A. Pethö, M.E. Pohst, H.C. Williams and H.G. Zimmer, W. de Gruyter Verlag, 1991, 103-128.

[2] G.W. Fung, H. Ströher, H.C. Williams and H.G. Zimmer, *Torsion groups of elliptic curves with integral j-invariant over pure cubic fields,* J. Number Theory, **36** (1990) 12-45.

[3] K. Györy, *On the solutions of linear diophantine equations in algebraic integers of bounded norm,* Ann. Univ. Sci. Eötvös , Sect. Math., **22-23** (1979-1980), 225-233.

[4] M. Mignotte, *Some inequalities about univariate polynomials,* "SYMSAC" 1981, ACM Inc.,New York, 1981, 195-199.

[5] W. Narkiewicz, *"Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers",* Springer Verlag, 1991.

[6] A. Pethö, *Application of Gröbner bases to the resolution of systems of norm equations,* in: "Proc. ISSAC'91" Ed.:S.M. Watt, ACM Press 1991, 144-150.

[7] A. Schinzel, *An improvement of Runge's theorem on diophantine equations,* Commentarii Pontif. Acad. Sci. 1969. No. 20.