

In [21]: `pkg load symbolic`

Laplace

Egy f függvényhez egy másik, vele szoros kapcsolatban levő $\mathcal{L}[f]$ fv-t rendel:

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad s > 0$$

Jelölés:

f, g, h függvény esetén a rövidebb F, G, H jelölést alkalmazom a Laplace transzformáltra.

Szabályok:

Parciális integrálás alkalmazásával igazolhatóak.

	$f(t)$	\leftrightarrow	$F(s)$	
0	0	\leftrightarrow	0	
1	1	\leftrightarrow	$\frac{1}{s}$	
2	h'	\leftrightarrow	$\frac{s\mathcal{L}[h](s) - h(0)}{sH(s) - h(0)}$	$(H = \mathcal{L}[h])$
2a	h''	\leftrightarrow	$\frac{s^2\mathcal{L}[h](s) - sh(0) - h'(0)}{s^2H(s) - sh(0) - h'(0)}$	$(H = \mathcal{L}[h])$
3	t^n	\leftrightarrow	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	
4	$\cos(at)$	\leftrightarrow	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	
5	$\sin(at)$	\leftrightarrow	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	
6	$f(t)e^{at}$	\leftrightarrow	$F(s - a)$	$(F = \mathcal{L}[f])$
7	$f + \alpha g$	\leftrightarrow	$F + \alpha G$	
8	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	\leftrightarrow	$\frac{1}{s^n}$	3
9	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}$	\leftrightarrow	$\frac{1}{(s+a)^n}$	3, 6

Feladatok:

(a linearitás mindig kihasználjuk)

$$1. f(t) = 3 \cos(2t) + e^{-t}.$$

$$F(s) = 3 \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s+1} \quad (4,6)$$

$$2. f(t) = 4t - 2 + e^{2t}.$$

$$F(s) = 4 \frac{1}{s^2} - 2 \frac{1}{s} + \frac{1}{s-2} \quad (3,6)$$

$$3. f(t) = e^{-t} \cos(t).$$

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} \quad (4,6)$$

$$4. f(t) = e^t t.$$

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)^2} \quad (3,6)$$

$$5. F(s) = \frac{1}{2s^2} - \frac{2}{s}.$$

$$f(t) = \frac{1}{2}t - 2 \cdot 1 \quad (8)$$

$$6. F(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{2s}{s^2+4}.$$

$$f(t) = e^{-2t} + 2 \cos(2t) \quad (9,4)$$

$$7. F(s) = \frac{3}{s^3} - \frac{1}{(s-1)^4}.$$

$$f(t) = 3 \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} e^t \quad (8,9)$$

$$8. F(s) = \frac{10}{s^3+7s^2+10s}.$$

A nevező: $s(s+2)(s+5)$ alakú, ezért:

$$\frac{10}{s^3+7s^2+10s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+5}$$

alakba írjuk F -et. Szorozzunk fel s^3+7s^2+10s -vel:

$$10 = A(s+2)(s+5) + Bs(s+5) + Cs(s+2)$$

$$10 = 10A + s(7A+5B+2C) + s^2(A+B+C)$$

azaz $A = 1$ és:

$$7 + 5B + 2C = 0$$

$$1 + B + C = 0$$

$$\text{amiből: } 5 + 3B = 0 \quad B = -\frac{5}{3} \quad C = \frac{2}{3}.$$

$$f(t) = 1 - \frac{5}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-5t}$$

$$9. F(s) = \frac{2}{s(s+3)}.$$

$$\frac{2}{s(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3}$$

```
In [22]: % inverz Laplace
syms s
ilaplace(1/(s^2*(s^2+1)))

ans = (sym) t - sin(t)
```

```
In [23]: syms t
laplace(t-sin(t))
```

```
ans = (sym)
```

$$\frac{1}{s^4 + s^2}$$