

# Matematika Mérnököknek 2.

Baran Ágnes, Burai Pál, Noszály Csaba

Gyakorlat  
Differenciálegyenletek

# Numerikus differenciálás Matlab-bal

## Példa

Tegyük fel, hogy az  $f(x) = \frac{\sin(3x)}{x}$  függvény értékei  $h = 0.001$  lépésközzel adottak a  $[0.1, 2\pi]$  intervallumon. Deriváljuk numerikusan a függvényt! Ábrázoljuk az eredményt a függvény tényleges deriváltjával közös ábrán.

**Megoldás.** A derivált közelítésére például a következő differenciahányadost használhatjuk (ahol  $h > 0$ , kicsi érték):

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Használjuk a Matlab `diff` függvényét.

Ha  $y$  egy  $n$  elemű vektor, akkor `diff(y)` egy  $(n - 1)$  elemű vektor, az  $y$  szomszédos koordinátáinak a különbségeit tartalmazza:

$$\text{diff}(y)=[y(2)-y(1), y(3)-y(2), \dots, y(n)-y(n-1)]$$

Ha adott az alappontok  $x$  vektora, és az alappontokban felvett függvényértékek  $y$  vektora, akkor

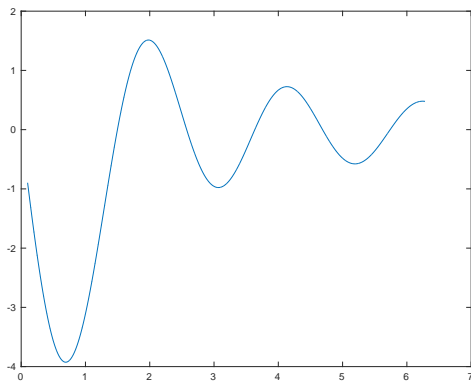
$$d1=\text{diff}(y) ./ \text{diff}(x)$$

a differenciahányadosok vektora.

```
>> h=0.001;  
>> x=0.1:h:2*pi;  
>> y=sin(3*x)./x;  
>> d1=diff(y)./diff(x);  
>> figure; plot(x(1:end-1),d1)
```

**Megj.:** Mivel most az alappontok ekvidisztánsak használhattuk volna a  $d1=\text{diff}(y)/h$ ; utasítást is.

```
h=0.001;  
x=0.1:h:2*pi;  
y=sin(3*x)./x;  
d1=diff(y)./diff(x);  
figure; plot(x(1:end-1),d1)
```



Az  $f$  függvény deriváltja:

$$f'(x) = \frac{3 \cos(3x)}{x} - \frac{\sin(3x)}{x^2}$$

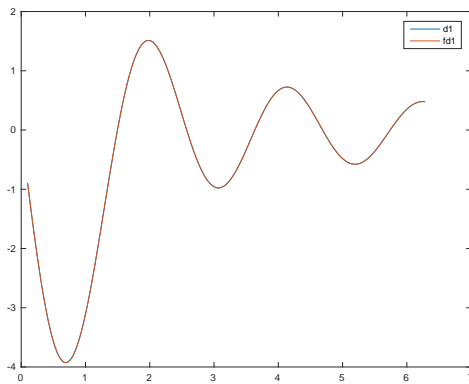
Számítsuk ki ennek értékeit az  $x$ -ben adott helyeken, és ábrázoljuk az előző ábrán:

```
>> fd1=3*cos(3*x)./x-sin(3*x)./x.^2;  
>> hold on; plot(x,fd1); hold off
```

Kiszámíthatjuk mekkora a legnagyobb eltérés a  $d1$  és  $fd1$  elemei között. (Vigyázzunk, a  $d1$  vektor eggyel kevesebb elemet tartalmaz, mint az  $fd1$ .)

```
>> max(abs(fd1(1:end-1)-d1))
```

```
h=0.001;  
x=0.1:h:2*pi;  
y=sin(3*x)./x;  
d1=diff(y)./diff(x);  
figure; plot(x(1:end-1),d1)  
fd1=3*cos(3*x)./x-sin(3*x)./x.^2;  
hold on; plot(x,fd1); hold off
```



## Feladat

- (1) Differenciáljuk az  $f(x) = \frac{\sin(3x)}{x}$  függvényt numerikusan úgy, hogy  $h$  értékét változtatjuk (pl.  $h = 0.01$ ,  $h = 0.005$ ,  $h = 0.001$ ), és számítsuk ki a legnagyobb eltérést a derivált pontos értékétől.
- (2) Tegyük fel, hogy az  $f(x) = \sin(\frac{100}{x})$  függvény értékei  $h = 0.001$  lépésközzel adottak a  $[0.5, 2\pi]$  intervallumon. Deriváljuk numerikusan a függvényt! Ábrázoljuk az eredményt a függvény tényleges deriváltjával közös ábrán. Magyarázzuk meg az eltérést a  $\frac{\sin(3x)}{x}$  fv-nél látottakhoz képest.
- (3) Tegyük fel ismét, hogy az  $f(x) = \sin(\frac{100}{x})$  függvény értékei  $h = 0.001$  lépésközzel adottak a  $[0.5, 2\pi]$  intervallumon. Deriváljuk numerikusan a függvényt! A derivált közelítését számoljuk a

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

összefüggés alapján. Mit tapasztalunk?

# A második derivált közelítése Matlab-bal

Alkalmazzuk a diff függvényt kétszer egymás után.

```
h=0.001;  
x=0.1:h:2*pi;  
y=sin(3*x)./x;  
d1=diff(y)./diff(x);  
d2=diff(d1)./diff(x(1:end-1));  
figure; plot(x(1:end-2),d2)
```

Másik lehetőség: használhatjuk a másodrendű differenciákat előállító `diff(y,2)` utasítást (ez ugyanaz, mint `diff(diff(y))`). Ekkor (felhasználva, hogy  $x$ -ben az alappontok most  $h$  lépésközzel követik egymást)

```
h=0.001;  
x=0.1:h:2*pi;  
y=sin(3*x)./x;  
d2=diff(y,2)/h^2;  
figure; plot(x(1:end-2),d2)
```

# Példák differenciálegyenletekkel megoldható feladatokra

## 1. Példa

Egy tartályban 100 liter, 10 kg sót tartalmazó oldat van. A tartályba folyamatosan vizet vezetünk be, 5 litert percenként (feltételezzük, hogy a befolyó víz keverés következtében egyenletesen oszlik el a tartály egészében). A keverék ugyanilyen sebességgel folyik ki. Mennyi só marad a tartályban 1 óra múlva?

### Megoldás:

- $y(t)$ : a  $t$ -edik időpillanatban a tartályban lévő só mennyisége
- $\Delta t$  idő alatt mennyit változik a só mennyisége? (Azaz mivel egyenlő  $y(t + \Delta t) - y(t)$ ?)
- A  $t$ -edik időpillanatban 5 liter oldatban  $\frac{5}{100}y(t)$  kg só van.
- Ha  $\Delta t$  elegendően kicsi, a tartályból  $\Delta t$  idő alatt  $\frac{5}{100}y(t)\Delta t$  só távozik.

# Példák differenciálegyenletekkel megoldható feladatokra

Az egyenlet:

$$y(t + \Delta t) - y(t) = -\frac{1}{20}y(t)\Delta t,$$

azaz

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -\frac{1}{20}y(t)$$

Ha  $\Delta t \rightarrow 0$ , akkor

$$y'(t) = -\frac{1}{20}y(t).$$

A KDE megoldása:

$$y(t) = C \cdot e^{-\frac{1}{20}t},$$

ahol a  $C$  konstans az  $y(0) = 10$  kezdeti feltételből határozzuk meg:

$$y(0) = C \cdot e^{-\frac{1}{20} \cdot 0} = C = 10,$$

tehát

$$y(t) = 10 \cdot e^{-\frac{1}{20}t}, \text{ és } y(60) = 10 \cdot e^{-3} \approx 0.5$$

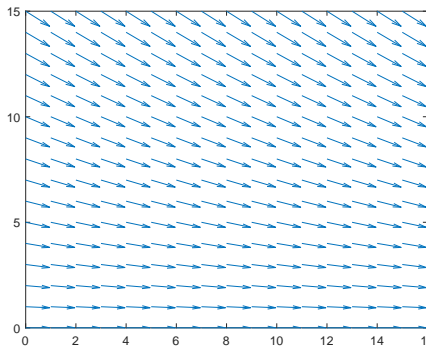
# Íránymező

Ha az előbb felírt

$$y'(t) = -\frac{1}{20}y(t)$$

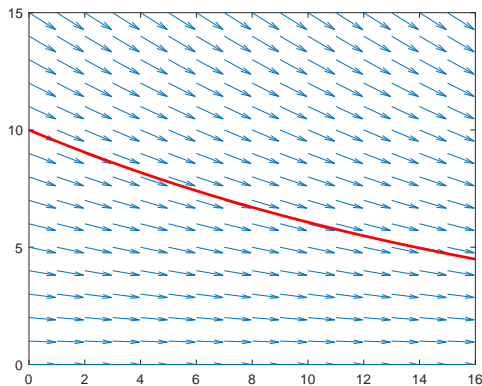
egyenlet  $y(t)$  megoldása áthalad a sík  $(t_0, y_0)$  pontján, akkor ott a meredeksége  $-\frac{1}{20}y_0$ .

Rácsozzuk be a sík egy tartományát, és minden rácspontban rajzoljuk be a meredekséget megadó nyilat:



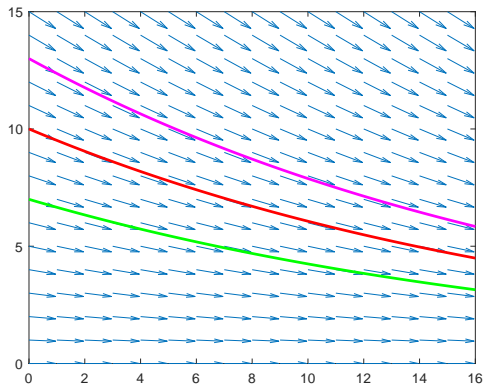
# Íránymező

Rajzoljuk rá az ábrára az  $y(0) = 10$  kezdeti feltételhez tartozó megoldást:



# Íránymező

Ha a kezdeti feltétel  $y(0) = 7$ , illetve  $y(0) = 13$  lenne:



# Íránymező Matlab-bal

A quiver függvény segítségével: Ha

- $[T,Y]$  tartalmazza azokat a pontpárokat ahonnan a vektorokat indulnak,
- $[dT,dY]$  a vektorok koordinátáit,

akkor

```
>> quiver(T,Y,dT,dY)
```

kirajzolja az iránymezőt.

Általánosan az  $y'(t) = f(t, y(t))$  egyenlet iránymezeje:

```
>> [T Y] = meshgrid(minT:stepsize:maxT, minY:stepsize:maxY);  
>> dY = f(T,Y);  
>> dT = ones(size(dY));  
>> quiver(T,Y,dT,dY);
```

## Példa

Rajzoltassuk ki az  $y'(t) = -\frac{1}{20}y(t)$  KDE iránymezejét a  $[0, 15] \times [0, 15]$  tartományban.

- „Rácsozzuk be” a tartományt, mindkét irányban valamilyen, most pl. 1-es lépésközzel:

```
>> t=0:15; y=0:15;  
>> [T,Y]=meshgrid(t,y);
```

Ekkor T és Y is  $16 \times 16$ -os mátrix:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 14 & 15 \\ 0 & 1 & \dots & 14 & 15 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 1 & \dots & 14 & 15 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & & & & \\ 15 & 15 & \dots & 15 & 15 \end{bmatrix}$$

(A T és Y mátrixokat „egymásra helyezve” megkapjuk az összes lehetséges  $(t_i, y_j)$  párt)

- A  $[T,Y]$  minden eleméhez állítsuk elő a vektorokat:

```
>> dY=-Y/20;
```

```
>> dT=ones(size(dY));
```

- Rajzoltassuk ki az iránymezőt:

```
>> quiver(T,Y,dT,dY);
```

## Összefoglalva:

```
>> t=0:15; y=0:15;
```

```
>> [T,Y]=meshgrid(t,y);
```

```
>> dY=-Y/20;
```

```
>> dT=ones(size(dY));
```

```
>> quiver(T,Y,dT,dY);
```

## Feladat

(a) Rajzoltassa ki az

$$y' = x + y + 2$$

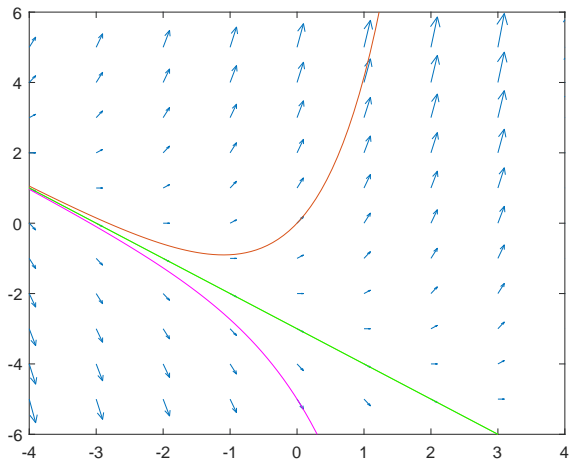
KDE iránymezejét a  $[-4, 4] \times [-6, 6]$  tartományon.

(b) Ellenőrizze, hogy az  $y(x) = -x - 3 + k \cdot e^x$  függvény (ahol  $k$  konstans) megoldja az egyenletet.

(c) Rajzoltassa rá az iránymezőre az

- ▶  $y(0) = 0,$
- ▶  $y(0) = -3,$
- ▶  $y(0) = -5$

kezdeti feltételekhez tartozó megoldást.



# Példák differenciálegyenletekkel megoldható feladatokra

## 2. Példa

Egy csónak mozgása a víz ellenállásának hatására lassul. A csónak kezdősebessége 1.5 m/s, 4 s múlva pedig 1 m/s sebességgel halad. Mikorra csökken a sebessége 1 cm/s-ra, ha a víz ellenállása egyenesen arányos a csónak sebességével?

### Megoldás:

$v(t)$ : a csónak sebessége a  $t$ -edik másodpercben (m/s)

A KDE:

$$v'(t) = k \cdot v(t)$$

A peremfeltételek:

$$v(0) = 1.5 \quad \text{és} \quad v(4) = 1.$$

# Példák differenciálegyenletekkel megoldható feladatokra

A KDE megoldása:

$$v(t) = C \cdot e^{kt}.$$

Felhasználva a peremfeltételeket:

$$v(0) = C \cdot e^{k \cdot 0} = C = 1.5,$$

$$v(4) = 1.5 \cdot e^{k \cdot 4} = 1 \implies k = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{1.5} = -0.1014$$

Tehát a megoldás:

$$v(t) = 1.5 \cdot e^{-0.1014t}$$

Mikor lesz a sebesség 1 cm/s, azaz 0.01 m/s?

$$0.01 = 1.5 \cdot e^{-0.1014t} \implies t = -\frac{1}{0.1014} \ln \frac{0.01}{1.5} = 49.415$$

# Szimbolikus megoldás Matlab-bal

## Példa

Oldjuk meg az előző példában megjelenő differenciálegyenletet a Matlab `dsolve` függvényével!

A `dsolve(eqn)` utasítással a szimbolikus alakban adott `eqn` egyenletet oldhatjuk meg.

Az

$$v'(t) = k \cdot v(t)$$

egyenletet szeretnénk megoldani, ehhez először definiáljuk a  $k$  és  $v(t)$  szimbolikus mennyiségeket:

```
>> syms k v(t)
```

Adjuk meg szimbolikusan az egyenletet:

```
>> eqn= diff(v,t)==k*v
```

# Szimbolikus megoldás Matlab-bal

A megoldás a dsolve függvénnyel:

```
>> dsolve(eqn)
ans=
    C1*exp(k*t)
```

A C1 konstans meghatározásához a  $v(0) = 1.5$  feltételre is szükségünk van.

```
>> syms k v(t);
>> eqn= diff(v,t)==k*v;
>> cond1= v(0)==1.5;
>> dsolve(eqn,cond1)
ans=
    (3*exp(k*t))/2
```

## Feladatok

- (1) Egy test 10 perc alatt 100 C fokról 60 C fokra hűlt le. A környező levegő hőmérsékletét konstans 20 C foknak tekinthetjük. Mikor hűl le a test 25 C fokra, ha a test hűlésének sebessége egyenesen arányos a test és az őt körülvevő levegő hőmérsékletének különbségével?
- (2) Keressük meg azokat a görbéket, melyek esetében bármely érintőnek az  $x$ -tengellyel vett metszéspontja fele akkora, mint az érintési pont  $x$ -koordinátája.
- (3) Egy 10 liter vizet tartalmazó edénybe literenként 0.3 kg sót tartalmazó oldat folyik be folyamatosan 2 liter/perc sebességgel. Az edénybe belépő folyadék összekeveredik a vízzel és a keverék 2 liter/perc sebességgel kifolyik az edényből. Mennyi só lesz az edényben 5 perc múlva?
- (3) Egy  $200 \text{ m}^3$  térfogatú szobában 0.15% szén-dioxid van. A ventilátor percenként  $20 \text{ m}^3$  0.04%  $\text{CO}_2$  tartalmú levegőt fúj a helyiségbe, Mennyi idő múlva csökken a szoba levegőjében a  $\text{CO}_2$  mennyiség a harmadára?

# Differenciálegyenletek osztályozása

## Feladat

Válassza ki az alábbi egyenletek közül a közönséges, illetve a parciális differenciálegyenleteket!

(a)  $x'x''x''' = \frac{\partial y}{\partial t_1},$

(b)  $x'x''x''' = \cos(t)$

(c)  $\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = 0$

(d)  $a\ddot{x} = \dot{x}$

(e)  $T' = -kT$

(f)  $\partial_1 z + \partial_2 z = -\partial_1^2 z$

(g)  $x'' - \cos(t)x' + x = e^x$

# Differenciálegyenletek osztályozása

## Feladat

Melyik lineáris és melyik nem az alábbi egyenletek közül? A nemlineáris esetben melyik a nemlinearitást okozó tag?

(a)  $y' = x + y + 2$

(b)  $x' - xt^2 = 3t^3$

(c)  $y' - y^2x + x = 0$

(d)  $x' = x \cos(t) + t^2$

(e)  $x' - te^x + \sin(t) = 0$

(f)  $u'(1 + t) = u \cos(t) - u - e^t$

# Egyszerűen integrálható feladatok

## Feladat

Adja meg a következő egyenletek általános megoldását!

(a)  $x' = \sin(t)$

(b)  $y' = \frac{1}{1+x}$

(c)  $y' = \sqrt{x+2}$

(d)  $u' = t(t+1)$

(e)  $x' = e^{t-3}$

(f)  $y' = (2t+1)^3$

(g)  $x' = \cos(t) + t^2 - e^t$

# Szeeparábilis differenciálegyenletek

## Feladat

Oldja meg az alábbi egyenleteket, illetve kezdetiérték problémákat!

(a)  $x' = t \cdot x$

(b)  $y' = e^{y+2}$

(c)  $u' = u(u + 1)$

(d)  $y' = 1 - y$  és  $y(0) = 2$

(e)  $y' = \frac{x^2}{y+2}$

(f)  $(1 + x)yy' = 1$

(g)  $3u' + \cos(x)u^2 = 0$  és  $u(0) = 1$

(h)  $t(t - 1)x' + x(x - 1) = 0$

## Feladat

Az előző feladatban szereplő egyenleteket oldja meg a Matlab dsolve függvényével!

# Lineáris inhomogén differenciálegyenlet

## Példa

Oldjuk meg az  $x(y' - y) = e^x$  differenciálegyenletet!

**Megoldás:** Az egyenletet átrendezve az

$$y' = y + \frac{e^x}{x}, \quad x \neq 0$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletet kapjuk.

- Oldjuk meg az  $y' = y$  homogén egyenletet!  
Ennek megoldása az  $y = C \cdot e^x$  függvény, ahol  $C$  konstans.
- Konstans variálás: tekintsük a konstans  $x$ -től függőnek:

$$y = C(x) \cdot e^x$$

# Lineáris inhomogén differenciálegyenlet

Helyettesítsünk vissza az eredeti egyenletbe:

$$\underbrace{C'(x) \cdot e^x + C(x) \cdot e^x}_{y'} = \underbrace{C(x) \cdot e^x}_y + \frac{e^x}{x}$$

Innen

$$C'(x) \cdot e^x = \frac{e^x}{x} \implies C'(x) = \frac{1}{x},$$

azaz

$$C(x) = \ln |x| + K,$$

ahol  $K$  konstans.

A megoldás tehát:

$$y = (\ln |x| + K)e^x$$

# Lineáris inhomogén differenciálegyenlet

## Feladatok

Oldja meg az alábbi egyenleteket!

$$(1) \quad y' = x + y + 2$$

$$(2) \quad xy' - 2y = 2x^4$$

$$(3) \quad x^2y' + xy + 1 = 0$$

$$(4) \quad y' = 2x(x^2 + y)$$

## Feladat

Oldja meg az előző egyenleteket a Matlab `dsolve` függvényével!

# Bernoulli-féle differenciálegyenlet

## Példa

Oldjuk meg az  $y' + 2y = y^2 e^x$  differenciálegyenletet.

**Megoldás:** Az egyenlet  $y' + g(x)y + h(x)y^\alpha = 0$  alakú Bernoulli egyenlet ( $g(x) \equiv 2$ ,  $h(x) = -e^x$ ,  $\alpha = 2$ ), az  $y = 0$  triviális megoldás.

Szorozzuk meg az egyenletet  $(1 - \alpha)y^{-\alpha} = -y^{-2}$ -nal:

$$-\frac{y'}{y^2} - \frac{2}{y} = -e^x$$

Legyen  $z = y^{1-\alpha} = y^{-1}$ . Ekkor  $z' = -y^{-2}y'$  és

$$z' - 2z = -e^x$$

Ez egy inhomogén lineáris egyenlet.

- A  $z' - 2z = 0$  homogén egyenlet megoldása:  $z = C \cdot e^{2x}$
- A konstans variálása:

$$z' = C' \cdot e^{2x} + 2C \cdot e^{2x}$$

amiből

$$\underbrace{C' \cdot e^{2x} + 2C \cdot e^{2x}}_{z'} - 2 \underbrace{C \cdot e^{2x}}_z = -e^x \implies C' \cdot e^{2x} = -e^x$$

azaz

$$C' = -e^{-x} \implies C = e^{-x} + K$$

Az inhomogén egyenlet megoldása:

$$z = e^x + Ke^{2x}$$

Tehát az eredeti egyenlet megoldásai

$$y = \frac{1}{e^x + Ke^{2x}} \quad \text{és} \quad y = 0$$

# Bernoulli egyenlet

## Példa

Oldjuk meg az előző  $y' + 2y = y^2 e^x$  Bernoulli egyenletet a Matlab `dsolve` függvényével.

## Megoldás.

```
>> syms y(x)
>> eqn=diff(y)+2*y==y^2*exp(x);
>> dsolve(eqn)
```

```
ans =  
  
0  
exp(-2*x)/(C5 + exp(-x))
```

Tehát 2 megoldást kaptunk:  $y \equiv 0$  és  $y = \frac{e^{-2x}}{C + e^{-x}}$ .

Utóbbinak a számlálóját és a nevezőjét is  $e^{2x}$ -szel szorozva megkapjuk az általunk kiszámolt megoldást:  $y = \frac{1}{Ce^{2x} + e^x}$ .

# Bernoulli egyenlet

## Feladat

Oldja meg az alábbi egyenleteket!

(a)  $xy^2y' = x^2 + y^3$

(b)  $y' = y^4 \cos(x) + y \tan(x)$

(c)  $x^2y' + xy + \sqrt{y} = 0$

## Feladat

Oldja meg az előző egyenleteket a Matlab `dsolve` függvényével.

# Riccati egyenlet

## Példa

Oldjuk meg az

$$y' = (2t - 1)y + (1 - t)y^2 - t$$

egyenletet, ha tudjuk, hogy  $y_p \equiv 1$  megoldás.

## Megoldás:

Az egyenlet egy  $y' = q_0(t) + q_1(t)y + q_2(t)y^2$  alakú ú.n. Riccati egyenlet:

$$y' = \underbrace{(2t - 1)}_{q_1(t)} y + \underbrace{(1 - t)}_{q_2(t)} y^2 - \underbrace{t}_{q_0(t)}$$

Ha ennek ismert egy  $y_p$  partikuláris megoldása, akkor tetszőleges  $y$  megoldás előáll  $y = u + y_p$  alakban, ahol  $u$  a következő Bernoulli egyenlet megoldása:

$$u' = (q_1(t) + 2q_2(t)y_p)u + q_2(t)u^2$$

Ez az egyenlet most a következő alakú:

$$u' = (2t - 1 + 2(1 - t) \cdot 1)u + (1 - t)u^2,$$

azaz

$$u' = u + (1 - t)u^2$$

A Bernoulli egyenlet megoldása: szorozzuk meg az egyenletet  $-u^{-2}$ -vel:

$$-u^{-2}u' = -u^{-1} + t - 1$$

Legyen  $z = u^{-1}$ , ekkor  $z' = -u^{-2}u'$ , és az egyenlet

$$z' = -z + t - 1,$$

ami egy lineáris inhomogén egyenlet  $z$ -re.

Oldjuk meg a  $z' = -z$  homogén egyenletet! Ennek megoldása:

$$z = Ce^{-t}$$

Konstans variálással oldjuk meg az inhomogén egyenletet:

$$z' = C'e^{-t} - Ce^{-t}$$

így

$$\underbrace{C'e^{-t} - Ce^{-t}}_{z'} = -\underbrace{Ce^{-t}}_z + t - 1$$

azaz

$$C'e^{-t} = t - 1$$

$$C' = (t - 1)e^t$$

$$C = te^t - 2e^t + K$$

így az inhomogén egyenlet megoldása:

$$z = t - 2 + Ke^{-t}$$

**Az inhomogén egyenlet megoldása:**

$$z = t - 2 + Ke^{-t}$$

**Ebből a Bernoulli egyenlet megoldása:**

$$u = \frac{1}{z} = \frac{1}{t - 2 + Ke^{-t}}$$

**Így a Riccati egyenlet általános megoldása:**

$$y = u + y_p = \frac{1}{t - 2 + Ke^{-t}} + 1$$

# Riccati egyenlet

## Példa

Oldjuk meg az előző  $y' = (2t - 1)y + (1 - t)y^2 - t$  egyenletet a Matlab `dsolve` függvényével.

## Megoldás:

```
>> syms y(t)
>> eqn = diff(y)==(2*t - 1)*y + (1 - t)*y^2 - t;
>> dsolve(eqn)
```

ans =

$$\frac{1}{\exp(t)/(C_6 + \exp(t)*(t - 2)) + 1}$$

Két megoldást kaptunk:  $y \equiv 1$  és  $y = \frac{e^t}{C_6 + e^t(t-2)} + 1$ . Utóbbiban a tört számlálóját és nevezőjét  $e^{-x}$ -szel szorozva éppen az előbb kiszámolt megoldást kapjuk.

# Riccati egyenlet

## Feladat

Oldja meg a következő Riccati egyenleteket a megadott partikuláris megoldások segítségével

(a)  $y'(x) + 2y(x)e^x - y^2(x) = e^{2x} + e^x, \quad y_p(x) = e^x$

(b)  $y'(x) - \frac{y(x)}{x} = y^2(x) + \frac{1}{x^2}, \quad y_p(x) = -\frac{1}{x}$

## Feladat

Oldja meg az előző egyenleteket a Matlab `dsolve` függvényével.

# Állandó együtthatós, másodrendű, közönséges, differenciálegyenletek

## Feladat

Oldja meg a következő egyenletek közül a homogéneket "kézzel" illetve Matlabbal, az inhomogén egyenleteket Matlabbal! Utóbbi esetben ellenőrizze deriválással, hogy a kapott megoldás kielégíti-e az egyenletet!

(a)  $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0,$

(b)  $y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 0,$

(c)  $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$

(d)  $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = e^{3x},$

(e)  $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = e^{4x},$

(f)  $y''(x) - y'(x) = 2e^x - x^2,$

(g)  $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \sin x,$

(h)  $y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 0,$

(i)  $y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 5e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

# Magasabb rendű egyenletek

## Feladat

Írja át a következő magasabb rendű egyenleteket ekvivalens, egyenletrendszerekre!

(a)  $y'''(x) - y'(x) = 0$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -1$ ,  $y''(0) = 1$ ,

(b)  $y^{(4)}(x) - y(x) = 0$ ,

(c)  $2xy''(x) + y'(x) = 0$ ,

(d)  $2y(x)y'(x) = y''(x)$ ,

(e)  $y''(x) = \frac{(y'(x))^2}{y(x)}$ ,

(f)  $y'''(x) - 8y(x) = 0$ ,

(g)  $y^{(4)}(x) + 2y''(x) + y(x) = 0$ ,

(h)  $y'''(x) - 3y''(x) + 3y'(x) - y(x) = 0$ ,

(i)  $xy'''(x) - y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$ .