

Előadás követő fóliák a Matematika mérnököknek II. című tárgyhoz

Burai Pál

Fourier transzformáció

Fourier transzformáció, heurisztika

Tekintsük egy $2L$ szerint periodikus függvény Fourier sorát:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right)$$

Ha itt $L \rightarrow \infty$ akkor az $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$ harmonikusok (körfrekvenciák) egyre sűrűsödnek, azaz $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{L} \rightarrow 0$ ha $n \rightarrow \infty$.

Az együtthatókra korábban kapott formulákat és a $\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) = \cos(x-y)$ azonosságot felhasználva kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}(t-x)\right) dt.$$

Az első tag nullához tart $L \rightarrow \infty$ esetén, a szumma pedig az

$\omega \mapsto \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L f(t) \cos(\omega(t-x)) dt$ függvény integrálközelítő összege ω_n osztópontokkal és $\Delta\omega$ lépésközzel.

Fourier transzformáció, heurisztika

Az integrálközelítő összeg helyére az integrált írva kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega(t-x)) dt \right) d\omega.$$

Alkalmazzuk újra az előbbi trigonometrikus azonosságot a következőhöz jutunk:

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a_{\omega} \cos(\omega x) + b_{\omega} \sin(\omega x)) d\omega, \quad (\text{Fourier integrál})$$

ahol

$$a_{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt, \quad b_{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt.$$

A korábbiakhoz hasonlóan páros függvény esetén $b_{\omega} = 0$ páratlan függvény esetén pedig $a_{\omega} = 0$.

Fourier transzformáció

Mivel $\cos(\omega(t-x))$ páros függvény a $[0, \infty]$ intervallum helyett $[-\infty, \infty]$ intervallumon integrálva, az eredményt 2-vel osztva kapjuk

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega(t-x)) dt \right) d\omega.$$

Továbbá, a $\sin(\omega(t-x))$ függvény páratlan

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega(t-x)) dt \right) d\omega.$$

Az elsőből kivonva a második *is*zeresét, felhasználva Euler tételét kapjuk a **Fourier integrálformula komplex alakját**:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \right) d\omega.$$

Definíció

Az f függvény **abszolút integrálható**, ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

Ha f abszolút integrálható, akkor az

$$\mathcal{F}[f](\omega) = F(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

függvényt f **Fourier transzformáltjának** nevezzük.

Továbbá, az

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

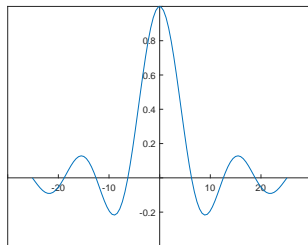
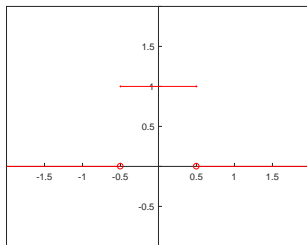
függvényt az F **függvény inverz Fourier transzformáltjának** nevezzük.

Fourier transzformáció, Példák

Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

akkor $\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega}{2}.$

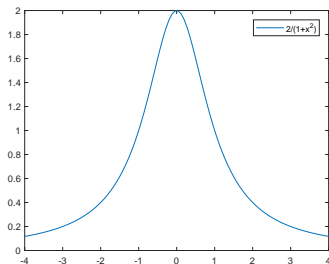
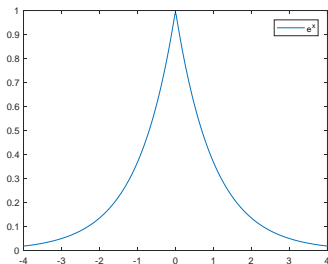


Fourier transzformáció, Példák

Legyen $f(x) = e^{-\gamma|x|}$, ahol $\gamma > 0$ adott. Ekkor

$$\mathcal{F}[f_\gamma](\omega) = F_\gamma(\omega) = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + \omega^2}.$$

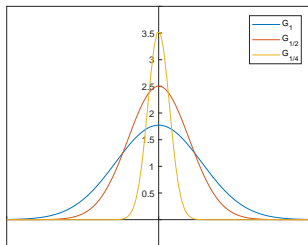
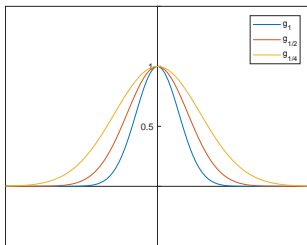
A $\gamma = 1$ esetben a függvény illetve Fourier transzformáltjának grafikonja.



Fourier transzformáció, Példák

Határozzuk meg az $g_a(x) = e^{-ax^2}$ Gauss-függvény Fourier transzformáltját.

$$\mathcal{F}[g_a](\omega) = G_a(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$



Tétel

Legyen f és g abszolút integrálható. Jelölje Fourier transzformáltjukat F és G . Ekkor

- tetszőleges a, b konstansok esetén

$$\mathcal{F}[af(x) + bg(x)](\omega) = aF(\omega) + bG(\omega);$$

- tetszőleges $a \neq 0$ konstans esetén

$$\mathcal{F}\left[f\left(\frac{x}{a}\right)\right](\omega) = |a|F(a\omega);$$

- tetszőleges rögzített x_0 esetén

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)](\omega) = e^{-i\omega x_0}F(\omega);$$

- tetszőleges n természetes szám esetén

$$\mathcal{F}[x^n f(x)](\omega) = i^n F^{(n)}(\omega), \quad \text{és} \quad \mathcal{F}[f^{(n)}(x)](\omega) = (i\omega)^n F(\omega).$$

Fourier transzformáció tulajdonságai

Definíció

Legyen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ adottak, ekkor az

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x - t)dt$$

függvényt f és g **konvolúciójának** nevezzük. (Feltesszük, hogy a fenti integrál létezik.)

Tétel

Feltéve, hogy a megfelelő integrálok léteznek, két függvény konvolúciójának a Fourier transzformáltja a Fourier transzformáltak szorzata, azaz,

$$\mathcal{F}[(f * g)(x)](\omega) = \mathcal{F}[f(x)](\omega) \cdot \mathcal{F}[g(x)](\omega).$$

Fourier transzformáció, Feladatok

- 1 Defináljuk a következő transzformációkat, eltolás, moduláció, dilatáció:

$$(\tau_h f)(x) = f(x+h), \quad (\nu_\Omega f)(x) = e^{i\Omega x} f(x), \quad (\delta_a f)(x) = f(ax).$$

Írjuk fel az előbbi transzformációk Fourier transzformáltját csak $\mathcal{F}[f]$ -et felhasználva!

- 2 Írjuk fel az előbbi transzformációk inverz Fourier transzformáltját csak $\mathcal{F}^{-1}[F]$ -et felhasználva!
- 3 Az $\mathcal{F}[f] = F$ függvény segítségével fejezzük ki a következő függvények Fourier transzformáltját!

$$f(2t-3), \quad f(2(x-3)), \quad (x^2 f(3x))'', \quad x^3 f''(x-3).$$

Definíció

Legyen $T > 0$ és $N \in \mathbb{N}$ adott, $f_n = f(t_n)$, $t_n := nT$, $n = 0, \dots, N-1$ egy vektor, ekkor az

$$F_k = F(\omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\omega_k t_n}, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{NT}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

vektort az f_n vektor **diszkrét Fourier transzformáltjának** nevezzük.
Röviden: DFT.

Diszkrét Fourier transzformáció

A numerikus számítások érdekében előnyösebb mátrixos alakba írni az előbbi egyenleteket.

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & \dots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & \dots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \\ 1 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & W^{3(N-1)} & \dots & W^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix},$$

ahol $W = e^{\frac{-i2\pi}{N}}$.

Példa

Tekintsük a következő folytonos jelet:

$$f(t) = 5 + 2 \cos(2\pi t - 90^\circ) + 3 \cos(4\pi t).$$

Vegyünk minden másodpercenként négy mintát $t = 0$ -tól $t = \frac{3}{4}$ -ig. Ekkor $T = \frac{1}{4}$, és

$$f_k = 5 + 2 \cos(k \frac{\pi}{2} - 90^\circ) + 3 \cos(k\pi),$$

így

$$f_0 = 8, \quad f_1 = 4, \quad f_2 = 8, \quad f_3 = 0.$$

Ekkor $W = e^{\frac{-i2\pi}{4}} = -i$, ezért

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -4i \\ 12 \\ 4i \end{bmatrix}$$

Definíció

A korábbi jelölések felhasználásával az

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{(i\frac{2\pi}{N}nk)}$$

vektort az F_n vektor **inverz Fourier transzformáltjának** nevezzük.

Mátrixos jelöléssel az eredeti mátrix $\frac{1}{N}$ szeresének komplex konjugáltját kell venni.

Motivációs példa

Ha f hossza N , akkor F kiszámításához N^2 szorzásra van szükségünk. Tegyük fel, hogy a jel egy egyvonalas A hang, melynek frekvenciája 440 Hz. Gyakorlati tapasztalat azt mutatja, hogy a mintavételezés frekvenciáját legalább kétszer akkorára kell választani, mint a feldolgozandó jel maximális frekvenciája. Tehát $N = 880$ lesz ebben az esetben. A DFT kiszámításához $4.4 \cdot 10^4$ db szorzásra van szükségünk. Ha egyszerre több hangszer szólal meg hosszabb ideig, akkor ez a számítási mennyiség valós időben még nagyon gyors számítógéppel sem kezelhető. Hasonló példákat lehet hozni a képfeldolgozás, adattömörítés, stb. területekről. Ez teszi szükségessé a számítási mennyiség lényeges csökkentését.

A múlt század 60-as éveitől kezdve több algoritmust fejlesztettek ki a gyors Fourier transzformációra. Ezek mindegyike arra támaszkodik, hogy a DFT kiszámítása közben a szorzások egy része fölösleges, mert már korábban elvégeztük az eljárás során.

Gyors Fourier transzformáció

Legyen $W_N = e^{\frac{-i2\pi}{N}}$, ekkor

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{\frac{-i2\pi}{N} nk} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n W_N^{nk}.$$

Az eljárás során W_N^{nk} többször ugyanazt az értéket veszi fel. Először is W_N N különböző értéket vehet fel, hiszen periodikus, másrészt, az nk szorzat n és k függvényében kétféleképpen fordulhat elő.

A továbbiakban feltesszük, hogy N páros. A szummát két részre bontjuk, az elsőben szerepelnek a páros, a másodikban a páratlan indexű tagok, $m = \frac{n}{2}$ és $m = \frac{n-1}{2}$.

$$F_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m} W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m+1} W_N^{(2m+1)k} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m} W_{\frac{N}{2}}^{mk} + W_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m+1} W_{\frac{N}{2}}^{mk},$$

mivel $W_N^{2mk} = e^{-i\frac{2\pi}{N} 2mk} = e^{-i\frac{2\pi}{\frac{N}{2}} mk} = W_{\frac{N}{2}}^{mk}$. Így az N hosszúságú vektor transzformáltja előállítható $\frac{N}{2}$ hosszúságú transzformáltak segítségével.

Tehát

$$F_k = G_k + W_N^k H_k$$

alakba írható, ahol G a páros indexű, H a páratlan indexű adatoknak felel meg, mindkettő $\frac{N}{2}$ dimenziós vektorok transzformációiból állítható elő, és k -ban periodikusak.

Az előzőeket figyelembe véve érdemes $N = 2^j$ számosságú mintát venni, így többször végre lehet hajtani a redukciót.

Bebizonyítható, hogy a gyors Fourier transzformáció számításigénye $\frac{N}{2} \log_2 N$.

N	N^2 (DFT)	$\frac{N}{2} \log_2 N$ (GyFT)	Megtakarítás
32	1024	80	92%
256	65536	1024	98%
1024	1048576	5120	99.5%

Gyors Fourier transzformáció, Példa

$N = 8$ esetén

$$W_8^0 = 1, \quad W_8^1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}} =: a, \quad W_8^2 = a^2 = -i, \quad W_8^3 = a^3 = -ia,$$

$$W_8^4 = a^4 = -1, \quad W_8^5 = a^5 = -a, \quad W_8^6 = a^6 = i, \quad W_8^7 = a^7 = ia.$$

Így

$$F_0 = G_0 + W_8^0 H_0$$

$$F_1 = G_1 + W_8^1 H_1$$

$$F_2 = G_2 + W_8^2 H_2$$

$$F_3 = G_3 + W_8^3 H_3$$

$$F_4 = G_0 + W_8^4 H_0 = G_0 - W_8^0 H_0$$

$$F_5 = G_1 + W_8^5 H_1 = G_1 - W_8^1 H_1$$

$$F_6 = G_2 + W_8^6 H_2 = G_2 - W_8^2 H_2$$

$$F_7 = G_3 + W_8^7 H_3 = G_3 - W_8^3 H_3$$