

Intuitív áttekintés

- Euler azonosság:

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (\text{Eulerid})$$

- $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n \quad n \text{ egész}$

- $\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$

- $\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$

- komplex integrál valós intervallumon:

$$\int_a^b A(t) + iB(t)dt = \int_a^b A(t)dt + i \int_a^b B(t)dt \quad (\text{compint})$$

•

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \quad n \text{ egész} \\ 2\pi & n = 0 \end{cases} \quad (\text{trigint})$$

- Dirichlet feltételek: [wiki](#)

Együtthatók Legyen f egy 2π periodikus valós függvény, keressük a $c_n \in \mathbb{C}$ számokat, melyekkel

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

e^{-imt} -vel szorozva és integrálva:

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-imt} dt \quad (m \in \mathbb{Z})$$

Klasszikus alak:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$

Összevetve $m > 0$ -ra:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(a_m + \frac{b_m}{i} \right) &= c_m \\ \frac{1}{2} \left(a_m - \frac{b_m}{i} \right) &= c_{-m} \\ a_m &= c_m + c_{-m} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(mt) dt \\ b_m &= i(c_m - c_{-m}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(mt) dt \end{aligned}$$

Tulajdonságok:

- c_m és c_{-m} konjugáltak
- Ha f páros, akkor $b_m = 0$
- Ha f páratlan, akkor $a_m = 0$
- $e_m(t) = e^{imt}$ jelöléssel és a $(a, b) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} a(t)\overline{b(t)}dt}{2\pi}$ belső szorzattal az f FS -ának együtthatói az $\{e_m\}$ ortonormált rendszerbeli koordináták:

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f, e_n) e_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n$$

- érvényes a Parseval azonosság:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (\text{Parseval})$$

Jelölés: FS = Fourier-sor

Megjegyzés Egy véges intervallumon definiált függvény esetén az \mathbb{R} -re való periodikus kiterjesztésére gondolunk.

Feladatok

1. Feladat Számoljuk ki a következő függvény FS -át:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq t < 0 \\ 0 & t=0 \\ 1 & 0 < t \leq \pi \end{cases} \quad (\text{negyszög})$$

Megoldás f páratlan, így $c_0 = a_m = 0$.

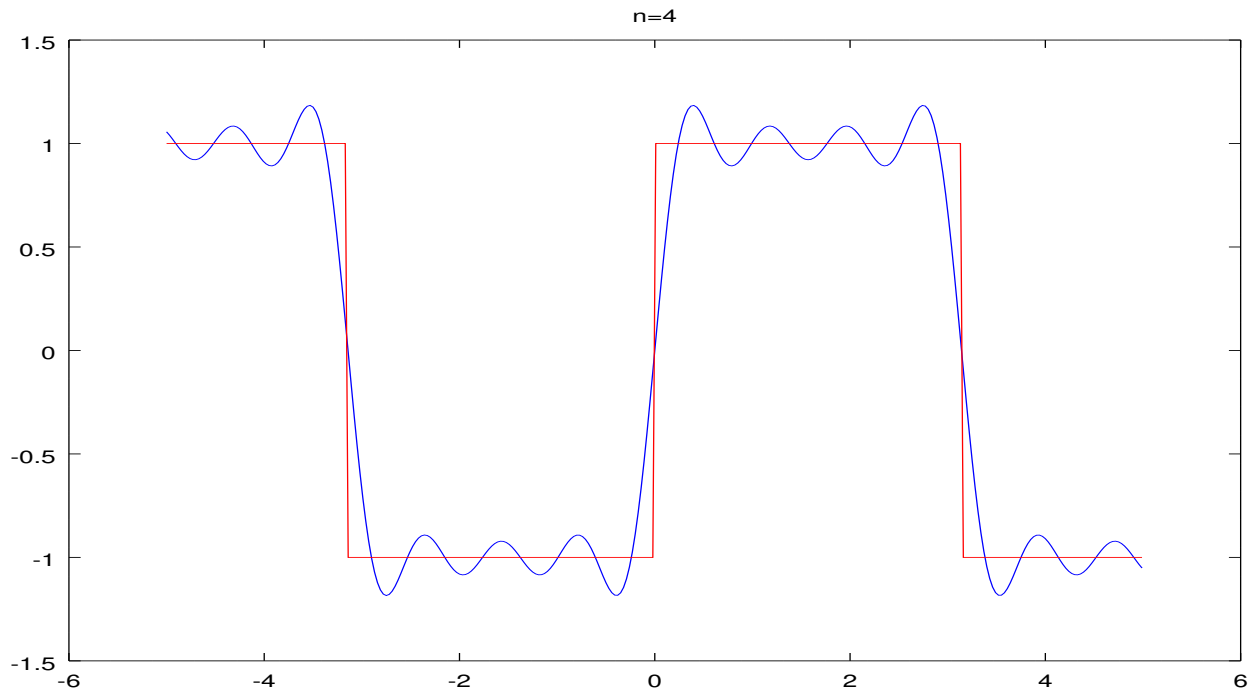
$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(mt) dt = \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(mt) dt &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\cos(m\pi)}{m} - \frac{-\cos(m0)}{m} \right) = \\ &= \frac{2}{m\pi} (1 - (-1)^m) \end{aligned}$$

Ha m páros $b_m = 0$.

$$\begin{aligned} b_{2m-1} &= \frac{4}{(2m-1)\pi} \\ f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)t)}{2n-1} \end{aligned}$$

2. Feladat Ábrázoljuk a (negyszög) függvényt és FS -ának részletösszegét néhány tagig.

Megoldás [negyszog.m](#)



3. Feladat Milyen kapcsolat van a [negyszog](#) és g között?

$$g(t) = \begin{cases} a & A \leq t < \frac{A+B}{2} \\ \frac{a+b}{2} & t = \frac{A+B}{2} \\ b & \frac{A+B}{2} < t \leq B \end{cases}$$

adott $a < b$, $A < B$ valósak esetén.

Megoldás Az $[A, B]$ intervallum $[-\pi, \pi]$ -be "vihető" a $\varphi(t) = -\pi + \frac{2\pi}{B-A}(t-A)$ belső transzformációval. Az $f(\varphi(t))$ már jó helyen van. Az értékeit a $\phi(t) = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$ átalakítással állítjuk be. Tehát $g(t) = \phi(f(\varphi(t)))$.

4. Példa

$$g(t) = \begin{cases} 1 & 2 \leq t < 5 \\ 3 & t = 5 \\ 5 & 5 < t \leq 8 \end{cases} \quad (\text{transz})$$

esetén a FS :

$$3 + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)\left(\frac{2\pi}{3}t - \pi\right))}{(2n-1)}$$

Megjegyzés Ez utóbbi összeg nem FS a definíció szerint.

5. Feladat Győződjünk meg program segítségével a [transz](#)-beli átalakítás helyességéről.

Megoldás A [negyszog](#)-nél használt programot átalakítva: [transz.m](#)

6. Feladat Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} = \frac{\pi}{4}$$

Megoldás Induljunk ki a $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ -ből (f a **(negyszög)**-beli).

7. Feladat Számoljuk ki a következő függvény FS -át:

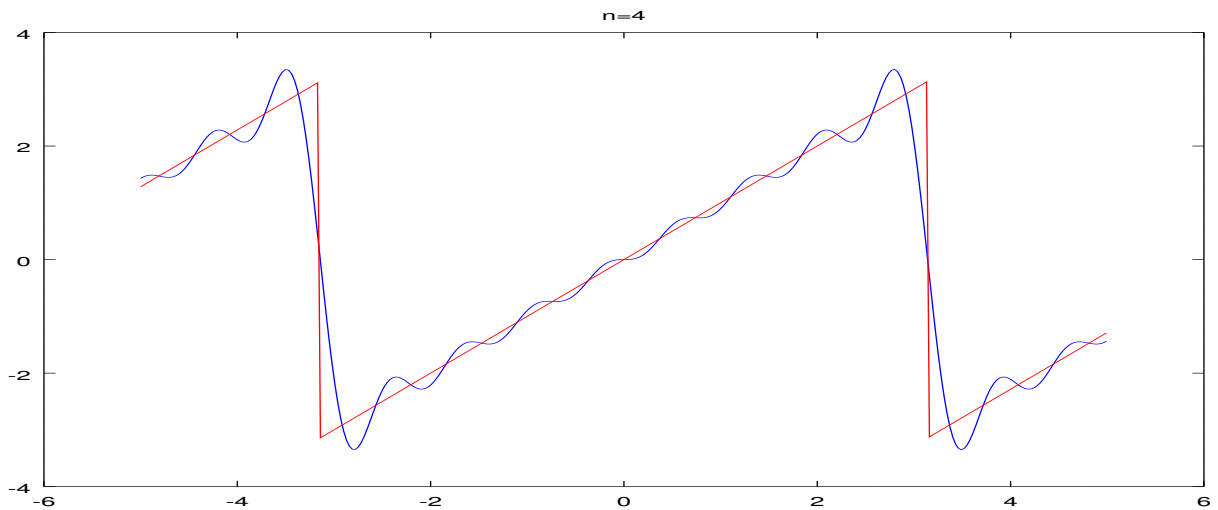
$$f(t) = t, \quad t \in [-\pi, \pi] \quad (\text{saw})$$

Megoldás f páratlan, így $c_0 = a_m = 0$.

$$\begin{aligned} \pi b_m &= \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(mt) dt = \\ &= \frac{\pi(-\cos(m\pi)) - (-\pi)(-\cos(-m\pi))}{m} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos(mt)}{m} dt = \frac{2\pi(-1)^m}{m} - 0 \\ f(t) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(nt)}{n} \end{aligned}$$

8. Feladat Ábrázoljuk a **(saw)** függvényt és FS -ának részletösszegét néhány tagig.

Megoldás **saw.m**



9. Feladat Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{recn2})$$

Megoldás Írjuk fel a (saw)-ra a (Parsevalid)-et:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3} \right) = \frac{\pi^2}{3} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

10. Feladat Számoljuk ki a következő függvény FS -át:

$$f(t) = |t|, \quad t \in [-\pi, \pi] \quad (\text{absz})$$

Megoldás f páros, így $b_m = 0$.

$$\begin{aligned} 2\pi c_0 &= \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = \pi^2 \quad c_0 = \frac{\pi}{2} \\ \pi a_m &= 2 \int_0^{\pi} t \cos(mt) dt = 0 - 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin(mt)}{m} dt = \\ &= \frac{2}{m^2} (\cos(m\pi) - \cos(m0)) = \frac{2}{m^2} ((-1)^m - 1) \\ a_{2m-1} &= -\frac{4}{(2m-1)^2} \\ f(t) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2m-1)t)}{(2m-1)^2} \end{aligned}$$

11. Feladat Ábrázoljuk a (absz) függvényt és FS -ának részletösszegét néhány tagig.

Megoldás absz.m

