

# Matematika Mérnököknek 2.

Baran Ágnes, Burai Pál, Noszály Csaba

Gyakorlat  
Hatványsorok, Fourier sorok

# Hatványsorok

## 1. feladat

Írja fel a következő függvények Maclauren sorának első néhány tagját!

- $f(x) = \sqrt{1-x}$ ,
- $f(x) = \log((1+x)^5)$ ,
- $f(x) = \tan(x)$ ,
- $f(x) = \cosh(x)$ .

## 2. feladat

Ábrázolja Matlab-bal az előző feladatban adott függvényeket, illetve a Maclauren soruk első néhány tagjával felírt közelítésüket.

### 3. feladat

Számítsa ki a következő hatványsorok konvergenciasugarát!

$$1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n^2+1} x^n$$

$$2 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n3^n} x^n$$

$$3 \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$$

$$4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n} x^n$$

$$5 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n} x^n$$

$$6 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} (x-3)^n$$

$$7 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x+4)^n}{(n^3+2)3^n},$$

$$8 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(5x+3)^n}{(n+1)^n+4n},$$

$$9 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n(x+3)^n}{4^n},$$

$$10 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(4x-8)^n}{n}.$$

## 4. feladat

Írja fel a következő függvények  $x_0$  körüli Taylor sorát!

- $f(x) = \sin(x)$ ,  $x_0 = \pi$ ,
- $f(x) = \cos(x)$ ,  $x_0 = \pi$ ,
- $f(x) = \exp(x)$ ,  $x_0 = \log(2)$ ,
- $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 1$ ,
- $f(x) = \log(x)$ ,  $x_0 = 1$ .

## 5. feladat

Számítsa ki a  $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$ , illetve a  $\sqrt{42} = \sqrt{36+6}$  közelítő értékét!

## 6. feladat

Számítsa ki a  $\log(2)$  közelítő értékét!

# Hatványsorok

## Példa

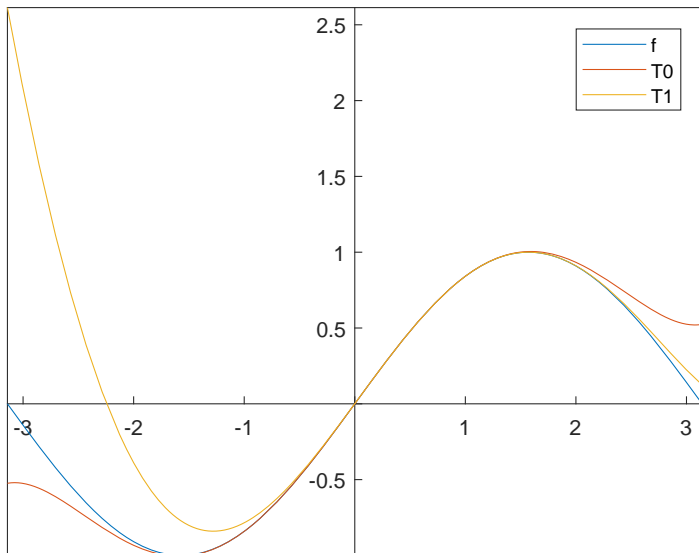
A `taylor` parancs segítségével számítsuk ki a  $\sin$  függvény  $x_0 = 0$  és  $x_0 = 1$  körüli Taylor sorának első hat tagját!

```
>> syms x
>> T0 = taylor(sin(x),x,0,'Order',6)
>> T1 = taylor(sin(x),x,1,'Order',6)
```

Ábrázoljuk a függvényt és az előbbi részletösszegeket közös ábrán!

```
>> f = sin(x);
>> fplot([f,T0,T1],[-pi,pi])
>> legend('f','T0','T1');
>> ax = gca;
>> ax.XAxisLocation = 'origin';
>> ax.YAxisLocation = 'origin';
```

# Hatványsorok



# Fourier-sorok

## 1. feladat

Döntse el az alábbi függvényekről, hogy periodikusak-e, és ha igen, akkor adja meg a periódusukat.

(a)  $\tan(x)$

(b)  $\sin(2x)$

(c)  $\ln(x)$

(d)  $\{x\}$  (többrészes fv)

(e)  $\sin(x) \cos(x)$

(f)  $x^2 - 1$

(g)  $\sin(x) + \cos(x)$

## 2. feladat

Válassza ki az alábbi függvények közül a párosakat, illetve a páratlanokat!

(a)  $\tan(x)$

(b)  $x^2 + 1$

(c)  $(x + 1)^2$

(d)  $-2x^5$

(e)  $x^5 + 1$

(f)  $|x|$

(g)  $e^{-x^2}$

(h)  $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

## Példa

Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  az  $f_0 : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_0(x) = x^2$  függvény  $2\pi$  szerint periodikus kiterjesztése. Határozzuk meg az  $f$  Fourier-sorát!

**Megoldás:** mivel  $f$  páros függvény, ezért  $b_k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

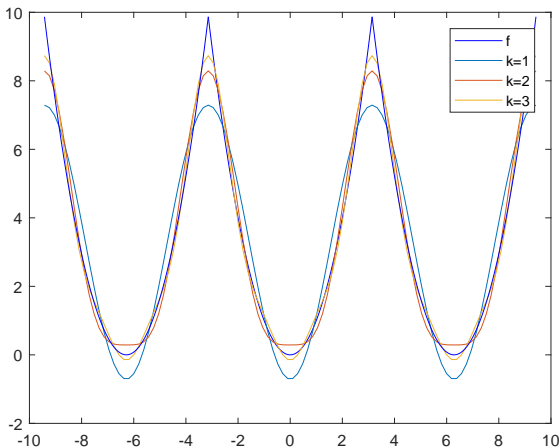
$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2}_f \underbrace{\cos(kx)}_{g'} dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \underbrace{\left[ x^2 \frac{1}{k} \sin(kx) \right]_{-\pi}^{\pi}}_0 - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{k} \underbrace{x}_u \underbrace{\sin(kx)}_{v'} dx \\
 &= \frac{2}{k^2 \pi} [x \cos(kx)]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k^2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx \\
 &= \frac{4}{k^2} \cos(k\pi) - \frac{2}{k^3 \pi} [\sin(kx)]_{-\pi}^{\pi} = \frac{4}{k^2} (-1)^k
 \end{aligned}$$

Így

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos(kx)$$

## Feladat

Ábrázolja közös ábrán az előző feladat  $f$  függvényét és a Fourier-sor részletösszegeit  $k = 1, 2, 3$  esetén a  $[-3\pi, 3\pi]$  intervallum felett.



## Példa

Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  az  $f_0 : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_0(x) = x^3$  függvény  $2\pi$  szerint periodikus kiterjesztése. Határozzuk meg az  $f$  Fourier-sorát!

**Megoldás:** mivel  $f$  páratlan függvény, ezért  $a_k = 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^3}_f \underbrace{\sin(kx)}_{g'} dx \\ &= \underbrace{-\frac{1}{k\pi} [x^3 \cos(kx)]_{-\pi}^{\pi}}_{(-1)^{k+1} \frac{2\pi^2}{k}} + \frac{3}{k} \cdot \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx) dx}_A \end{aligned}$$

ahol  $A = \frac{4}{k^2}(-1)^k$ , az előző feladatból, így

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right)$$

## Feladat

Ábrázolja közös ábrán az előző feladat  $f$  függvényét és a Fourier-sor 12. részletösszegét a  $[-3\pi, 3\pi]$  intervallum felett.

