Valószínűségszámítás és statisztika feladatok

2012/13. tanév, I. félév

1 Kombinatorika

1.1 *Hányféleképpen lehet a sakktáblán* 8 *bástyát elhelyezni úgy, hogy egyik se üsse a másikat? Mennyi lesz az eredmény, ha a* 8 *bástyát meg tudjuk különböztetni egymástól?*

1.2 Hány négyjegyű szám készíthető a $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ számjegyekből?

1.3 Melyikből van több: csupa különböző számjegyből álló tízjegyű, vagy csupa különböző számjegyből álló kilencjegyű számból?

1.4 Hányféleképpen rakhatunk sorba 12 könyvet, ha 3 bizonyos könyvet egymás mellé akarunk rakni és

a) a három könyv sorrendje nem számít?

b) a három könyv sorrendje számít?

1.5 *Hányféleképpen ültethetünk egy kerek asztal köré* 7 *embert, ha a forgatással egymásba vihető ülésrendeket azonosnak tekintjük?*

1.6 *Hányféleképpen ültethetünk egy kerek asztal köré* 5 *férfit és* 5 *nőt úgy, hogy se két férfi, se két nő ne kerüljön egymás mellé?*

1.7 *Hányféleképpen lehet kitölteni egy totószelvényt (*14 *mérkőzés, mindegyik eredménye lehet* $1,\ 2$ *vagy* X*)?*

1.8 Hat ajánlott levelet kell kikézbesíteni, ehhez három postás áll rendelkezésre. Hányféleképpen oszthatjuk szét a leveleket közöttük?

1.9 Hányféleképpen választhatunk ki egy csomag francia kártyából (4 szín, színenként 13 lap) négy páronként különböző színű lapot? Hányféleképpen választhatunk akkor, ha azt is megköveteljük, hogy ne legyen két azonos értékű sem?

1.10 *Hányféleképpen tölthetünk ki egy ötöslottó szelvényt (*90 *számból kell kiválasztani ötöt)?*

1.11 Csak egész koordinátájú pontokon lépkedve hányféleképpen juthatunk el az origóból az $(5,3)$ pontba, ha csak jobbra és felfelé lépkedhetünk?

1.12 *Kiindulva az origóból fejet dobva jobbra lépünk egyet, írást dobva pedig balra.* 10 *dobás után hányféleképpen fordulhat elő, hogy visszajutunk az origóba?*

1.13 Igazoljuk a binomiális tételt, azaz, hogy tetszőleges $a, b \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \ !$$

1.14 *Igazoljuk, a következőt:*

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \ !$$

1.15 *Igazoljuk, a következőt:*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n \ !$$

1.16 *Hányféleképpen lehet sorbarendezni* n *darab nullát és* k *darab egyest* $(k \leq n+1)$, *hogy két egyes ne kerüljön egymás mellé?*

1.17 *Egy állatszelidítő* 5 *oroszlánt és* 4 *tigrist akar kivezetni a porondra, de két tigris nem jöhet egymás után, mert összevesznek. Hányféleképpen állíthatja sorba az állatokat, ha azokat természetesen meg tudja különböztetni egymástól?*

1.18 Artúr király kerekasztalánál 12 lovag ül. Mindegyikük hadilábon áll a két asztalszomszédjával. Hányféleképpen választhatunk ki közülök öt lovagot úgy, hogy ne legyenek közöttük ellenségek?

1.19 *Egy csomag francia kártyából kihúzunk* 10 *lapot.*

- *a) Hány esetben lesz ezek között ász?*
- *b) Pontosan egy ász?*
- *c) Legfeljebb egy ász?*
- *d) Pontosan két ász?*
- *e) Legalább két ász?*

1.20 Hányféleképpen választhatunk ki 12 lányból és 15 fiúból négy táncoló (fiú–lány) párt?

1.21 Hány olyan valódi hatjegyű szám van, amelynek három jegye páros, három pedig páratlan?

1.22 *Hányféleképpen lehet* 14 *embert szétültetni egy öt-, egy négy-, egy három- és egy kétszemélyes csónakba?*

1.23 *A büfében négyféle csokiszeletet árulnak. Hányféleképpen választhatunk* 12 *darabot közülük (mindegyikből van legalább* 12*)?*

1.24 *Hányféleképpen oszthatunk szét 4 gyerek között* 7 *almát és* 9 *körtét (nem feltétlenül kap mindegyik gyerek)?*

1.25 Egy csomag francia kártyából hányféleképpen tudunk kiválasztani 5 lapot úgy, hogy legyen közöttük pikk és hetes?

1.26 Öt fiú és öt lány közül hányféleképpen tudunk kiválasztani négy embert, hogy legyen közöttük legalább két lány?

2 Események, műveletek eseményekkel

2.1 *Igazolja a De-Morgan azonosságokat, azaz, hogy*

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \qquad \textit{és} \qquad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \ !$$

2.2 Egy érmével dobunk. Ha az esemény fej, mégegyszer, ha írás, még kétszer. Írja fel az eseményteret!

2.3 Írja fel a lottóhúzás (ötöslottó) eseményterét!

2.4 Háromszor dobunk egy kockával. A_i jelentse azt az eseményt, hogy az i-edik dobás hatos, $i = 1, 2, 3$. Mit jelentenek az alábbi események:

$$A_1 + A_2, \quad A_1 \cdot A_2, \quad A_1 + A_2 + A_3, \quad A_1 \cdot A_2 \cdot A_3, \quad A_1 \cdot \overline{A_2}, \quad A_1 \setminus A_2 \ ?$$

2.5 Egy műhelyben három gép dolgozik. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az i-edik gép egy éven belül elromlik, $i = 1, 2, 3$. Fejezzük ki az A_i eseményekkel a következőket:

a) csak az első romlik el;
b) mindhárom elromlik;
c) egyik sem romlik el;
d) az első és a második nem romlik el;
e) az első és második elromlik, a harmadik nem;
f) csak egy gép romlik el;
g) legfeljebb egy gép romlik el;
h) legfeljebb két gép romlik el;
i) legalább egy gép elromlik.

2.6 Milyen kapcsolat áll fenn az események között, ha igaz

a) $A \cdot B = A$,
b) $A + B = A$,
c) $A + B = \overline{A}$,
d) $A \cdot B = \overline{A}$,
e) $A + B = A \cdot B$?

2.7 Milyen feltételek mellett teljesül a következő egyenlőség:

$$A + (B \cdot \overline{A}) = B \ ?$$

2.8 *Igazolja, hogy megszámlálható sok σ-algebra metszete is σ-algebra!*

3 Klasszikus valószínűségi mező

3.1 *Dobjunk fel egyszerre két szabályos dobókockát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege* 8*? Ábrázolja az eseményteret és a kedvező események halmazát!*

3.2 Dobjunk fel három szabályos dobókockát egymástól függetlenül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege prímszám lesz?

3.3 *Egy szabályos dobókockával kétszer egymás után dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az első dobás eredménye nagyobb, mint a másodiké?*

3.4 Dobjunk fel tíz darab egyforma érmét. Mennyi a valószínűsége, hogy mindegyiken fej vagy mindegyiken írás van?

3.5 9 golyót helyezünk el véletlenszerűen 4 dobozba. Mennyi annak valószínűsége, hogy minden dobozba legalább 2 golyó kerül?

3.6 *Egy dobozban* n *darab golyó van,* $1, 2, \dots, n$ *számokkal jelölve. Egyenként kihúzzuk az összes golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy*

a) az elsőt kivéve minden alkalommal nagyobb számú golyót húzunk ki, mint az előző volt?

b) a k*-val jelölt golyót éppen* k*-adiknak húzzuk ki?*

c) a k*-val jelölt golyót éppen* k*-adiknak, az* ℓ*-el jelölt golyót pedig éppen* ℓ*-ediknek húzzuk ki* $(k \neq \ell)$*?*

3.7 *Egy kör alakú asztalnál tízen vacsoráznak. Mennyi a valószínűsége, hogy két nő nem kerül egymás mellé, ha az asztalnál* 5 *férfi és* 5 *nő ül?*

3.8 Egy kerek asztalhoz n különböző magasságú ember ül le. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a legnagyobb és a legkisebb egymás mellé kerül?

3.9 *A magyar kártyacsomagból (négy szín: tök, makk, zöld, piros; színenként 8 lap) egyszerre három lapot kihúzva mennyi a valószínűsége, hogy nincs köztük zöld?*

3.10 Egy sötét helyiségben négy egyforma pár cipő össze van keverve. Négy darabot kiválasztva mennyi a valószínűsége, hogy a cipők között van legalább egy pár?

3.11 *Egy urnában 3 piros golyó van. Legalább hány fehér golyót kell hozzátenni, hogy a fehér golyó húzásának valószínűsége nagyobb legyen* 0.9*-nél?*

3.12 Egy urnában 6 piros, több fehér és fekete golyó van. Annak a valószínűsége, hogy egy golyót kihúzva az fehér vagy fekete golyó lesz: 3/5; hogy piros vagy fekete színű lesz: 2/3. Hány fehér és fekete golyó van az urnában?

3.13 Egy dobozba 20 darab törékeny tárgy van elcsomagolva. A tárgyak között 5 darabnak az értéke egyenként 1000 Ft, 4 darabé 2000 Ft, 7 darabé 5000 Ft, 4 darabé pedig egyenként 10000 Ft. Valaki leejti a csomagot és így négy tárgyat összetör. Mennyi a valószínűsége, hogy a kár összege 10000 Ft lesz? (Feltételezzük, hogy a tárgyak egymástól függetlenül törnek össze.)

3.14 *Egy urnában* 20 *piros és* 30 *fehér golyó van.* 10 *golyót választunk ki visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy*

- *a) mind a* 10 *piros?*
- *b)* 4 *piros,* 6 *fehér?*
- *c) legfeljebb egy piros?*

3.15 *Oldjuk meg az előző feladatot úgy, hogy a golyókat visszatevéssel húzzuk!*

3.16 100 alma közül 10 kukacos. Véletlenszerűen kiválasztva 5 almát, mennyi a valószínűsége, hogy lesz közöttük kukacos?

3.17 *Mennyi a valószínűsége, hogy egy szelvénnyel fogadva az ötös lottón legalább* 3 *találatunk lesz?*

3.18 Egy urnában 3 piros, 3 fehér és 3 zöld golyó van. Ezek közül hatot kiválasztva mennyi a valószínűsége, hogy lesz köztük mindhárom színű?

3.19 Mennyi a valószínűsége, hogy egy négytagú társaságban van két ember, akinek azonos napra esik a születésnapja (365 napot veszünk alapul)?

3.20 Egy hallgató 40 tétel közül húszat megtanult, húsz tételről viszont fogalma sincs. A vizsgán két tételt kell húznia és választhat, melyikből felel. Mennyi a sikeres vizsga valószínűsége?

4 Geometriai valószínűség

4.1 Egységnyi oldalhosszúságú, négyzet alakú céltáblára egy 1/2 egység sugarú kört rajzolunk. Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen rálőve a táblára (természetesen eltalálva) a találat ezen körön kívül éri azt?

4.2 *Egy egy méter hosszú botot egy véletlenszerűen elhelyezett csapással két részre törünk. Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott darabokból, valamint egy fél méter hosszú botból háromszög szerkeszthető?*

4.3 *Egy egy méter hosszú botot két véletlenszerűen elhelyezett csapással három részre törünk. Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott darabokból háromszög szerkeszthető?*

4.4 A $(0,1)$ intervallumon találomra felveszünk két pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek közelebb vannak egymáshoz, mint a 0 pontnak a hozzá közelebb eső ponttól való távolsága?

4.5 A $(0,1)$ intervallumot két találomra felvett pont segítségével három részre osztjuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kapott szakaszok mindegyike rövidebb mint 1/2?

4.6 *Véletlenszerűen felírunk két* 1*-nél kisebb pozitív számot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy összegük kisebb* 1*-nél, szorzatuk pedig kisebb* $\frac{2}{9}$*-nél?*

4.7 Véletlenszerűen felírunk két 1-nél kisebb pozitív számot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott számok mértani közepe kisebb, mint $1/2$?

4.8 *Egy kikötőbe a nap 24 órája alatt két hajó, A és B érkezik egymástól függetlenül, véletlen időpontokban. A munkások az A hajót 1, a B hajót 2 óra alatt tudják kirakodni. Az előbb érkező hajó kirakodását azonnal megkezdik. Amennyiben a másik hajó úgy érkezik, hogy a munkások az elsővel még nem végeztek, a később érkező hajó kénytelen várakozni. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egyik hajónak sem kell várnia?*

4.9 A $(-1,1)$ intervallumon találomra felveszünk két pontot, a koordinátáik legyenek α és β. Mennyi a valószínűsége, hogy az

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0$$

egyenlet gyökei valósak?

4.10 *A $(0,a)$ szakaszon véletlenszerűen elhelyezünk két pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a pontok origótól mért távolságának négyzetösszege a^2-nél nagyobb lesz?*

4.11 Egy egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán találomra választunk egy-egy pontot. Mekkora a valószínűsége, hogy ezek távolsága α-nál kisebb $(1 \le \alpha < \sqrt{2})$?

5 Feltételes valószínűség, Bayes tétel

5.1 *Mutassuk meg, hogy tetszőleges A és B események esetén, ahol $\mathsf{P}(B) > 0$ teljesül*

$$\mathsf{P}(\overline{A}\,|\,B) = 1 - \mathsf{P}(A\,|\,B)!$$

5.2 Tegyük fel, hogy $\mathsf{P}(B\,|\,A) > \mathsf{P}(B)$ és $\mathsf{P}(C\,|\,B) > \mathsf{P}(C)$. Következik-e ebből, hogy $\mathsf{P}(C\,|\,A) > \mathsf{P}(C)$?

5.3 *Legyen $\mathsf{P}(A) = 1/4$, $\mathsf{P}(A\,|\,B) = 1/4$ és $\mathsf{P}(B\,|\,A) = 1/2$. Számítsuk ki a $\mathsf{P}(A+B)$ és a $\mathsf{P}(\overline{A}\,|\,\overline{B})$ valószínűségeket!*

5.4 *Két kockával dobunk egyszerre. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7, feltéve, hogy az összeg páratlan?*

5.5 Két kockával dobunk egyszerre. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy hatost dobunk, ha a két dobás értéke különböző?

5.6 Egy szabályos dobókockával addig dobunk, míg először kapunk hatost. Feltéve, hogy a szükséges dobások száma páros, mennyi a valószínűsége, hogy csak kétszer kell dobnunk?

5.7 Ha egy kétgyermekes családnál tudjuk, hogy legalább az egyik gyerek lány, akkor mennyi a valószínűsége, hogy van fiú is a családban?

5.8 *Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találomra választunk két pontot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindkét pont a szakasznak egyik előre kijelölt végpontjához van közelebb, feltéve, hogy a választott pontok távolsága kisebb, mint* $1/2$*?*

5.9 Egy 5 piros és 5 fehér golyót tartalmazó urnából egymás után (visszatevés nélkül) kihúzunk 3 golyót. Feltéve, hogy az első két húzás eredménye ugyanaz, mennyi a valószínűsége, hogy a harmadik kihúzott golyó piros?

5.10 Egy asztalnál négyen kártyáznak. A 32 lapos magyar kártyát egyenlően szétosztják egymás között. Ha az egyik kiválasztott játékosnak nem jutott ász, mennyi a valószínűsége annak, hogy az utána következőnek sem jutott?

5.11 Ha egy n létszámú csoportban r véletlenül kiválasztott diáknak dolgozatot kell írni, mennyi annak a valószínűsége, hogy a legrosszabb diáknak is dolgozatot kell írni, feltéve, hogy a legjobb diák is ír dolgozatot?

5.12 Valamely vegyszerrel szúnyogirtást végeztek. Azt tapasztalták, hogy az első permetezésnél a szúnyogok 80%-a elpusztult, az életben maradottakban viszont annyi ellenálló képesség fejlődött ki, hogy a második permetezés már csak a szúnyogok 40%-át pusztítota el. A harmadik irtás már csak 20%-os hatékonyságú volt.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy szúnyog túlél három permetezést?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy egy szúnyog még két permetezést túlél, feltéve, hogy az elsőt túlélte?

5.13 Iszákos Iván a nap $2/3$ részét kocsmában tölti. Mivel a faluban 5 kocsma van, Iván pedig nem válogatós, azonos eséllyel tartózkodik bármelyikben. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük. Négy kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ötödikben ott lesz?

5.14 *Egy televíziós vetélkedőn a játékos három boríték közül választhat. Az elsőben 5 ,,Nem nyert", 3 ,,10000 Ft nyeremény" és 2 ,,50000 Ft nyeremény" feliratú cédula van. A második boríték tartalma: 2 ,,Nem nyert", 7 ,,10000 Ft nyeremény" és 1 ,,50000 Ft nyeremény" . A harmadik boríték csupa ,,Nem nyert" cédulát tartalmaz. A játékos véletlenszerűen választ egy borítékot, majd húz egy cédulát. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy nyer 50000 Ft-ot!*

5.15 *Anna és Béla a következő szabályok alapján játszik. Anna feldob egy kockát, majd két érmét annyiszor, amennyit a kocka mutat. Ha e dobások során legalább egyszer két fejet dob, akkor Béla fizet Annának 100 Ft-ot, ellenkező esetben Anna fizet Bélának ugyanennyit. Melyiküknek előnyös a játék (azaz nagyobb a nyerési esélye)?*

5.16 Az emberek négy vércsoport egyikébe tartoznak: 38%-uk A, 21%-uk B, 8%-uk AB, és 33%-uk 0 vércsoportos. Ha a beteg vércsoportja A, akkor A vagy 0 lehet a donor vércsoportja. Hasonlóan, ha a beteg vércsoportja B, akkor B vagy 0; ha AB, akkor bármely; ha 0, akkor 0 lehet a donor vércsoportja. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen érkező beteg egy véletlenszerűen kiválasztott donornak a vérét megkaphatja?

5.17 Egy asztalon hat darab hatlövetű revolver fekszik. Három revolver tárjában 1-1 lőszer van, kettő van 2-2 lőszerrel töltve, a hatodik tárjában pedig 3 lőszer van. Véletlenszerűen kiválasztunk egy revolvert és meghúzzuk a ravaszt. Mennyi a valószínűsége, hogy a fegyver elsül?

5.18 Tekintsük ez előző feladat revolvereit. Feltéve, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott revolver elsül, mennyi a valószínűsége, hogy nincs több lőszer a tárban?

5.19 *Valamely alkatrész gyártásával egy üzemben négy gép foglalkozik. Az első gép naponta* 200 *alkatrészt gyárt, a második* 320*-at, a harmadik* 270*-et, a negyedik* 210*-et. Az egyes gépeknél a selejtgyártás aránya rendre* 2%, 5%, 3% *és* 1%. *A kész alkatrészeket egy helyen gyűjtik. A gépek egy napi termeléséből kiveszünk egy alkatrészt, megvizsgáljuk, és jónak találjuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy azt a negyedik gép gyártotta?*

5.20 A Lódarázs Légitársaság Óperencián túli járatán D, E és F típusú repülőgépek teljesítenek szolgálatot, mindhárom típus 1/3 valószínűséggel. A D típuson hat, az E típuson négy, az F típuson három ülés van egy sorban (minden üléssorhoz két ablak melletti ülés tartozik), és az üléskiosztás az utasok számára teljesen véletlenszerűen történik. Feltéve, hogy ablak mellé szól a jegyem, mi a valószínűsége, hogy F típuson fogok repülni?

5.21 Két érmének van, egy szabályos és egy szabálytalan, melynél a fej valószínűsége kétszer akkora, mint az írásé. Kiválasztunk egyet a két érme közül egyenlő valószínűséggel és azt feldobjuk. Mennyi a valószínűsége, hogy a szabálytalan érmével dobunk, ha az eredmény fej lett?

5.22 Vándorlásai közben Odüsszeusz egy hármas útelágazáshoz ér. Az egyik út Athénbe, a másik Spártába, a harmadik Mükénébe vezet. Az athéniek kereskedő népség, szeretik ámítani a látogatókat, csak minden 3. alkalommal mondanak igazat. A mükénéiek egy fokkal jobbak: ők csak minden második alkalommal hazudnak. A szigorú spártai neveltetésnek köszönhetően a spártaiak becsületesek, ők mindig igazat mondanak. Odüsszeusznak gőze sincs, melyik út merre vezet, így a három út közül egyenlő valószínűséggel választ. Megérkezve a városba, megkérdez egy embert, mennyi 2×2, mire közlik vele, hogy 4. Mi a valószínűsége, hogy Odüsszeusz Athénba jutott?

5.23 Egy hivatásos szerencsejátékosnak olyan nyerő dobókockája van, mellyel 2/3 valószínűséggel lehet hatost dobni, míg a többi lehetőség egyformán 1/15 valószínűségű. Sürgősen szüksége lenne a kockára, de véletlenül még három szabályos kocka is van a zsebében, melyek látszólag persze ugyanolyanok, mint a nyerő kockája. Találomra kivesz egyet és feldobja, a dobott szám hatos lett. Mennyi a valószínűsége, hogy a nyerő kockát találta meg?

5.24 *Egy gépesített ügyintézéssel rendelkező irodában három gép dolgozik párhuzamosan, azonos típusú ügyiratok intézésén. Az első gép naponta* 10 *aktával végez, a második napi* 15*, a harmadik pedig napi* 25 *aktával. Hibásan kezelt ügyirat naponta átlagosan* 0.3, 0.9 *ill.* 0.5 *darab található az egyes gépek munkájában. Az összesített napi mennyiségből találomra kiveszünk egy példányt, s azt rossznak találjuk. Mekkora a valószínűsége, hogy azt az első gép készítette?*

5.25 Egy országban a taxik 10%-a zöld, 90%-a kék. Egy cserbenhagyásos baleset szemtanúja szerint a balesetet egy zöld taxi okozta. Később kiderült, hogy a tanú enyhén színtévesztő: a kék és a zöld közül a tényleges színt csak 85%-os arányban ismeri fel. Mennyi a valószínűsége, hogy a cserbenhagyó taxi tényleg zöld volt?

5.26 Tegyük fel, hogy valamely üzemből kikerülő áru 75%-a első osztályú. A kikerült termékeket vizsgálatnak vetik alá. Annak a valószínűsége, hogy a vizsgálat során egy első osztályú terméket nem első osztályúnak minősítenek 0.02. Annak a a valószínűsége viszont, hogy egy nem első osztályú terméket első osztályúnak minősítenek 0.05. Mennyi a valószínűsége, hogy egy olyan termék, amely első osztályú minősítést kapott, valóban első osztályú?

5.27 Egy bináris csatornán, melyet az ellenséges erők zavarnak, a leadott 0 jelek 2/5-e 1-é torzul, a leadott 1 jelek 1/3-a pedig 0-vá. A leadot jelek közül a 0-ák és 1-ek aránya 5 : 3.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy ha a vevő oldalon 0-t kaptak, akkor azt 0-ként is adták le?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a vevő oldalon 1-et kaptak?

5.28 Egy tesztrendszerű vizsgáztatásnál, ahol minden kérdéshez három válasz tartozik, melyeknek pontosan az egyike helyes, egy hallgató p valószínűséggel tudja a helyes választ. Ha nem tudja, akkor véletlenszerűen (1/3 valószínűséggel) választ a három megadott válasz közül. A vizsgalap átnézése után kiderül, hogy a megadott válasza helyes. Mennyi a valószínűsége, hogy nem csak tippelt, hanem tudta is a választ?

6 Független események valószínűsége

6.1 *Egy szabályos érmét feldobunk tízszer egymás után. Legyen A az az esemény, hogy van fej és írás is a dobások között, B pedig az az esemény, hogy legfeljebb egy írás van a dobások között. Független-e A és B?*

6.2 Egy dobozban 2 piros és 4 fekete golyó van. Visszatevés nélkül kiveszünk négy golyót. Jelentse A azt az eseményt, hogy az első kihúzott golyó fekete, B pedig azt, hogy az utolsónak kihúzott golyó fekete. Független-e A és B?

6.3 *Egy dobozban 1-től 8-ig számozott, 8 db papírlap van. Véletlenszerűen kiveszünk egy lapot. Az A, B és C események jelentése legyen:*

A: a kivett lapon páros szám áll;

B: 4-nél nem nagyobb szám áll;

C: a kihúzott szám 2, vagy 5-nél nagyobb.

Mutassuk meg, hogy

$$\mathsf{P}(A \cdot B \cdot C) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C)$$

és a három esemény mégsem független!

6.4 Egy urnában 4 egyforma papírlap van. Mindegyikre három számjegy van írva egymás mellé, mégpedig az elsőre $0, 0, 0$, a másodikra $0, 1, 1$, a harmadikra $1, 0, 1$, és a negyedikre $1, 1, 0$. Húzzunk ki egy lapot véletlenszerűen. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy egy olyan lapot húztunk, amelynek i-edik jegye 1-es, $i = 1, 2, 3$. Mutassuk meg, hogy az A_i, $i = 1, 2, 3$, események páronként függetlenek, együttesen azonban nem!

6.5 *Valaki két lottószelvényt tölt ki egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy nyer (azaz legalább két találata van)?*

6.6 A debreceni Csokonai Sörözőben a számlával együtt négy dobókockát is kihoznak, melyekkel háromszor dobhatunk. Ha legalább egyszer sikerül négy hatost dobni, akkor nyerünk egy 2000 Ft-os vásárlási utalványt. Számítsuk ki ennek a valószínűségét!

6.7 *Ketten felváltva lőnek egy céltáblára az első találatig. A kezdő találatának a valószínűsége* 0.2, *a másodiké* 0.3. *Mennyi a valószínűsége, hogy a kezdőé lesz az első találat?*

6.8 Tegyük fel, hogy valamely hír helyes átvételének valószínűsége 0.9. Hányadik hírvivőnél csökken a hír átvételének valószínűsége 1/2 alá?

6.9 *Az összes számjegyet egyenként felírjuk tíz lapra. A lapok közül találomra választunk egyet, megnézzük a rajta levő számjegyet majd visszatesszük. Legalább hányszor kell így húznunk, hogy* 0.9-*nél nagyobb valószínűséggel legyen a kihúzott számok között legalább egy páros szám?*

6.10 Egy 500 darabból álló árumennyiség 5%-a szépséghibás. Az átvevő az áru átvétele előtt abból 10 darabot kiválaszt, és megvizsgálja, majd e vizsgálatot a már megvizsgált darabok visszatevése után megismétli. A megrendelt menynyiséget csak akkor veszi át, ha mindkét próba csak hibátlan alkatrészeket tartalmaz. Mennyi a valószínűsége, hogy a megrendelt 500 darabos tételt átveszik?

6.11 Egy urnában fehér és piros golyók vannak. Visszatevéssel kihúzunk két golyót. Bizonyítsuk be, hogy legalább 0.5 annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók egyforma színűek!

6.12 Legyenek A, B és C független események, $\mathsf{P}(A) = 0.1$, $\mathsf{P}(B) = 0.2$ és $\mathsf{P}(C) = 0.3$ Mennyi a valószínűsége, hogy egynél több következik be az A, B és C események közül?

6.13 Egy tesztrendszerű vizsgánál minden vizsgázónak 20 kérdésre kell igennel vagy nemmel felelnie. Tegyük fel, hogy egy vizsgázó a kérdésre p valószínűséggel tudja a helyes választ, q valószínűséggel azt hiszi, hogy tudja a helyes választ, de téved, r valószínűséggel pedig nem tudja a helyes választ és ennek tudatában van $(p+q+r = 1)$. Ez utóbbi esetben azonos valószínűséggel ír be igent vagy nemet. Mennyi a valószínűsége, hogy a vizsgázó legalább 19 kérdésre helyesen válaszol?

7 Diszkrét valószínűségi változók

7.1 Az alábbi számsorozatok közül melyek alkotnak valószínűségi eloszlást?

a) $p^4,\ 4p^3q,\ 6p^2q^2,\ 4pq^3,\ q^4,\quad q = 1-p,\ 0 < p < 1;$

b) $p^kq^2,\quad q = 1-p,\ 0 < p < 1,\quad k = 1, 2, \ldots;$

c) $\big(k(k+1)\big)^{-1},\quad k = 1, 2, \ldots;$

d) $p^{k-n}q,\quad q = 1-p,\ 0 < p < 1,\quad k = n, n+1, \ldots.$

7.2 *Két kockával dobunk egyszerre. Írja fel a dobott számok maximumának és minimumának az eloszlását!*

7.3 Két kockával dobunk egyszerre. Írja fel a dobott számok különbsége abszolút értékének az eloszlását!

7.4 *Írja fel az ötös lottón kihúzott öt szám közül a legkisebb eloszlását!*

7.5 Két kosárlabdajátékos felváltva dob kosárra, amíg valamelyikük bele nem talál. A dobást kezdő 0.5, a másik 0.6 valószínűséggel talál egy-egy dobás alkalmával a kosárba. Írja fel a dobások számának (az utolsó, sikeres dobást is beleértve) az eloszlását!

7.6 Egy tanulási kísérletnél patkányoknak kell négy ajtó közül kiválasztani azt, amelyik mögött az ebédjük lapul. Minden helytelen választás után az adott patkányt visszateszik a kiindulási pontra, ahonnan újra próbálkozhat mindaddig, amíg megtalálja a helyes ajtót. Írjuk fel a szükséges próbálkozások számának eloszlását, ha

a) minden próbálkozásnál egyenlő valószínűséggel választ a négy ajtó közül;

b) minden próbálkozásnál egyenlő valószínűséggel választ az eddig még nem próbált ajtók közül;

c) két egymás utáni próbálkozásnál sohasem választja ugyanazt az ajtót, a maradék ajtók közül egyenlő valószínűséggel választ.

7.7 *Egy dobozban 1-től 22-ig számozott, 22 darab cédulát helyezünk el. Véletlenszerűen kihúzunk egy cédulát. A kihúzot szám két szempontból érdekel: a 2-vel és a 3-mal való oszthatóság szempontjából. A ξ valószínűségi változó legyen a 2-vel való osztás után kapott maradék, az η pedig a 3-mal való osztás maradéka. Írja fel a (ξ, η) együttes eloszlását és határozza meg a peremeloszlásokat!*

7.8 *A (ξ, η) együttes eloszlását a következő táblázat tartalmazza:*

$\xi\backslash\eta$	-1	0	1
-1	p	$3p$	$6p$
1	$5p$	$15p$	$30p$

a) Mekkora a p értéke?

b) Független-e ξ és η?

c) Írja fel a $\xi + \eta$ és a $\xi \cdot \eta$ eloszlását!

7.9 Legyen (ξ, η) eloszlása az előző példában megadott eloszlás. Számítsa ki az

a) $\mathsf{P}(\eta = i \,|\, \xi = -1) \quad (i = -1, 0, 1)$;

b) $\mathsf{P}(\eta < 1 \,|\, \xi = -1)$;

c) $\mathsf{P}(\eta \geq 0 \,|\, \xi = 1)$;

d) $\mathsf{P}(\xi = 1 \,|\, \eta \geq 0)$

valószínűségeket!

8 Diszkrét valószínűségi változók jellemzői

8.1 *Két kockával dobunk addig, míg valamelyiken hatost nem kapunk. Mekkora lesz a dobások várható száma, ha az utolsó dobást is beleszámítjuk?*

8.2 Két szabályos kockával dobva mennyi a dobott számok maximumának illetve minimumának várható értéke?

8.3 Egy szelvénnyel játszva az ötöslottón, melynek ára 200 Ft, mennyi lesz a várható nyereményünk, ha a kettes találat nyereménye 1200 Ft, a hármasé 16400 Ft, a négyesé 1050300 Ft, az ötösé pedig 1.888 millió Ft?

8.4 *Egy érmével dobunk. Ha az eredmény fej, akkor még kétszer dobunk, ha írás, még egyszer. Mennyi az összes fej dobások számának várható értéke?*

8.5 *Egy vak késdobáló $1/4$ valószínűséggel találja el a céltáblát és addig próbálkozik, amíg ez nem sikerül. Számítsa ki a szükséges próbálkozások számának várható értékét és szórását!*

8.6 Péter feldob egy kockát. Ha páratlan számot dob veszít 1 Ft-ot, ha hatost dob, nyer 4 Ft-ot, egyébként újra dobhat. A második dobásnál 1 Ft-ot nyer, ha párost dob, és 2 Ft-ot veszít, ha páratlant. Állapítsuk meg, a játék Péter számára előnyös, méltányos, vagy hátrányos, azaz Péter várható nyereménye pozitív, nulla vagy negatív! Mennyi Péter nyereményének szórásnégyzete?

8.7 *Egy részvény kiinduló ára egy peták. Egy év múlva vagy kétszeresére növekszik az ára, vagy felére csökken, vagy pedig változatlan marad – mindegyik lehetőség egyforma valószínűségű. A következő évben ugyanez történik, az előző évi változástól függetlenül. Mi két év múlva a részvényár eloszlása, mennyi a várható értéke és szórásnégyzete?*

8.8 A kosárlabdában bizonyos esetekben ,,1 plusz 1" büntetődobás jár a szabálytalanságot elszenvedő félnek. Ez azt jelenti, hogy a játékos kap egy szabaddobást, és ha ez sikeres, akkor még egyet. Tegyük fel, hogy a játékos egymástól függetlenül 0.6 valószínűséggel értékesíti a büntetőket. Adjuk meg a sikeres dobások számának eloszlását, várható értékét és szórását!

8.9 *Négy szabályos kockával dobva mennyi a dobott számok összegének várható értéke és szórása?*

8.10 Tíz játékos rúg büntetőt. Mennyi a gólok számának a várható értéke, ha mindegyik játékos kétszer rúg kapura és az egyes játékosok rendre $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ valószínűséggel rúgnak gólt?

8.11 Egy szabályos dobókockát feldobunk egymás után százszor. Tekintsük a páratlan értékű dobások összegét, és számítsuk ki ennek várható értékét és szórásnégyzetét!

8.12 Legyenek ξ és η független $(10, 0.4)$ és $(6, 0.5)$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változók. Adja meg $\xi + \xi \cdot \eta$ várható értékét és szórásnégyzetét!

8.13 Egy pont az x tengelyen bolyong, azaz az origóból kiindulva minden egyes lépésnél $1/2 - 1/2$ valószínűséggel lép egyet jobbra vagy egyet balra. Jelölje ξ a pontnak az origótól való távolságát az első négy lépés után. Mennyi a ξ szórása?

8.14 *A ξ valószínűségi változó lehetséges értékei: $-1,\ 0,\ 2,\ 3.$ Az ezekhez tartozó valószínűségek rendre: $1/12,\ 5/12,\ 1/4, 1/4.$ Számítsuk ki ξ^2 várható értékét és szórását!*

8.15 *Legyen ξ egy λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Határozza meg az $\eta = \frac{1}{1+\xi}$ valószínűségi változó várható értékét!*

8.16 Egy szabályos kockával 100-szor dobunk. Jelölje ξ az első 50 dobás során dobott 3-asok számát, η pedig a második 50 dobás során dobott páros számok számát. Határozzuk meg $\eta - \xi$ szórásnégyzetét!

8.17 Egy irodában a főnököt egy adott napon telefonon keresők száma λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. A titkárnő minden hívást a többitől függetlenül p valószínűséggel kapcsol be. Adja meg a bekapcsolt hívások számának eloszlását és várható értékét!

8.18 *Egy dobozban 4 jó, 3 hibás és 3 selejtes termék van. Egymás után, visszatevés nélkül kiveszünk két terméket. Jellemezze ξ az első húzás eredményét, mégpedig $\xi = 0$, ha selejteset húzunk, $\xi = 1$, ha hibásat, $\xi = 2$, ha jót. Jellemezze η a második húzás eredményét ugyanúgy.*

a) Független-e ξ és η?

b) Mekkora a ξ szórása?

8.19 Egy dobozban 9 cédula van, rajtuk az 11, 12, 12, 22, 23, 23, 31, 31, 33 számok. Találomra kihúzunk egy cédulát, ξ jelentse ennek első, η pedig a második számjegyét. Független-e ξ és η? Adja meg $\xi \cdot \eta$ eloszlását, valamint a ξ és η kovarianciáját!

8.20 *A (ξ, η) lehetséges értékeit a $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,4)$, $(4,0)$ pontok által meghatározott négyzet belsejében lévő egész koordinátájú pontok alkotják. A (ξ, η) ezeket a pontokat egyenlő valószínűséggel veszi fel – a négyzet középpontja kivételével, amely négyszer akkora valószínűséggel következik be, mint a többi. Számítsuk ki ξ és η kovarianciáját! Független-e ξ és η?*

8.21 Két szabályos pénzérme mindegyikének egyik oldalára nullát, másikra pedig egyest írunk. A két érmét feldobjuk. Jelölje ξ a dobott számok összegét, η pedig a dobott számok szorzatát. Független-e ξ és η? Számítsuk ki ξ és η korrelációs együtthatóját!

8.22 Anna és Béla a következő játékot játssza. Feldobnak egy szabályos kockát. Ha a dobott szám 1, akkor Anna nyer, ha 6, akkor Béla, különben egyik fél sem. Jelentse a ξ illetve az η valószínűségi változó azt, hogy két játék után hányszor nyer Anna illetve Béla.

a) Adja meg a ξ és η együttes eloszlását!

b) Mennyi $\xi + \eta$ szórása és ξ és η korrelációs együtthatója?

8.23 Egy szabályos kockával n-szer dobunk. A ξ valószínűségi változó jelentse a dobott hatosok, az η pedig a dobott páratlan számok számát. Független-e ξ és η? Számítsa ki ξ és η korrelációs együtthatóját!

8.24 *Jelölje ξ és η két független kockadobás eredményét. Határozza meg ξ és $\zeta := \max\{\xi, \eta\}$ korrelációs együtthatóját!*

8.25 Legyenek ξ és η független, λ illetve μ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változók és legyen $\zeta := \xi + \eta$. Számítsa ki ξ és ζ korrelációs együtthatóját!

8.26 Legyenek ξ_1, ξ_2 és ξ_3 független, λ_1, λ_2 illetve λ_3 paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változók és legyen $\eta_1 := \xi_1 + \xi_2$ valamint $\eta_2 := \xi_2 + \xi_3$. Mennyi η_1 és η_2 kovarianciája?

8.27 Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Visszatevés nélkül kihúzunk 20 golyót. Számítsa ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét!

9 Valószínűségi változók általános fogalma

9.1 *Két kockával dobunk egyszerre. Írja fel és ábrázolja a dobott számok összegének eloszlásfüggvényét!*

9.2 Egy terráriumban két lajhár él, melyek egymástól függetlenül az időnek $\frac{1}{2}$-ed, illetve $\frac{1}{3}$-ad részében alszanak. Jelölje ξ az ébren levő lajhárok számát látogatásunk időpontjában. Írja fel a ξ eloszlásfüggvényét!

9.3 *Vizsgálja meg, az alábbi függvények közül melyik lehet eloszlásfüggvény és melyik nem?*

a) $F(x) := \begin{cases} 0, & \textit{ha } x < 1/2, \\ \frac{x-1}{x+1}, & \textit{ha } x \geq 1/2; \end{cases}$

b) $F(x) := \begin{cases} 0, & \textit{ha } x < 1, \\ \frac{x-1}{x+1}, & \textit{ha } x \geq 1; \end{cases}$

c) $F(x) := \begin{cases} 0, & \textit{ha } \ x < 1, \\ \frac{2x-1}{x+1}, & \textit{ha } \ x \geq 1; \end{cases}$

d) $F(x) := \begin{cases} 0, & \textit{ha } \ x < 0, \\ \frac{x^3}{1+x^2}, & \textit{ha } \ x \geq 0; \end{cases}$

e) $F(x) := \begin{cases} 0, & \textit{ha } \ x \leq 0, \\ 1 - \frac{1-e^{-x}}{x}, & \textit{ha } \ x > 0. \end{cases}$

9.4 Milyen α és β értékekre lesz eloszlásfüggvény az

$$F(x) := e^{-\beta e^{-\alpha x}}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

függvény?

9.5 *Határozza meg a $[0,1]$ intervallum két véletlenszerűen kiválasztott pontja távolságának eloszlásfüggvényét! Mennyi a valószínűsége, hogy ez a távolság az $[1/2, 3/4]$ intervallumba esik?*

9.6 Válasszunk az egységnégyzetben egy pontot véletlenszerűen. Jelölje ξ a pontnak a négyzet legközelebbi oldalától vett távolságát. Írja fel a ξ eloszlásfüggvényét! Adja meg a $\mathsf{P}(\xi \geq 1/8)$ valószínűséget!

9.7 Egy egységnyi sugarú, kör alakú céltáblára lövések érkeznek. Tegyük fel, hogy minden lövés a céltáblába talál és hogy a találat helye egyenletes eloszlású a céltáblán. Jelölje ξ a találat helyének távolságát a céltábla középpontjától. Adja meg a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!

9.8 Egy egységnyi oldalú, négyzet alakú céltáblára lövések érkeznek. Tegyük fel, hogy minden lövés a céltáblába talál és hogy a találat helye egyenletes eloszlású a céltáblán. Jelölje ξ a találat helyének távolságát a céltábla bal alsó sarkától. Adja meg a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!

9.9 *Ledobunk egy pontot véletlenszerűen a $[0,2]$ intervallumra. Valaki felírja a ledobott pont helyét egy jegyzőkönyvbe, ha a ledobott pont a $[0,1]$ intervallumba esik, és a 0 értéket írja be, ha ez a pont az $(1,2]$ intervallumba esik. Jelölje η a jegyzőkönyvbe írt szám értékét. Adja meg az η valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!*

10 Abszolút folytonos valószínűségi változók

10.1 *Egy két méter hosszú botot egy véletlenszerűen elhelyezett csapással kettétörünk. Határozza meg a rövidebb darab hosszának eloszlás- és sűrűségfüggvényét!*

10.2 A $(0,a)$ szakaszon véletlenszerűen (egyenletes eloszlást feltételezve) kiválasztunk egy pontot. Jelölje ξ e pontnak a szakasz középpontjától való (nemnegatív) távolságát. Írja fel a ξ eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

10.3 A $(0, a)$ szakaszon véletlenszerűen (egyenletes eloszlást feltételezve) kiválasztunk egy pontot, majd az $(a, 2a)$ szakaszon, szintén véletlenszerűen egy másikat. Jelölje ξ a két kiválasztott pont távolságát.

a) Írja fel a ξ eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

b) Mekkora a valószínűsége, hogy a két pont távolsága $a/2$-nél kisebb?

10.4 *Az alábbi függvények közül melyek sűrűségfüggvények?*

a) $f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{2}, & \textit{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \textit{egyébként;} \end{cases}$

b) $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \textit{ha } x > 1, \\ 0, & \textit{egyébként;} \end{cases}$

c) $f(x) := \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R};$

d) $f(x) := \begin{cases} \frac{x}{x+1}, & \textit{ha } x > 0, \\ 0, & \textit{egyébként;} \end{cases}$

e) $f(x) := \begin{cases} 4x^3 e^{-x^4}, & \textit{ha } x > 0, \\ 0, & \textit{egyébként;} \end{cases}$

f) $f(x) := \dfrac{1}{2} e^{-|x|}, \qquad x \in \mathbb{R};$

g) $f(x) := \begin{cases} -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1-e^{-x}}{x^2}, & \textit{ha } x > 0, \\ 0, & \textit{egyébként.} \end{cases}$

10.5 *Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{ha } x < 2, \\ \frac{A}{(1-x)^2}, & \textit{ha } x \geq 2. \end{cases}$$

a) Mekkora az A érték?

b) Mennyi a $\mathsf{P}\big(2 < \xi < 3\big)$ valószínűség?

c) Írja fel a ξ eloszlásfüggvényét!

10.6 Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} A \cos \frac{x}{2}, & \text{ha } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

a) Mekkora az A érték?

b) Mennyi a $\mathsf{P}\big(\xi > \frac{\pi}{2}\big)$ valószínűség?

c) Írja fe a ξ eloszlásfüggvényét!

10.7 Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 2, \\ \frac{A}{x^3}, & \text{ha } x > 2. \end{cases}$$

a) Mekkora az A érték?

b) Milyen q értéknél adódik $\mathsf{P}(\xi \ge q) = 1/2$?

c) Írja fel a ξ eloszlásfüggvényét!

10.8 Az x tengely $[0,1]$ intervallumán véletlenszerűen kiválasztunk egy pontot. Jelölje ξ a pont távolságát a koordinátarendszer $(0,1)$ pontjától. Írja fel a ξ eloszlásfüggvényét!

10.9 *Legyen ξ egyenletes eloszlású az (a,b) intervallumon. Határozza meg $\eta := 2\xi + 1$ eloszlás- és sűrűségfüggvényét!*

10.10 Legyen ξ λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozza meg $\eta := 2\xi + 3$ eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

10.11 *Legyen ξ egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon. Határozza meg $\eta := \xi^2$ sűrűségfüggvényét!*

10.12 Legyen ξ egyenletes eloszlású a $(-1,1)$ intervallumon. Határozza meg $\eta := \xi^2$ sűrűségfüggvényét!

10.13 Legyen ξ λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozza meg $\eta := \xi^3$ sűrűségfüggvényét!

10.14 *Legyen ξ λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozza meg $\eta := \sqrt{\xi}$ sűrűségfüggvényét!*

11 Többdimenziós eloszlások, függetlenség

11.1 *A (ξ, η) eloszlásfüggvénye a következő:*

$$F(x,y) := \begin{cases} 1 + e^{-x-y} - e^{-x} - e^{-y}, & \textit{ha } x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \textit{egyébként.} \end{cases}$$

a) Határozza meg a ξ és η perem-eloszlásfüggvényét!

b) Független-e ξ és η?

c) Számítsa ki a $\mathsf{P}(\xi < 1, \eta < 1)$ valószínűséget!

11.2 A (ξ, η) eloszlásfüggvénye a következő:

$$F(x,y) := \begin{cases} \min\left\{(1 - e^{-x}), (1 - e^{-y})\right\}, & \text{ha } x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

a) Határozza meg a ξ és η perem-eloszlásfüggvényét!

b) Független-e ξ és η?

11.3 Számítsa ki a $\mathsf{P}\big(\xi < 1, \eta < 1\big)$ és $\mathsf{P}\big(\xi < 1, \eta \geq 3/2\big)$ valószínűségeket, ha (ξ,η) együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) := \begin{cases} e^{-x-y}, & x>0,\ y>0, \\ 0, & \text{különben!} \end{cases}$$

11.4 A (ξ,η) sűrűségfüggvénye legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{4}{5}(x+xy+y), & \text{ha } 0<x<1,\ 0<y<1, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

a) Írja fel a perem-sűrűségfüggvényeket!

b) Független-e ξ és η?

c) Határozza meg a $\mathsf{P}\big(\xi < 1/2, \eta < 1/2\big)$ és a $\mathsf{P}\big(\xi < 1/2, \eta \geq 1/4\big)$ valószínűségeket!

11.5 *A (ξ,η) sűrűségfüggvénye legyen*

$$f(x,y) := \begin{cases} A\Big(x+\frac{y}{2}\Big), & \text{ha } 0<x<1,\ 0<y<2, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

a) Mekkora az A értéke?

b) Írja fel a perem-sűrűségfüggvényeket!

c) Független-e ξ és η?

11.6 Határozza meg, hogy az A milyen értéke mellett lehet az

$$f(x,y) := x^2 + Ay^2$$

függvény a $(0<x<1;\ 0<y<2)$ tartományban egy (ξ,η) kétdimenziós eloszlás sűrűségfüggvénye! Írja fel a ξ és η peremsűrűségét is!

11.7 *Legyen a (ξ,η) együttes sűrűségfüggvénye*

$$f(x,y) := \begin{cases} A, & 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

a) Mekkora az A értéke?

b) Írja fel a perem-sűrűségfüggvényeket!

c) Független-e ξ és η?

11.8 Legyen a (ξ, η) együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) := \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2(1-x), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

a) Írja fel a perem-sűrűségfüggvényeket!

b) Független-e ξ és η?

c) Írja fel a $\mathsf{P}\big(\xi < x,\, 1 < \eta < 3/2\big)$ valószínűséget, mint az x változó függvényét!

12 Abszolút folytonos valószínűségi változók jellemzői

12.1 *Számítsa ki a következő sűrűségfüggvényekkel jellemzett eloszlások várható értékét és szórását!*

a) $f(x) := \begin{cases} |x|, & ha\ \ -1 \le x \le 1, \\ 0, & máskor; \end{cases}$

b) $f(x) := \dfrac{1}{2} e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R};$

c) $f(x) := \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-x^2/2}, & ha\ \ x > 0, \\ 0, & ha\ \ x \le 0; \end{cases}$

d) $f(x) := \begin{cases} \frac{3}{x^4}, & ha\ \ x > 1, \\ 0, & ha\ \ x \le 1. \end{cases}$

12.2 Igazolja, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} \frac{2}{x^3}, & \text{ha } \ x > 1, \\ 0, & \text{ha } \ x \le 1 \end{cases}$$

sűrűségfüggvényű valószínűségi változónak létezik várható értéke, de szórása nem!

12.3 *Legyen ξ egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon. Számítsa ki $\eta = \xi^2$ várható értékét és szórását!*

12.4 Legyen ξ egyenletes eloszlású a $[-a, a]$ intervallumon. Számítsa ki $\eta = |\xi|$ várható értékét!

12.5 Legyen ξ exponenciális eloszlású, melynek várható értéke 2. Számítsa ki $\eta = \xi^2$ várható értékét és szórását!

12.6 *Két pontot választunk véletlenszerűen egy egységnyi hosszúságú szakaszon. Határozza meg a két pont távolságának várható értékét és szórását!*

12.7 Válasszunk az egységnégyzetben egy pontot véletlenszerűen. Jelölje ξ a pontnak a négyzet legközelebbi oldalától vett távolságát. Számítsa ki a ξ várható értékét és szórását!

12.8 *A* (ξ, η) *kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását jellemezze az*

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{6}{5}\big(x + y^2\big), & \textit{ha} \ \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1, \\ 0, & \textit{különben} \end{cases}$$

sűrűségfüggvény.

a) Határozza meg a ξ *és* η *korrelációs együtthatóját!*

b) Független-e ξ *és* η*?*

12.9 A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását jellemezze az

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{4}\big(1 + xy(x^2 - y^2)\big), & \text{ha} \ \ |x| \le 1, \ |y| \le 1, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

sűrűségfüggvény.

a) Határozza meg a ξ és η korrelációs együtthatóját!

b) Független-e ξ és η?

12.10 *Legyen* (ξ, η) *egyenletes eloszlású a* $(0,0)$, $(2,0)$ *és* $(2,1)$ *pontok által meghatározott háromszögben. Határozza meg* ξ *és* η *korrelációs együtthatóját!*

12.11 Legyen (ξ, η) egyenletes eloszlású a $(0,0)$, $(0,1)$ és $(1,0)$ pontok által meghatározott háromszögben. Határozza meg ξ és η korrelációs együtthatóját!

12.12 Legyen a (ξ, η) együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) := \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 2(1 - x), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozza meg a ξ és η korrelációs együtthatóját!

12.13 A (ξ, η) sűrűségfüggvénye legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} A\Big(x + y\Big), & \text{ha} \ \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

a) Mekkora az A értéke?

b) Írja fel a perem-sűrűségfüggvényeket!

c) Független-e ξ és η?

d) Határozza meg a ξ és η korrelációs együtthatóját!

12.14 A (ξ, η) sűrűségfüggvénye legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} A\Big(x^2 + y^2\Big), & \text{ha} \ \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

a) Mekkora az A értéke?

b) Írja fel a perem-sűrűségfüggvényeket!

c) Független-e ξ és η?

d) Határozza meg a ξ és η korrelációs együtthatóját!

13 Nevezetes abszolút folytonos eloszlások

Egyenletes eloszlás

13.1 A ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó, és $\mathsf{E}\xi = \mathsf{D}^2\xi = 4.$ Írja fel a ξ eloszlásfüggvényét!

13.2 *A ξ egyenletes eloszlású az $(a, 5)$ intervallumon. Ismeretes, hogy*

$$\mathsf{P}\big(\xi \geq \mathsf{E}(\xi^2 - 2\xi + 1)\big) = \frac{1}{6}.$$

Mekkora a $\mathsf{P}\big(\xi \leq \mathsf{E}(\xi - 1)\big)$ valószínűség?

13.3 Legyen ξ egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy a ξ olyan értéket vesz fel, amelynek első tizedesjegye 2-es?

b) Mekkora a valószínűsége, hogy a ξ által felvett érték második tizedesjegye 2-es?

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a k-adik tizedesjegy lesz 2-es?

13.4 A ξ egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon, ahol az a és b értékeket nem ismerjük. Tudjuk viszont, hogy a $(2, 5)$ intervallum teljes egészében az (a, b) intervallumon fekszik és

$$\mathsf{P}(2 \leq \xi \leq 5) = \frac{1}{3}.$$

a) Mekkora a $\mathsf{P}(3 \leq \xi \leq 5)$ valószínűség?

b) Mekkora lehet az a minimális és a b maximális értéke?

c) Adott feltételek mellett milyen becslést adhatunk a $\mathsf{P}(1 \leq \xi \leq 3)$ valószínűségre?

Normális eloszlás

13.5 *Egy repülőgép pilótájával közlik a 100 m magasságú légifolyosó közepének földtől vett távolságát. A repülőgép repülési magasságának ettől való eltérése egy normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 20 m, szórása pedig 50 m. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a repülőgép a légifolyosó alatt, a légifolyosóban, illetve a légifolyosó felett halad!*

13.6 Egy csomagológép 1 kilogrammos zacskókat tölt. A zacskóba töltött cukor mennyisége normális eloszlású valószínűségi változó 1 kg várható értékkel és 32 gramm szórással. A zacskó súlyra nézve első osztályú, ha tömege 0.95 kg és 1.05 kg közé esik.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott zacskó első osztályú?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy két véletlenszerűen kiválasztott zacskó közül legalább az egyik első osztályú?

13.7 *Legyen* ξ *normális eloszlású* $m = 3$ *és* $\sigma = 2$ *paraméterekkel. Mekkora legyen az* A *szám, ha azt akarjuk, hogy a* ξ *a* $(2, A)$ *intervallumba legalább* $1/2$ *valószínűséggel essen?*

13.8 Egy fafeldolgozó üzemben deszkákat készítenek. A deszkák hossza normális eloszlású 400 cm várható értékkel és 3 cm szórással.

a) A deszkák hányad része lesz 398 cm-nél hosszabb és 401 cm-nél rövidebb?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a deszkák hossza a várható értéktől legfeljebb 2.5 cm-rel tér el?

13.9 Egy löveg tüzel egy 1200 méter távoli célpontra. A lőtávolság ingadozása az 1200 m körül normális eloszlású 40 m szórással. Hatásosnak tekinthető egy lövés, ha a találat a célhoz 50 m-nél közelebb esik. A lövések hány százaléka lesz hatástalan?

13.10 Valamely gép 15 mm átmérőjű alkatrészeket gyárt 0.5 mm szórással. Normális eloszlásúnak tekintve a legyártott alkatrész átmérőjét, mekkora valószínűséggel gyárt a gép a névleges érték 5%-ánál nagyobb eltérésű alkatrészt?

13.11 *Valamely szolgáltató vállalathoz a naponta beérkező megrendelések* ξ *száma normális eloszlásúnak tekinthető* $\sigma = 10$ *szórással. Mekkora a megrendelések várható értéke, ha tudjuk, hogy*

$$\mathsf{P}(\xi < 20) = 0.1\,?$$

13.12 Az Alsóbezgenyei lámpagyárban kompakt fénycsöveket gyártanak. A csövek élettartama a tapasztalatok szerint normális eloszlású 1170 óra várható értékkel és 100 óra szórással. A gyár a fénycsövekre garanciát vállal. Hány órás működésre adjon a gyár garanciát, ha legfeljebb 5% garanciaigényt akar kielégíteni?

Exponenciális eloszlás

13.13 *Annak a valószínűsége, hogy egy benzinkútnál a tankolásra* 6 *percnél tovább kell várni a tapasztalatok szerint* 0.1*. Feltéve, hogy a várakozási idő hossza exponenciális eloszlású, mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen a benzinkúthoz érkezve* 3 *percen belül sorra kerülünk?*

13.14 Egy plazma televízió élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó 9 év átlagos élettartammal. Adja meg azt a legnagyobb K számot, melyre igaz, hogy a tv legalább 0.9 valószínűséggel működőképes lesz K évig!

13.15 *Egy telefonfülke előtt állunk és várjuk, hogy az előttünk beszélő befejezze a beszélgetést. Az illető véletlentől függő ideig beszél, a percben mért beszélgetési idejének sűrűségfüggvénye* $\frac{1}{3}e^{-x/3}$, $x > 0$.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a beszélgetés 3 *percnél tovább tart?*

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a beszélgetés további 3 *percnél tovább tart, feltéve, hogy az előttünk álló már több mint* 3 *perce beszél?*

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a beszélgetés $t+3$ *percnél tovább tart, feltéve, hogy az előttünk álló már több mint* t *percet beszélt?*

13.16 Legyenek ξ és η független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Határozza meg a $\min\{\xi, \eta\}$ sűrűségfüggvényét!

13.17 Egy szövőgép 400 szállal dolgozik. Az egyes szálak élettartama, vagyis az az idő, ameddig a szál el nem szakad exponenciális eloszlású, minden szálra 150 óra várható értékkel. Feltételezve, hogy a szálak egymástól függetlenek, mennyi a valószínűsége, hogy a gép fonalszakadás miatt a megindulástól számított 3 órán belül megáll?

14 Abszolút folytonos eloszlások konvolúciója

14.1 Legyenek ξ és η független, $\lambda > 0$ és $\mu > 0$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Határozza meg a $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét!

14.2 Legyenek ξ és η független, a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Határozza meg a $\xi + \eta$ eloszlását!

14.3 *Legyen* ξ *és* η *két független, a* $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ *intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Határozza meg* $\xi + \eta$ *sűrűségfüggvényét!*

14.4 Legyenek ξ és η független, a $[0, 1]$ illetve a $[2, 4]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Határozza meg a $\xi + \eta$ eloszlását!

14.5 Véletlenszerűen kiválasztunk egy pontot a $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ és $(1, 0)$ csúcsok által meghatározott négyzet belsejéből. Jelölje ξ a pontnak az x és az y tengelytől való távolságainak az összegét! Adja meg ξ eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

14.6 Két egy-egy méter hosszúságú botot véletlenszerűen eltörünk, majd a két rövidebb darabot összeragasztjuk. Írja fel az így kapott új bot hosszának eloszlását!

14.7 *Legyenek* ξ *és* η *független valószínűségi változók, a közös sűrűségfüggvényük* $f(x) := e^{-|x|}/2$, $x \in \mathbb{R}$. *Határozza meg a* $\xi + \eta$ *eloszlását!*

14.8 Legyenek ξ és η független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Határozza meg a $\xi + \eta$ eloszlását!

14.9 Legyenek ξ és η független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Igazolja, hogy $\xi^2 + \eta^2$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = \frac{1}{2}$ paraméterrel!

15 Csebisev egyenlőtlenség, a nagy számok törvénye, központi határeloszlás tétel

15.1 *Egy forgalmas pályaudvaron meghatározott időben egy újságárus által egy óra alatt eladott újságok* ξ *száma Poisson eloszlású* $\lambda = 64$ *várható értékkel. Adjon alsó becslést a*

$$\mathsf{P}(48 < \xi < 80)$$

valószínűségre!

15.2 Az Édes Élet Cukorgyárban a nagyipari kiszerelésű kristálycukros zacskókat egy automata gép tölti. Az egyes zacskókba töltött cukor mennyisége egy valószínűségi változó, melynek várható értéke 5 kg, szórása 10 gramm. Legfeljebb mekkora a valószínűsége, hogy egy csomagban a cukor mennyisége a várható értéktől 50 grammnál többel tér el?

15.3 Egy húsüzemben a turista szalámi rudak hosszának várható értéke 35 cm, szórása 0.3 cm. Legfeljebb mennyi annak a valószínűsége, hogy egy rúd szalámi hossza legalább 1 cm-rel eltér a várható értékétől?

15.4 *Egy gyufagyárban a dobozokat automata gép tölti. Az egyes dobozokban lévő gyufaszálak száma egy* ξ *valószínűségi változó, amelynek eloszlása a tapasztalatok szerint a következő:*

darabszám	47	48	49	50	51	52	53
valószínűség	0.05	0.10	0.15	0.40	0.15	0.10	0.05

a) A Csebisev egyenlőtlenség segítségével adjon becslést a $\mathsf{P}(48 < \xi < 52)$ *valószínűségre!*

b) Az eloszlás alapján számítsa ki a fenti valószínűség pontos értékét!

15.5 Hány dobást kell végeznünk egy szabályos érmével, hogy a fej dobás valószínűségét a kapott relatív gyakoriság legalább 0.9 valószínűséggel 1/20-nál kisebb hibával megközelítse?

15.6 *Hányszor kell egy szabályos kockát feldobnunk, hogy a hatos dobás valószínűségét az esemény relatív gyakorisága legalább* 0.8 *valószínűséggel* 0.1*-nél kisebb hibával megközelítse?*

15.7 *Hányszor kell egy cinkelt dobókockát feldobnunk, hogy a hatos dobás valószínűségét (mely nem feltétlenül* 1/6*) az esemény relatív gyakorisága legalább* 0.8 *valószínűséggel* 0.1*-nél kisebb hibával megközelítse?*

15.8 Valamely társadalmi rétegben meg akarjuk határozni a szeszfogyasztók arányát. Hány megfigyelést kell végezni ahhoz, hogy a megfigyelésekből adódó arány a valódi aránytól 95%-os valószínűséggel legfeljebb 0.01-dal térjen el?

15.9 A gyártmányok 10%-a hibás. A minőségellenőrzés csak akkor talál elfogadhatónak egy tételt, ha ebben legfeljebb 12% a hibás termék. Mekkora legyen egy-egy tételben a gyártmányok darabszáma, hogy a hibás termékek relatív gyakorisága a megfelelő valószínűségtől legalább 0.95 valószínűséggel ne térjen el 0.02-nél nagyobb értékkel?

15.10 *Egy urnában fehér és fekete golyók vannak. Annak a valószínűsége, hogy fehér golyót húzunk* 0.7. *Mennyi a valószínűsége, hogy* 1000 *visszatevéssel húzott golyó között a fehér golyók száma* 680 *és* 720 *közé esik? Oldja meg a feladatot normális közelítéssel is!*

15.11 Egy szabályos pénzérmét 200-szor feldobva mennyi a valószínűsége, hogy a fejdobások száma 95 és 105 közé esik?

15.12 *Egy szabályos dobókockát* 300 *alkalommal feldobva milyen határok közé fog esni* 95%*-os biztonsággal a hatos dobások száma?*

15.13 Egy célpontra 200 lövést adnal le egymástól függetlenül. A találat valószínűsége minden egyes lövésnél 0.4. Milyen határok közé fog esni 90%-os biztonsággal a találatok száma?

15.14 A 2000. évben az elnökválasztáson az Egyesült Államok Florida államában rendkívül szoros eredmény született. 5 000 000 választó választott a republikánus és demokrata párt jelöltje között. A két jelölt által szerzett szavazatok száma közötti eltérés (egy adott időpontbeli felmérés szerint) mindössze 300 volt. Tegyük fel, hogy a választók egymástól függetlenül $1/2$ valószínűséggel választották valamelyik párt jelöltjét. E feltevés teljesülése esetén mi annak a valószínűsége, hogy a két jelölt által összegyűjtött szavazatok különbsége nem haladja meg a háromszázat?

15.15 Egy szabályos dobókockát 1200 alkalommal dobunk fel egymástól függetlenül, és összeadjuk a páros értékű dobások eredményét. Adjon jó közelítő becslés annak a valószínűségére, hogy ez az összeg 2280 és 2500 közé esik!

16 A statisztika alapfogalmai, paraméteres próbák

16.1 *Az Ezt idd teát* 200 *grammos dobozokban árulják. A Fogyasztóvédelmi Felügyelőség lemérte öt véletlenszerűen kiválasztott teásdoboz tömegét, melyekre az alábbi grammban kifejezett értékek adódtak:*

$$196,\ 202,\ 198,\ 197,\ 190.$$

Határozza meg a mintaátlagot, a szórás torzítatlan becslését, valamint rajzolja fel a minta empirikus eloszlásfüggvényét!

16.2 Egy, a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású véletlenszám generátor az alábbi 8 számot generálta.

$$0.18,\ 0.57,\ 0.82,\ 0.55,\ 0.63,\ 0.12,\ 0.91,\ 0.31.$$

Határozza meg a mintaátlagot, a szórás torzítatlan becslését, valamint rajzolja fel a minta empirikus eloszlásfüggvényét és a tényleges eloszlásfüggvényt!

16.3 *Egy ötelemű minta esetén a mintaelemek összege* 155, *a mintaelemek négyzeteinek összege* 4837. *Határozza meg a mintaátlagot és a szórás torzítatlan becslését!*

16.4 *Egy teherautórakománnyi félliteres üdítőitalból* 10 *palackot véletlenszerűen kiválasztva és lemérve azok űrtartalmát az alábbi, milliliterben kifejezett értékeket kaptuk:*

$$499,\ 525,\ 498,\ 503,\ 501,\ 497,\ 493,\ 496,\ 500,\ 495.$$

Ismert, hogy a palackokba töltött üdítőital mennyisége normális eloszlású 3 *ml szórással. 95%-os döntési szintet használva vizsgálja meg a gyártó azon állítását, hogy a palackokba átlagosan fél liter üdítőitalt töltöttek!*

16.5 Az *Ezt idd* teát 200 grammos dobozokban árulják, a csomagológép szórása 4 gramm. A Fogyasztóvédelmi Felügyelőség lemérte öt véletlenszerűen kiválasztott teásdoboz tömegét, melyekre az alábbi grammban kifejezett értékek adódtak:

$$196,\ 202,\ 198,\ 197,\ 190.$$

Hipotéziseit pontosan megfogalmazva és feltételezve, hogy a teásdobozok tömege normális eloszlást követ, döntsön 98%-os szinten, hogy az átlagos töltőtömeg tényleg 200 gramm, avagy kevesebb annál!

16.6 Egy kiterjedt népegészségügyi vizsgálat során megállapították, hogy az egészséges felnőtt populáció esetén a diasztolés (alsó) vérnyomás értékek átlaga 84.8 higanymilliméter, szórása pedig 12.8 higanymilliméter. Az Alsóbezgenyei Atlétikai Klub hat véletlenszerűen kiválasztott versenyzőjénél a klub sportorvosa az alábbi diasztolés értékeket jegyezte fel:

$$79.2,\ 64.6,\ 86.8,\ 73.7,\ 74.9,\ 62.3.$$

a) A sportorvos ezek alapján úgy gondolta, hogy az atléták átlagos diasztolés vérnyomása alacsonyabb, mint 84.8. Feltételezve, hogy az atléták diasztolés vérnyomása normális eloszlást követ, szórása pedig megegyezik a teljes populációra kapott értékkel (12.8 higanymilliméter), döntsön 95%-os szinten, igaza van-e a doktornak!

Az Alsóbezgenyei Sakk Klub versenyzői szintén meglátogatták a fent említett doktort, aki az ő esetükben is feljegyezte hat véletlenszerűen kiválasztott sportoló diasztolés vérnyomás értékét, melyek az alábbiak:

$$84.6,\ 93.2,\ 104.6,\ 106.7,\ 76.3,\ 78.2.$$

b) Hipotéziseit pontosan megfogalmazva döntsön 95%-os szinten, hogy a sakkozók átlagos diasztolés vérnyomása magasabb-e, mint az atlétáké! A sakkozók diasztolés vérnyomásáról szintén feltehetjük, hogy normális eloszlást követ, szórása pedig megegyezik a teljes népesség körében mért értékkel.

16.7 Adott két független minta 0.0012 szórású normális eloszlásból. Az egyik, 9 elemű minta realizációjának átlaga 0.1672, a másik 16 elemű pedig 0.1683. Elfogadható-e 92%-os szinten, hogy a két sokaság várható értéke megegyezik?

16.8 *Egy gabonaraktárban* 60 *kg-os kiszerelésben búzát csomagolnak. A havi minőségellenőrzés során azt is meg akarták vizsgálni, hogy a raktárból kikerülő zsákokban tényleg* 60 *kg búza van-e, ezért lemértek tíz darab véletlenül kiválasztott zsákot. Eredményül a következőket kapták:*

$$60.2,\ 63.4,\ 58.8,\ 63.6,\ 64.7,\ 62.5,\ 66.0,\ 59.1,\ 65.1,\ 62.0.$$

Hipotéziseit és az adatokra vonatkozó feltételeit pontosan megfogalmazva döntsön 95%*-os szinten, a zsákok átlagos töltőtömege tényleg* 60 *kg-e!*

16.9 Egy üzem gyártósorán az egyik szerelési feladatra megadott szintidő 9 perc. Az e ponton dolgozó alkalmazottak már több kérvényben kérték a szintidő felemelését, mivel véleményük szerint az nem elegendő a feladat elvégzésére.

Az üzem vezetősége egy ellenőrt küldött ki, aki 12 véletlenszerűen kiválasztott alkalommal megmérte a feladat elvégzéséhez szükséges időt. Az eredmények az alábbiak:

$$9.4,\ 8.8,\ 9.3,\ 9.1,\ 9.4,\ 8.9,\ 9.3,\ 9.2,\ 9.6,\ 9.3,\ 9.3,\ 9.1.$$

Hipotéziseit és az adatokra vonatkozó feltételeit pontosan megfogalmazva döntsön 99%-os szinten, igazuk van-e a munkásoknak!

16.10 Az atlétikai világbajnokságon résztvevő kokszföldi csapat néhány versenyzője arra panaszkodott, hogy a leadott doppingtesztjeiket nem megfelelően analizálták és az egyik szernek túlságosan magas koncentrációját mutatták ki, minek következtében a versenybíróság törölte az eredményeiket. A Kokszföldi Atlétikai Szövetség a laboratóriumot tesztelendő nyolc mintát küldött, melyek mindegyikében a kérdéses anyag koncentrációja pontosan 0.500 g/l volt. A laboratórium az alábbi eredményeket szolgáltatta:

$$0.485,\ 0.518,\ 0.460,\ 0.530,\ 0.560,\ 0.550,\ 0.490,\ 0.575.$$

A laboratórium mérési hibáját normálisnak tételezve fel döntsön 95%-os szinten, igazuk van-e az atlétáknak!

16.11 *Az Árelhajlásvizsgáló Hivatal össze akarta hasonlítani két konkurens hipermarketlánc élelmiszer árait. E célból véletlenszerűen kiválasztottak tíz árucikket és megvizsgálták azok árát. A kapott eredményeket e következő táblázat tartalmazza:*

Árucikk	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Lerablos (Ft)	232	79	188	56	49	46	19	37	33	19
Dedrága (Ft)	216	74	208	52	42	49	18	31	38	17

Az árkülönbségeket normális eloszlásúnak tételezve fel döntsön 95%*-os szinten, van-e eltérés a két hipermarket élelmiszereinek árszintje között!*

16.12 A Mindent Tudás Egyeteme másodéves informatikus hallgatói két zárthelyi dolgozatot írtak statisztikából. Az alábbi táblázat tíz véletlenszerűen kiválasztott hallgató eredményeit tartalmazza:

Hallgató	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
I. dolgozat	57	63	67	82	45	65	53	32	51	27
II. dolgozat	53	62	63	80	46	64	44	28	50	29

A dolgozateredmények eltérését normális eloszlásúnak tételezve fel döntsön 95%-os szinten, van-e különbség a két dolgozat nehézségi foka között!

16.13 A fodrászok láthatatlan jövedelmének becslése céljából tíz véletlenszerűen kiválasztott fodrász bevallott heti borravalójának függvényében a vendégkör véleménye alapján megbecsülték a tényleges borravaló nagyságát. A minta adatai a következőek:

Fodrász	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Bevallott (eFt/hét)	4.0	2.0	3.5	5.0	1.8	6.0	2.8	1.5	3.9	4.4
Tényleges (eFt/hét)	9.0	5.3	6.0	9.8	4.3	10.1	5.9	4.2	9.4	10.5

A be nem vallott borravaló eloszlását normálisnak tételezve fel vizsgálja meg 98%-os szinten azt a hipotézist, hogy a fodrászok hetente átlagosan 5000 Ft-nál több borravalót nem vallanak be!

16.14 *Kétfajta instant kávé oldódási idejét tesztelték, melyekből minden alkalommal azonos mennyiséget tettek 1 dl forrásban lévő vízbe. A kísérletek eredményeit az alábbi táblázat tartalmazza:*

Kávé	*Oldódási idő (másodperc)*							
Mokka Makka	*8.2*	*5.0*	*6.8*	*6.7*	*5.8*	*7.3*	*6.4*	*7.8*
Koffe In	*5.1*	*4.3*	*3.4*	*3.7*	*6.1*	*4.7*		

a) *Az oldódási időket normálisnak tételezve fel* 95%*-os szinten igazoljuk, hogy nincs különbség az oldódási idők szórása között!*

b) *Az a) pontbeli szinten vizsgáljuk meg azt az állítást, hogy a Mokka Makka kávé lassabban oldódik, mint a Koffe In!*

16.15 A Hörömpő Cirkusz (világszám!) bolha szekciójának vezető (és egyben egyedüli) artistája, Lajoska messze földön híres távolugró tudományáról. Minden egyes előadásnak van egy olyan pontja, amikor Lajoska helyből távolugrik. Az alábbi táblázat 12 délutáni és 10 délelőtti előadás ugrásának centiméteben mért adatait adja meg (az ugrások hosszát normális eloszlásúnak tekinthetjük).

Kávé	Ugrott távolság (cm)											
Délután	53	59	63	67	60	57	73	65	58	68	62	71
Délelőtt	61	52	47	51	58	64	60	55	49	53		

Hipotéziseit pontosan megfogalmazva vizsgálja meg az állítást, miszerint Lajoska délután virgoncabb és nagyobbakat ugrik, mint délelőtt! Döntsön 99%-os szinten!

16.16 Az angliai New Dumber golflabdagyárában egy újfajta golflabda borítást fejlesztettek ki. A tesztek azt mutatták, hogy ez az új borítás jóval ellenállóbb, mint a hagyományos. Felmerült azonban a kérdés hogy az új borítás nem változtatja-e meg az átlagos ütéstávolságot. Ennek eldöntésére 42 labdát próbáltak ki, 26 hagyományosat és 16 labdát az újak közül. A labdákat géppel lőtték ki, elkerülve ezzel az emberi tényező okozta szóródást. A yardban mért ütéstávolságok összesítő adatait, mely távolságokat mindkét esetben normális eloszlásúnak tételezzük fel, az alábbi táblázat tartalmazza:

Borítás	Mintaelemszám	Mintaátlag	Korrigált empirikus szórásnégyzet
Hagyományos	26	271.4	35.58
Új	16	268.7	48.47

a) 90%-os szinten igazolja, hogy nincs különbség az ütéstávolságok szórása között!

b) Az a) pontbeli szinten vizsgálja meg, hogy az új borítás megváltoztatja-e az átlagos ütéstávolságot!

16.17 Az albán autóklub megvizsgálta a Lada Borscs és a Skoda Sztrapacska személygépkocsik fogyasztását (liter/100km), melyekről feltehető, hogy normális eloszlást követnek azonos szórással. A vizsgálat eredményeit az alábbi táblázat tartalmazza:

Autótípus	Mintaelemszám	Mintaátlag	Korr. emp. szórás
Lada Borscs	12	8.4806	1.0703
Skoda Sztrapacska	15	7.3799	0.8967

Hipotéziseit szabatosan megfogalmazva döntsön 95%-os szinten, hogy megegyezik-e a két típus átlagos fogyasztása!

16.18 A Felsődörgicsei Sátorcövekgyár kilenc véletlenszerűen kiválasztott termékének hosszából számolt korrigált tapasztalati szórásnégyzet 63 mm^2. A konkurens Alsódörgicsei Cövek és Póznagyárban gyártott tizenhárom ugyancsak véletlenszerűen kiválasztott cövek esetén ez az érték 225 mm^2.

a) Döntsön 90%-os szinten, van-e különbség a különböző gyárakból származó cövekek szórása között!

b) Milyen, az adatokra vonatkozó feltételekre van szükség, hogy az előző pontbeli hipotézisvizsgálat végrehajtható legyen?

17 Khi-négyzet próbák

17.1 *Egy újonnan kifejlesztett müzli ötféle magot (A, B, C, D és E) tartalmaz, melyek százalékos megoszlása a terméken lévő tájékoztató szerint 35%, 25%, 20%, 10%, illetve 10%. Egy véletlenül kiválasztott zacskóban az alábbi mennyiségi megoszlást találtuk:*

Összetevő	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
Szem (darab)	*184*	*145*	*100*	*68*	*63*

Döntsön 90%*-os szinten, hogy a minta összetétele megfelel-e a csomagoláson feltüntetettnek!*

17.2 Egy számítógép segítségével 12 darab, a $[-6, 6]$ intervallumon vett egyenletes eloszlásból származó véletlen számot generáltunk, majd ezt még 99 alkalommal megismételtük. A száz darab mintaátlag eloszlását az alábbi táblázatban összesítettük:

	Megfigyelt gyakoriság
$(-\infty, -0.6745)$	26
$[-0.6745, 0)$	21
$[0, 0.6745)$	27
$[0.6745, \infty)$	26

Vizsgálja meg 95%-os szinten azt a hipotézist, hogy a mintaátlagok a négy felsorolt intervallum mindegyikébe azonos valószínűséggel esnek!

17.3 *Egy másodéves mérnök informatikus hallgatónak házi feladatként egy olyan programot kellett írnia, mely egyenletes eloszlás szerint generál véletlen számokat az* $1, 2, \ldots, 15$ *halmazból. Jelölje* X *az első hárommal osztható szám megjelenéséig generált véletlen számok számát (beleértve az utolsó hárommal osztható számot is). Ha a véletlenszám generátor jól működik, akkor* X *geometriai eloszlású, azaz*

$$\mathsf{P}(X = \ell) = p(1-p)^{\ell-1}, \qquad \ell = 1, 2, \ldots,$$

ahol p *annak a valószínűsége, hogy a generált szám osztható hárommal, vagyis* $p = 1/3$. *Az alábbi táblázat az* X *változó* 160 *megfigyelt értékét tartalmazza:*

A generált egészek száma (x)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*>8*
Gyakoriság (k)	*63*	*34*	*28*	*13*	*9*	*7*	*2*	*4*	*0*

a) Számítsa ki a mintaátlagot!

b) Döntsön 95%*-os szinten arról, hogy a minta a* $p = 1/3$ *paraméterű geometriai eloszlásból származik-e!*

c) Döntsön 90%*-os szinten arról, hogy a minta egyáltalán geometriai eloszlásból származik-e!*

17.4 Egy biológus megvizsgálta azt az elméletet miszerint egy bizonyos rovarfaj napban kifejezett élettartama a $[0, 20]$ intervallumon vett egyenletes eloszlással modellezhető. A kutatásai során kapott adatokat az alábbi táblázat összesíti:

Élettartam (a legközelebbi egész napra kerekítve)	0–2	3–5	6–10	11–20
Rovarok száma	38	53	75	112

a) Vizsgálja meg, a kapott élettartamak eloszlása tényleg megfelel-e az elmélet által meghatározottnak! Döntsön 95%-os szinten!

A kutató azt is megfigyelte, hogy az általa vizsgált rovarok egyike sem élt tovább 16 napnál. Úgy döntött tehát, hogy új elméletet állít fel, miszerint az élettartamot a $[0, 16]$ intervallumon vett egyenletes eloszlás modellezi.

b) Döntsön 95%-os szinten, vajon az adatok alátámasztják-e ezt az elméletet!

17.5 Egy botanikus hallgató úgy gondolta, hogy egy bizonyos növényfajta a füves réteken véletlenszerűen szétszórt helyeken bukkan fel. Kutatásai során megszámolta a növény egy véletlenszerűen kiválasztott egy négyzetméteres négyzetben (kvadráns) előforduló egyedeinek a számát, majd-e kísérletet többször is megismételte. Az így kapott megfigyeléseit az alábbi táblázatban összegezte:

A növények száma	0	1	2	3	4	5	6	legalább 7
Gyakoriság	9	24	43	34	21	15	2	0

a) Az adatokból számítsa ki a vizsgált növény egyedeinek egy négyzetméterre eső átlagos számát!

A szakkönyvek szerint a fenti jellegű megfigyelési eredmények Poisson eloszlással modellezhetők.

b) Döntsön 95%-os szinten, vajon a Poisson modell megfelelően illeszkedik-e a hallgató által kapott adatokra!

17.6 *Egy kutatócsoport azt vizsgálta, van-e összefüggés egy bizonyos betegség lefolyásának súlyossága és a betegek életkora között. A vizsgálat során* 200 *beteg adatait gyűjtötték össze, majd azokat csoportosították a betegség súlyossági foka és a páciens életkora szerint. Eredményül az alábbi táblázatot kapták:*

		Életkor		
		40 alatti	*40–60*	*60 fölötti*
Lefolyás	*enyhe*	*41*	*34*	*9*
	közepes	*25*	*25*	*12*
	súlyos	*6*	*33*	*15*

Hipotéziseit pontosan megfogalmazva döntsön 99%-os szinten, van-e összefüggés a betegek életkora és a betegség lefolyásának súlyossága között!

17.7 A Szvázifölldi Gyáriparosok Szövetségének elnöke egy interjúban a vállalatvezetők véleményéről beszélt abban a kérdésben, hogy Szváziföld csatlakozzon-e az Európai Unióhoz. A nyilatkozó azt állította, az integráció támogatottsága függ attól, hogy az illető vezető mekkora vállalat élén áll. Az elnök állítását ellenőrizendő egy közvéleménykutató cég kikérte közel háromszáz véletlenszerűen kiválasztott vállalat első emberének véleményét a kérdésről. Az eredményeket az alábbi táblázat tartalmazza.

	A vállalat mérete		
	Nagy	Közepes	Kicsi
Támogatja	13	24	76
Ellenzi	7	26	143

a) Döntsön 99%-os szinten, hogy az adatok alátámasztják-e a Szövetség elnökének állítását!

A későbbi adatelemzések során kiderült, hogy az egyik kérdezőbiztos hibázott, mivel egy vállalatot kifelejtett az összesítésből. Így azon közepes méretű vállalatok száma, melyek vezetője támogatja a csatlakozást 25-re módosult.

b) Az újabb adatot felhasználva döntsön ismét 99%-os szinten!

Irodalom

[1] Baran, Sándor, *Feladatok a hipotézisvizsgálat témaköréből.* mobiDIÁK Könyvtár, Debreceni Egyetem, 2005. `http:// mobidiak.inf.unideb.hu.`

[2] Bognár Jánosné (szerk.), *Valószínűségszámítás feladatgyűjtemény.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.

[3] Denkinger Géza, *Valószínűségszámítási gyakorlatok.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1995.

[4] Fazekas István (szerk.), *Bevezetés a matematikai statisztikába.* Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2000.

[5] Keresztély Tibor, Sugár András, Szarvas Beatrix, *Statisztika közgazdászoknak.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.

[6] Nagy Márta, Sztrik János, *Valószínűségszámítás és matematikai statisztika feladatgyűjtemény.* KLTE Debrecen, 1992.

[7] *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1995.

[8] Solt György, *Valószínűségszámítás.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1993.

[9] B. A. Szevasztyanov, V. P. Csisztyakov, A. M. Zubkov, *Valószínűségelméleti feladatok.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.

Néhány feladatot az alábbi kollégáktól kölcsönöztem

[10] Arató Miklós, ELTE TTK, Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék, `www.cs.elte.hu/~arato/`

[11] Csiszár Villő, ELTE TTK, Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék, `www.cs.elte.hu/~villo/`

[12] Major Péter, MTA Rényi Alfréd Kutatóintézet, `www.renyi.hu/~major/`

[13] Szabados Tamás, BMGE Matematikai Intézet, Sztochasztika Tanszék, `www.math.bme.hu/~szabados/`