

## Emlékeztető

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$$

$$\int_a^b A(t) + iB(t) dt = \int_a^b A(t) dt + i \int_a^b B(t) dt$$

## Jelölés

$FT$  = Fourier-transzformált

## Feladatok

**1. Feladat** Számoljuk ki a következő függvény  $FT$ -jét:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

## Megoldás

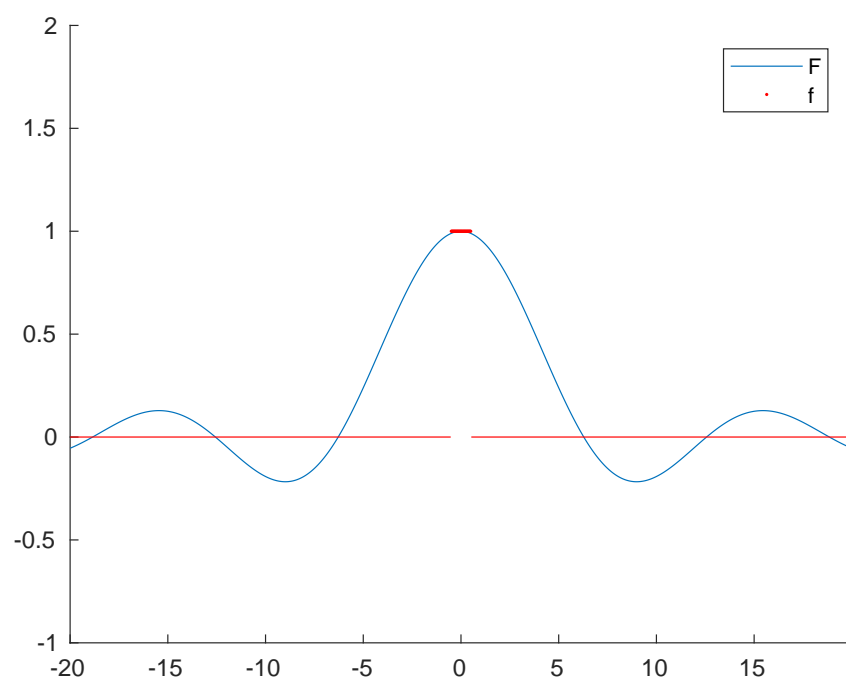
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt &\stackrel{1.}{=} \int_{-0.5}^{0.5} e^{-i\omega t} dt \stackrel{2.}{=} \int_{-0.5}^{0.5} \cos(-\omega t) dt \stackrel{3.}{=} \\ &\stackrel{3.}{=} 2 \int_0^{0.5} \cos(\omega t) dt \stackrel{4.}{=} 2 \left[ \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]_0^{0.5} \stackrel{4.}{=} \frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}} \end{aligned}$$

## Magyarázat

1. definíciók
2.  $f(t) \sin(t)$  páratlan
3.  $\cos(\omega t)$  és  $|t| \cos(\omega t)$  páros
4. integrálás, behelyettesítés

**2. Feladat** Ábrázoljuk az előző feladat függvényét és  $FT$ -ját!

**Megoldás**



**3. Feladat** Számoljuk ki a következő függvény  $FT$ -jét!

$$f(t) = \begin{cases} |t| & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

**Megoldás**

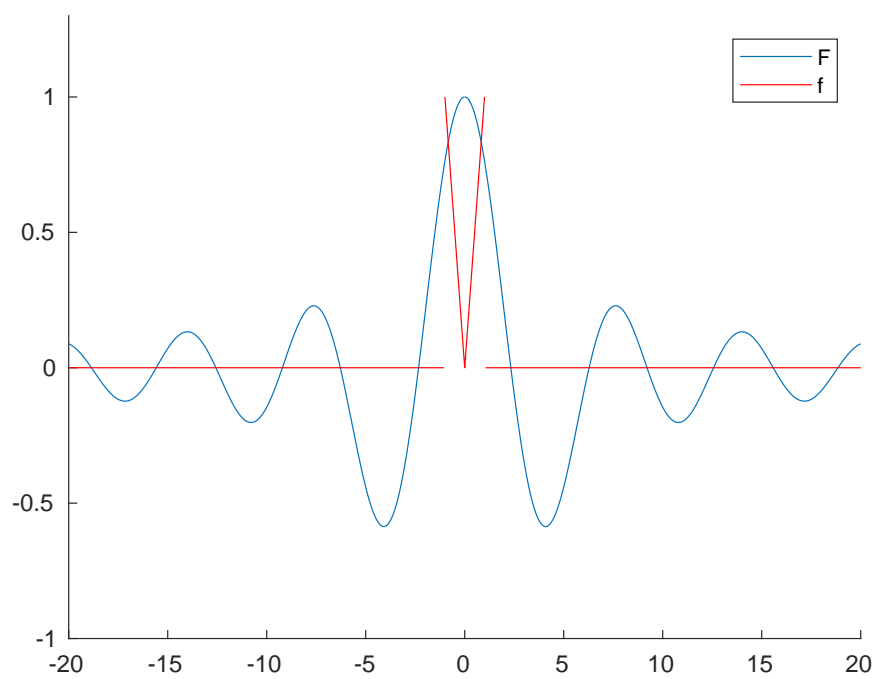
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt &\stackrel{1.}{=} \int_{-1}^1 |t|e^{-i\omega t} dt \stackrel{2.}{=} \int_{-1}^1 |t| \cos(-\omega t) dt \stackrel{3.}{=} \\ &\stackrel{3.}{=} 2 \int_0^1 t \cos(\omega t) dt \stackrel{4.}{=} 2 \left[ t \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\sin(\omega t)}{\omega} dt \stackrel{4.}{=} \\ &\stackrel{4.}{=} 2 \left[ t \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]_0^1 + 2 \left[ \frac{\cos(\omega t)}{\omega^2} \right]_0^1 \stackrel{4.}{=} 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega} + 2 \frac{\cos(\omega)}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2} \end{aligned}$$

**Magyarázat**

1. definíciók
2.  $|t| \sin(t)$  páratlan
3.  $\cos(\omega t)$  és  $|t| \cos(\omega t)$  páros
4. integrálás

**4. Feladat** Ábrázoljuk az előző feladat függvényét és  $FT$ -jét!

**Megoldás**



**5. Feladat** Számoljuk ki a következő függvény  $FT$ -jét:

$$f(t) = \begin{cases} t & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

**Megoldás**

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt &\stackrel{1.}{=} \int_{-1}^1 te^{-i\omega t} dt \stackrel{2.}{=} -i \int_{-1}^1 t \sin(\omega t) dt \stackrel{3.}{=} \\ &\stackrel{3.}{=} -2i \int_0^1 t \sin(\omega t) dt \stackrel{4.}{=} -2i \left( \left[ t \frac{-\cos(\omega t)}{\omega} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-\cos(\omega t)}{\omega} dt \right) \stackrel{4.}{=} \\ &\quad -2i \left( \frac{-\cos(\omega)}{\omega} + \frac{\sin(\omega)}{\omega^2} \right) \end{aligned}$$

**Magyarázat**

1. definíciók
2.  $\cos$  páros,  $t \cos(\omega t)$  páratlan
3.  $t \sin(\omega t)$  páros
4. integrálás

**6. Feladat** Ábrázoljuk az előző feladatbeli  $FT$ -at!

**7. Feladat** Számoljuk ki a következő függvény  $FT$ -jét!

$$f(t) = e^{-\gamma|t|} \quad 0 < \gamma \in \mathbb{R}$$

**Megoldás**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \stackrel{1.}{=} 2 \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \cos(\omega t) dt = 2A$$

$$A \stackrel{2.}{=} \frac{\gamma}{\omega} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \sin(\omega t) dt = \frac{\gamma}{\omega} B$$

$$A \stackrel{2.}{=} \frac{1}{\gamma} - \frac{\omega}{\gamma} B$$

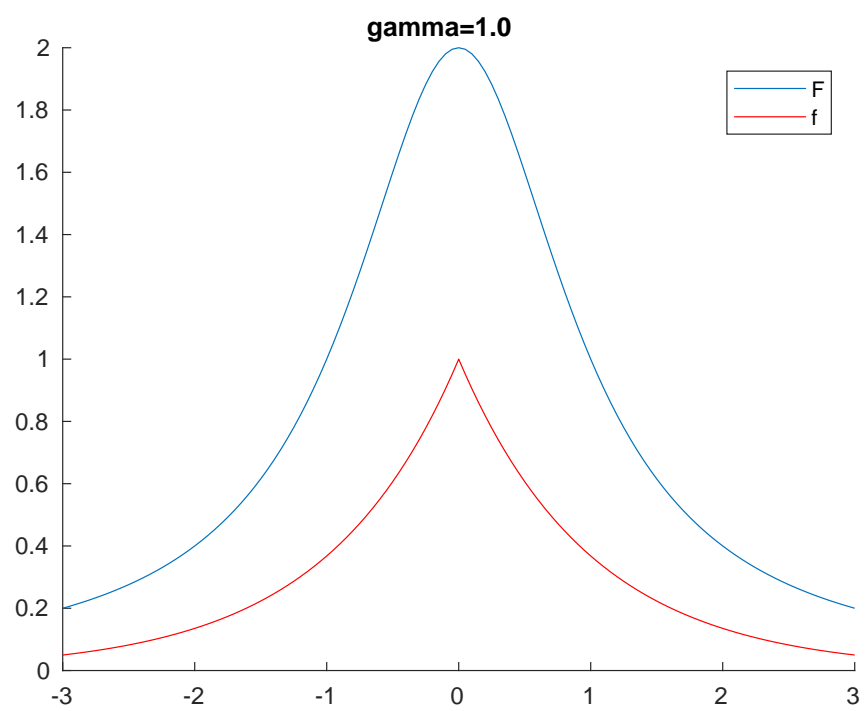
$$\stackrel{3.}{\implies} B = \frac{\omega}{\gamma^2 + \omega^2} \quad \stackrel{3.}{\implies} 2A = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + \omega^2}$$

## Magyarázat

1. definíciók,  $f(t) \sin(\omega t)$  páratlan,  $\cos(\omega t)$  páros
2. parciális integrálások
3. egyenletrendszer megoldása, visszahelyettesítés

**8. Feladat** Ábrázoljuk az előző feladatbeli függvényt és  $FT$ -jét különböző  $\gamma$ -kra!

**Megoldás**



**9. Feladat** Számoljuk ki a következő függvény  $FT$ -jét!

$$f(t) = e^{-\gamma t} \quad 0 < \gamma \in \mathbb{R}$$

**Megoldás**

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt &\stackrel{1.}{=} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(i\omega + \gamma)} dt = \\ &\left[ -\frac{e^{-t(i\omega + \gamma)}}{i\omega + \gamma} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{i\omega + \gamma} \end{aligned}$$

## Emlékeztető

Az  $FT$  alaptulajdonságai ( $F = \mathcal{F}(f)$ ):

1.  $\mathcal{F}$  lineáris

2.  $(\tau_h f)(t) = f(t + h)$ :  $\mathcal{F}((\tau_h f))(\omega) = e^{i\omega h} F(\omega)$  (eltolás)

3.  $(\delta_a f)(t) = f(at)$ :  $\mathcal{F}((\delta_a f))(\omega) = \frac{1}{|a|} F(\frac{\omega}{a})$  (dilatáció)

4.  $g_n(t) = t^n f(t)$   $\mathcal{F}(g_n)(\omega) = i^n F^{(n)}(\omega)$

5.  $\mathcal{F}(f^{(n)})(\omega) = (i\omega)^n F(\omega)$

6.  $g(t) = e^{i\Omega t} f(t)$ ,  $\mathcal{F}(g)(\omega) = F(\omega - \Omega)$  (moduláció)

**10. Feladat**  $\mathcal{F}(f) = F$  segítségével fejezzük ki az alábbi függvények  $FT$ -jét!

1.  $g(t) = f(2t - 3)$

2.  $g(t) = (t^2 f(3t))''$

## Megoldás

1. a 2, 3 tulajdonságot használva:  $\mathcal{F}(g)(\omega) = \frac{e^{-3i\omega}}{2} F(\frac{\omega}{2})$

2. a 3, 4, 5 tulajdonságot használva:  $\mathcal{F}(g)(\omega) = \omega^2 \left( \frac{F(\frac{\omega}{3})}{3} \right)'' = \frac{\omega^2 F''(\frac{\omega}{3})}{27}$

**11. Feladat** Számítsuk ki Matlab segítségével az  $f(x) = e^{-|x|}$  Fourier transzformáltját, majd ábrázoljuk a függvényt és a transzformáltat egy ábrán!

## Megoldás

```
syms t x
f = exp( -abs( t ) ) ;
F = fourier( f, t ) ;
fplot( [ f F ] ) ;
axis( [ -inf, inf, -0.5, 2.5 ] ) ;
legend( 'f', 'F' ) ;
F
```