

Matematika mérnököknek 2

[Ismétlés](#)

[Numerikus differenciálás](#)

[Diffegyenletek](#)

[Fourier](#)

[Matlab](#)

[Projekt](#)

[Desc](#) [Linkek](#)

Ismétlés

Diff-számítás

Határozatlan integrál

Matematika mérnököknek 2

Diff-számítás

Desc [Summa](#)

Fa [1](#)

Fa [2](#)

[Ismétlés](#)

Desc Summa

A pillanatnyi változási gyorsaság, az érintő x tengellyel bezárt szögének tangense, meredekség.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Deriválás és műveletek (legyen $C \in \mathbb{R}$):

$$(Cf)' = cf'$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad g \neq 0$$

$$f(g)' = f'(g)g'$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Elemi függvények:

$$C' = 0$$

$$(x^C)' = Cx^{C-1}$$

$$\sin' = \cos$$

$$\cos' = -\sin$$

$$\tan' = \frac{1}{\cos^2}$$

$$\cot' = -\frac{1}{\sin^2}$$

$$(C^x)' = \log(C)C^x \quad C > 0$$

$$\log(|x|)' = \frac{1}{x} \quad x \neq 0$$

Diff-számítás

Fa 1

Határozza meg az alábbi függvény deriváltját:

$$e^{xe^{\sin(x)}}$$

Mo 1

Diff-számítás

Mo 1

$$e^{xe^{\sin(x)}}(e^{\sin(x)} + xe^{\sin(x)}\cos(x))$$

Fa 1

Diff-számítás

Fa 2

Határozza meg az alábbi függvény deriváltját:

$$\frac{\log(x \log(x))}{x^2}$$

Mo 2

Diff-számítás

Mo 2

$$\frac{\log(x) + 1}{x^3 \log(x)} - \frac{2 \log(x \log(x))}{x^3}$$

Fa 2

Diff-számítás

Határozatlan integrál

Desc [Summa](#)

Fa [1](#)

Fa [2](#)

Fa [3](#)

Fa [e^{ax} sin\(x\)](#)

Fa [e^{ax} cos\(x\)](#)

[Ismétlés](#)

Desc Summa

Határozatlan integrál, anti-derivált.

$$\left(\int f\right)' = f$$

Tulajdonságok $C, D \in \mathbb{R}$:

$$\int (Cf + g) = C \int f + \int g$$

$$\int C dx = Cx + D$$

$$\int x^C dx = \frac{x^{C+1}}{C+1} + D \quad C \neq -1$$

$$\int \sin = -\cos + C$$

$$\int \cos = \sin + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C \quad x \neq 0$$

$$\int C^x dx = \frac{C^x}{\log C} + D \quad C > 0, C \neq 1$$

$$\int (f'g + fg') = fg + C$$

$$\int f(g)g' = \left(\int f\right)(g) + C$$

Határozatlan integrál

Fa 1

Számoljuk ki a következő integrált:

$$\int x e^{x^2} dx$$

Mo 1

Határozatlan integrál

Mo 1

Mivel $\frac{de^{x^2}}{dx} = 2xe^{x^2}$, ezért a megoldás:

$$\frac{e^{x^2}}{2} + C.$$

Fa 1

Határozatlan integrál

Fa 2

Számoljuk ki a következő integrált:

$$\int \sin(x)e^x dx$$

Mo 2

Határozatlan integrál

Parciális:

$$\begin{aligned}\int \sin(x)e^x dx &= -\cos(x)e^x - \int -\cos(x)e^x dx = \\ &= -\cos(x)e^x + \int \cos(x)e^x dx\end{aligned}$$

$$\int \sin(x)e^x dx = \sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x dx$$

Összeadva:

$$\int \sin(x)e^x dx = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2}e^x + C$$

Fa 3

Számoljuk ki a következő integrált:

$$\int \cos^3(x) dx$$

Mo 3

Határozatlan integrál

Helyettesítés: $u = \sin(x)$

$$\begin{aligned}\int \cos^3(x) dx &= \int (1 - \sin^2(x)) \cos(x) dx = \\ \int 1 - u^2 du &= u - \frac{u^3}{3} + C = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + C\end{aligned}$$

Fa $e^{ax} \sin(x)$

Legyen $0 \neq a \in \mathbb{R}$:

$$\int e^{au} \sin(u) du = ?$$

Mo $e^{ax} \sin(x)$

Határozatlan integrál

Mo $e^{ax} \sin(x)$

parciális integrálás:

$f = e^{au}$, $g' = \sin(u)$:

$$\begin{aligned}\int e^{au} \sin(u) du &= -e^{au} \cos(u) - \int a e^{au} (-\cos(u)) du = \\ &= -e^{au} \cos(u) + a \int e^{au} \cos(u) du\end{aligned}$$

$f' = e^{au}$, $g = \sin(u)$:

$$\begin{aligned}\int e^{au} \sin(u) du &= \frac{e^{au}}{a} \sin(u) - \int \frac{e^{au}}{a} \cos(u) du = \\ &= \frac{e^{au}}{a} \sin(u) - \frac{1}{a} \int e^{au} \cos(u) du =\end{aligned}$$

szorozzuk meg a^2 -el a másodikat és adjuk össze az elsővel:

$$\begin{aligned}(1 + a^2) \int e^{au} \sin(u) du &= a e^{au} \sin(u) - e^{au} \cos(u) \implies \\ \int e^{au} \sin(u) du &= \frac{e^{au}(a \sin(u) - \cos(u))}{1 + a^2}\end{aligned}$$

Fa $e^{ax} \sin(x)$

Határozatlan integrál

Fa $e^{ax} \cos(x)$

Legyen $0 \neq a \in \mathbb{R}$:

$$\int e^{au} \cos(u) du = ?$$

Mo $e^{ax} \cos(x)$

Határozatlan integrál

Mo $e^{ax} \cos(x)$

Az előző feladatban összadás helyett vonjunk ki.

$$\int e^{au} \cos(u) du = \frac{e^{au}(\sin(u) + a \cos(u))}{1 + a^2}$$

Fa $e^{ax} \cos(x)$

Határozatlan integrál

Numerikus differenciálás

$$f_a = \sin\left(\frac{a}{x}\right)$$

$$f_a = \sin\left(\frac{a}{x}\right), \text{ szimder}$$

Matematika mérnököknek 2

Fa $\sin(\frac{a}{x})$

Tegyük fel, hogy az $f(x) = \sin(\frac{100}{x})$ függvény értékei $h = 0.001$ lépésközzel adottak a $[0.5, 2\pi]$ intervallumon. Deriváljuk numerikusan a függvényt! Ábrázoljuk az eredményt a függvény tényleges deriváltjával közös ábrán. Magyarázzuk meg az eltérést a $\frac{\sin(3x)}{x}$ fv-nél látottakhoz képest.

Mo $\sin(\frac{a}{x})$

Numerikus differenciálás

Mo $\sin\left(\frac{a}{x}\right)$

Egy lehetséges megoldás:

```
function numdiff(f, df, a, b, h)
    x=a:h:b;
    y=f(x);
    d1=diff(y)./diff(x);
    figure; plot(x(1:end-1),d1)
    fd1=df(x);
    delta=sum(abs(fd1(1:end-1)-d1));
    title(sprintf('az eltérés-összeg: %f\n',delta))
    hold on; plot(x,fd1); hold off
end
```

Fa $\sin\left(\frac{a}{x}\right)$

Numerikus differenciálás

Fa $\sin(\frac{a}{x})$, szimder

Tegyük fel ismét, hogy az $f(x) = \sin(\frac{100}{x})$ függvény értékei $h = 0.001$ lépésközzel adottak a $[0.5, 2\pi]$ intervallumon. Deriváljuk numerikusan a függvényt, ám most a derivált közelítését az alábbi formulával számoljuk:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Mo $\sin(\frac{a}{x})$, szimder

Numerikus differenciálás

Mo $\sin(\frac{a}{x})$, szimder

Egy lehetséges megoldás:

```
function numdiffSym(f, df, a, b, h)
    x=a:h:b;
    y=f(x);
    d1=(y(3:end)-y(1:end-2))/(2*h);
    figure; plot(x(2:end-1),d1)
    fd1=df(x);
    delta=sum(abs(fd1(2:end-1)-d1));
    title(sprintf('az eltérés-összeg: %f\n', delta));
    hold on; plot(x,fd1); hold off
end
```

Fa $\sin(\frac{a}{x})$, szimder

Numerikus differenciálás

Diffegyenletek

Osztályozás

Szétválasztható

Elsőrendű, homogén lineáris

Elsőrendű, inhomogén lineáris

Szöveges feladatok

Kezdetiérték feladatok

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Bernoulli

$$y'' = a_1 y' + a_0 y$$

Matematika mérnököknek 2

Osztályozás

Desc Summa

Fa 1

Fa 2

Fa 3

Fa 4

Diffegyenletek

Desc Summa

Egy differenciálegyenlet

- *közönséges*: ha csak egyetlen változóra vonatkozó deriváltakat tartalmaz. Egyébként *parciális*.
- *rendje*: a benne szereplő ismeretlen függvény legmagasabb rendű deriváltja.
- *lineáris*: ha benne szereplő ismeretlen függvény illetve deriváltjai csak első hatványon szerepelnek, azaz ha

$$\sum_{k=0}^n P_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} = Q(x)$$

alakú (vagy ilyenre hozható), ahol $P_k(x)$ csak x -től függ. Egyébként *nemlineáris*-nak nevezzük.

Közönséges, elsőrendű, nemlineáris differenciálegyenlet:

$$y'^2 = \sin(x\sqrt{y}) + 123 + y$$

egy közönséges, másodrendű, lineáris differenciálegyenlet.

$$y'' + \sin(x) = 123 + y$$

Parciális, elsőrendű, nemlineáris differenciálegyenlet:

$$(f'_x)^2 - (f'_y)^2 = xy$$

Parciális, másodrendű, lineáris differenciálegyenlet:

$$f''_{xx} - f''_{xy} = xy$$

Osztályozás

Fa 1

Állapítsa meg az alábbi differenciálegyenlet típusát:

$$\frac{dy}{dx} = x + 4$$

Mo 1

Osztályozás

Mo 1

közönséges, elsőrendű, lineáris.

Fa 1

Osztályozás

Fa 2

Állapítsa meg az alábbi differenciálegyenlet típusát:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a \quad a \in \mathbb{R}$$

Mo 2

Osztályozás

Mo 2

közönséges, másodrendű, lineáris.

Fa 2

Osztályozás

Fa 3

Állapítsa meg az alábbi differenciálegyenlet típusát:

$$y'' = y' \sin(x) - \cos(x)$$

Mo 3

Osztályozás

Mo 3

közönséges, másodrendű, lineáris.

Fa 3

Osztályozás

Fa 4

Állapítsa meg az alábbi differenciálegyenlet típusát:

$$2y'' + 3y' + 4\sqrt{y} = 0$$

Mo 4

Osztályozás

Mo 4

közönséges, másodrendű, nemlineáris.

Fa 4

Osztályozás

Szétválasztható

Desc Summa

Fa 1.feladat

Fa 2.feladat

Fa 3.feladat

Fa 4.feladat

Fa 5.feladat

Fa 6.feladat

Diffegyenletek

Desc Summa

Egy differenciálegyenletet szétválasztható változójúnak nevezünk, ha

$$g(y)y' = f(x)$$

alakú, vagy ilyenre hozható. Vagyis az x és y változók elkülöníthetőek (szétválasztható, szeparálható)

A fenti alak 'megoldása':

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

A következő speciális esetekkel gyakran találkozunk:

$$y' = f(x) \quad y = \int f(x)dx$$

$$y' = g(y) \quad x = \int \frac{1}{g(y)}dy$$

$$y' = f(x)g(y) \quad \int f(x)dx = \int \frac{1}{g(y)}dy$$

Szétválasztható

Fa 1.feladat

Oldja meg a

$$\frac{du}{dy} = u(y)y$$

differenciálegyenletet!

Mo 1.feladat

Szétválasztható

Mo 1.feladat

$$\frac{u'}{u} = y$$

$$\log(|u|)' = y$$

$$\log(|u|) = \frac{y^2}{2} + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$|u| = e^C e^{\frac{y^2}{2}}$$

$$u = C e^{\frac{y^2}{2}} \quad C \in \mathbb{R}$$

Fa 1.feladat

Szétválasztható

Fa 2.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$z^3 + \frac{du}{dz}(u+1)^2 = 0$$

Mo 2.feladat

Szétválasztható

Mo 2.feladat

$$u'(u+1)^2 = -z^3$$

$$\int (u+1)^2 du = \int -z^3 dz$$

$$\frac{(u+1)^3}{3} = \frac{-z^4}{4} + C \quad u\text{-t kifejezve:}$$

$$u = \left(\frac{-3z^4}{4} + C \right)^{\frac{1}{3}} - 1$$

Fa 2.feladat

Szétválasztható

Fa 3.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$y' = 2 \cos(x) + 3 \sin(x)$$

Mo 3.feladat

Szétválasztható

Mo 3.feladat

$$y = 2 \sin(x) - 3 \cos(x)$$

Fa 3.feladat

Szétválasztható

Fa 4.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$y' = y^2$$

Mo 4.feladat

Szétválasztható

Mo 4.feladat

$$x = \int \frac{1}{y^2} dy$$

$$x = -\frac{1}{y} + C$$

$$y = -\frac{1}{x - C}$$

Fa 4.feladat

Szétválasztható

Fa 5.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$y' = ay \quad a \in \mathbb{R}$$

Mo 5.feladat

Szétválasztható

Mo 5.feladat

$$\begin{aligned}t &= \int \frac{1}{ay} dy \\t &= \frac{\log(|y|)}{a} + C \\e^{at} &= e^C |y| \\y &= Ce^{at} \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Fa 5.feladat

Szétválasztható

Fa 6.feladat.

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$(1 + x)yy' = 1$$

Mo 6.feladat

Szétválasztható

Mo 6.feladat.

szétválasztható

$$yy' = \frac{1}{1+x}$$

$$\int y dy = \int \frac{1}{1+x} dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \log(|1+x|) + C$$

$$y = \pm \sqrt{2 \log(|1+x|) + C}$$

Fa 6.feladat

Szétválasztható

Elsőrendű, homogén lineáris

Desc [Summa](#)

Fa [1](#)

Fa [2](#)

[Diffegyenletek](#)

Desc Summa

$$y' + A(t)y = 0$$

megoldása (lásd: ??):

$$y = Ce^{-\int A(t)dt} \quad C \in \mathbb{R}$$

Speciálisan, ha $A(t) = A$ konstans:

$$y = Ce^{-At} \quad C \in \mathbb{R}$$

Elsőrendű, homogén lineáris

Fa 1

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$y' + 10y = 0$$

Mo 1

Elsőrendű, homogén lineáris

Mo 1

$$y = Ce^{-10t} \quad C \in \mathbb{R}$$

Fa 1

Elsőrendű, homogén lineáris

Fa 2

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$y' = \log(t)y$$

Mo 2

Elsőrendű, homogén lineáris

$$\begin{aligned}\int \log(t) dt &= \log(t)t - \int 1 dt = \\ &= \log(t)t - t + C \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \log(|y|) \quad C \in \mathbb{R}$$

vagyis:

$$y = Ce^{t(\log(t)-1)} \quad C \in \mathbb{R} \quad (rv)$$

Elsőrendű, inhomogén lineáris

Fa 1. feladat

Fa 2. feladat

Diffegyenletek

Fa 1. feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$y' = y + x + 2$$

Mo 1. feladat

Elsőrendű, inhomogén lineáris

Mo 1. feladat

elsőrendű, lineáris, inhomogén

$y = Ce^x$ a homogén megoldása

$C = C(x)$ változó variálása

$$C'(x)e^x + C(x)e^x = C(x)e^x + x + 2$$

$C'(x) = (x + 2)e^{-x}$ parciálisan integráljuk

$$C(x) = -(x + 2)e^{-x} + \int e^{-x} dx = -(x + 3)e^{-x} + K$$

$$y = (-(x + 3)e^{-x} + K)e^x$$

Ellenőrizzük géppel is a megoldást! [kód](#)

Fa 1. feladat

Elsőrendű, inhomogén lineáris

Fa 2. feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$xy' - 2y = 2x^4$$

Mo 2. feladat

Elsőrendű, inhomogén lineáris

Mo 2. feladat

elsőrendű, lineáris, inhomogén

$$y' = \frac{2}{x}y + 2x^3$$

$y = Cx^2$ a homogén megoldása

$C = C(x)$ változó variálása

$$C'(x)x^2 + \underline{C(x)2x} = \underline{\frac{2}{x}C(x)x^2} + 2x^3$$

$$C'(x) = 2x \implies C(x) = x^2 + K$$

$$y = (x^2 + K)x^2 \quad K \in \mathbb{R} \quad (mod)$$

Ellenőrizzük géppel is a megoldást!

Fa 2. feladat

Elsőrendű, inhomogén lineáris

Szöveges feladatok

Fa keverés

Fa görbe

Fa levegő

Fa 4

Fa rádium

Fa hűlés

Diffegyenletek

Fa keverés

Egy 10 liter vizet tartalmazó edénybe *literenként* 0.3 kg sót tartalmazó oldat folyik be folyamatosan 2 liter/perc sebességgel. Az edénybe belépő folyadék összekeveredik a vízzel és a keverék 2 liter/perc sebességgel kifolyik az edényből. Mennyi só lesz az edényben 5 perc múlva?

Mo keverés

Szöveges feladatok

Mo keverés

Jelölje $s(t)$ a tartálybeli só mennyiségét t -edik időpillanatban. Nézzük mi történik a $[t, t + \Delta t]$ intervallumban:

$$s(t + \Delta t) = s(t) + \Delta t \cdot 2 \cdot 0.3 - \Delta t \cdot 2 \frac{s(t)}{10}$$

A $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenetet véve kapjuk:

$$s' = 0.6 - 0.2s$$

$$s(t) = Ce^{-0.2t} \quad \text{homogén}$$

$$C'(t)e^{-0.2t} - 0.2C(t)e^{-0.2t} = 0.6 - 0.2C(t)e^{-0.2t} \quad \text{variálás}$$

$$C'(t) = 0.6e^{0.2t} \implies C(t) = 3e^{0.2t} + K$$

$$s(t) = (3e^{0.2t} + K)e^{-0.2t} = 3 + Ke^{-0.2t}$$

$$s(0) = 0 = 3 + K, \quad K = -3 \implies s(5) = 3 - \frac{3}{e} \approx 1.8964$$

Fa keverés

Szöveges feladatok

Fa görbe

Keressük meg azokat a görbéket, melyek esetében bármely érintőnek az x -tengellyel vett metszéspontjának x -koordinátája fele akkora, mint az érintési ponté.

Mo görbe

Szöveges feladatok

Mo görbe

$y(x)$ a keresett függvény

x_0 egy tetszőleges pont

$$y_0 = y(x_0), \quad y'_0 = y'(x_0)$$

$y_0 + y'_0(x - x_0)$ az érintő egyenlete

$$x_m = x_0 - \frac{y_0}{y'_0} \quad \text{a metszéspont}$$

$$\frac{x_0}{2} = x_0 - \frac{y_0}{y'_0} \quad \text{a feltétel miatt}$$

$$\frac{x}{2} = x - \frac{y}{y'} \quad \text{a diffegyenlet}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = 2 \int \frac{1}{x} dx \quad \text{szétválasztható}$$

$$\log(|y|) = 2 \log(|x|) + C$$

$$y = Dx^2 \quad \text{adódik} \quad D \neq 0$$

Fa görbe

Szöveges feladatok

Fa levegő

Egy 200 m^3 térfogatú szobában 0.15% szén-dioxid van. A ventilátor percenként 20 m^3 0.04% CO_2 tartalmú levegőt fúj a helyiségbe. Mennyi idő múlva csökken a szoba levegőjében a CO_2 mennyiség a harmadára?

Mo levegő

Szöveges feladatok

Mo levegő

Legyen $y(t)$ a CO_2 mennyisége (m^3) a t -edik időpillanatban. Mi történik a $[t, t + \Delta t]$ -ben?

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t \cdot 20 \cdot 0.04 - \Delta t \cdot 20 \cdot \frac{y(t)}{200}$$

$$y' = 0.8 - 0.1y$$

$$y = Ce^{-0.1t} \text{ homogén, variálás}$$

$$C'(t)e^{-0.1t} - 0.1C(t)e^{-0.1t} = 0.8 - 0.1C(t)e^{-0.1t}$$

$$C(t) = 0.8e^{0.1t} \implies C(t) = 8e^{0.1t} + K$$

$$y(t) = 8 + Ke^{-0.1t}$$

$$y(0) = 30 = 8 + K, \quad K = 22$$

$$y(t) = 10 \implies t = 23.979$$

Fa levegő

Szöveges feladatok

Fa 4

Egy 100 liter vizet tartalmazó edényben 0.5 kg só van oldott állapotban. Az edénybe $5 \frac{\text{liter}}{\text{perc}}$ sebességgel tiszta víz folyik be, és az oldat ugyanilyen sebességgel a túlfolyón távozik. Mennyi lesz az oldatban levő só mennyisége 1 óra múlva?

Mo 4

Szöveges feladatok

Jelölje $s(t)$ a tartálybeli só mennyiségét t -edik időpillanatban. Legyen Δt egy "elegendően" kicsiny időtartam. Ekkor

$$s(t + \Delta t) = s(t) - \frac{s(t)5\Delta t}{100}$$

A $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenetet véve kapjuk a

$$s' = -\frac{5}{100}s$$

differenciálegyenletet, melynek általános megoldása

$$s(t) = Ce^{-\frac{5}{100}t}$$

melyből,

$$s(0) = 0.5 = Ce^0 = C$$

adódik, ahonnan

$$s(60) = \frac{0.5}{e^3} \approx 0.025\text{kg}.$$

Fa rádium

A rádium bomlási sebessége arányos a pillanatnyi rádium mennyiséggel. Tudjuk, hogy a bomlás következtében a rádium mennyisége 1000 év alatt felére csökken. Hány százaléka bomlik el az anyagnak 100 év alatt?

Mo rádium

Szöveges feladatok

Mo rádium

Jelölje $m(t)$ a rádium atomok számát t időpillanatban. Ha Δt egy pozitív szám, akkor a

$$\frac{m(t) - m(t + \Delta t)}{\Delta t}$$

menyiség az (átlagos) bomlási sebesség a $[t, t + \Delta t]$ intervallumon. $\Delta t \rightarrow 0$ -t véve, megkapjuk a pillanatnyi bomlási sebességet, ami a feltevés szerint arányos a pillanatnyi anyagmennyiséggel:

$$m' = \beta m$$

$$m(t) = Ce^{\beta t} \quad C \in \mathbb{R}$$

$$m(0) = C$$

$$m(1000) = Ce^{\beta 1000} = 0.5C$$

$$\beta = \frac{\log(0.5)}{1000}$$

$$\frac{m(100)}{m(0)} = e^{\frac{\log(0.5)}{10}} \approx 0.933$$

Azaz kb. 6.67%-a bomlik el 100 év alatt a rádiumnak.

Fa rádium

Szöveges feladatok

Fa hűlés

Egy test 10 perc alatt 100 C fokról 60 C fokra hűlt le. A környező levegő hőmérsékletét konstans 20 C foknak tekinthetjük. Mikor hűl le a test 25 C fokra, ha a test hűlésének sebessége egyenesen arányos a test és az őt körülvevő levegő hőmérsékletének különbségével? (bővebben: [Newton law of cooling](#))

Mo hűlés

Szöveges feladatok

Mo hűlés

Legyen a test hőmérséklete $h(t)$ a t -edik időpillanatban:

$$h'(t) = K(h(t) - 20) \quad \text{a feltételek és hűlés-törvény miatt}$$

$$(h(t) - 20)' = K(h(t) - 20) \quad \text{homogén, megoldása:}$$

$$h(t) = Ce^{Kt} + 20$$

$$h(0) = 100 \implies C = 80$$

$$h(10) = 60, \quad 80e^{K10} + 20 = 60, \quad K = \frac{\log(0.5)}{10}$$

$$h(T) = 80e^{T \frac{\log(0.5)}{10}} + 20 = 80 \cdot 2^{-\frac{T}{10}} + 20 = 25$$

$$2^{-\frac{T}{10}} = 2^{-4}, \quad T = 40$$

Fa hűlés

Szöveges feladatok

Kezdetiérték feladatok

Fa 1

Fa 2

Fa 3

Fa 4

Fa 5

Diffegyenletek

Fa 1

Oldja meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$\dot{x} = 2x - t, \quad x(0) = 1$$

Mo 1

Kezdetiérték feladatok

elsőrendű, lineáris, inhomogén,

(homogén mo. \rightarrow általános mo. \rightarrow konstans meghatározása)

$$\dot{x} = 2x \quad \text{homogén:}$$

$$x = Ce^{2t} \quad \text{variálás:}$$

$$C'e^{2t} + C2e^{2t} = 2Ce^{2t} - t$$

$$C'(t) = -te^{-2t} \quad \text{parciális int:}$$

$$\begin{aligned} & \int -te^{-2t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int t(-2e^{-2t}) dt = \frac{1}{2} te^{-2t} - \frac{1}{2} \int e^{-2t} dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} te^{-2t} + \frac{1}{4} e^{-2t} + K$$

$$x = \left(\frac{1}{2} te^{-2t} + \frac{1}{4} e^{-2t} + K \right) e^{2t}$$

$$x(0) = 1 = (0 + 0.25 + K) \cdot 1 \implies K = \frac{3}{4}$$

Fa 2

Oldja meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = xy \quad y(0) = 1$$

Mo 2

Kezdetiérték feladatok

A homogén elsőrendű lineárisak szétválaszthatóak, ezért a megoldás:

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

ezért

$$y(0) = C \cdot 1 = C = 1$$

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}$$

Fa 3

Oldja meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$y'(t) = -y(t) + \cos(t), \quad y(0) = 0$$

Mo 3

Kezdetiérték feladatok

elsőrendű, lineáris, inhomogén,

(homogén mo. \rightarrow általános mo. \rightarrow konstans meghatározása)

$y(t) = Ce^{-t}$ a homogén megoldása, változó variálása:

$$C'(t)e^{-t} + C(t)(-1)e^{-t} = -C(t)e^{-t} + \cos(t)$$

$C'(t) = e^t \cos(t)$ parciális int, kétféleképpen:

$$\int e^t \cos(t) dt = e^t \sin(t) - \int e^t \sin(t) dt$$

$$\int e^t \cos(t) dt = e^t \cos(t) + \int e^t \sin(t) dt$$

$$\int e^t \cos(t) dt = \frac{e^t(\sin(t) + \cos(t))}{2} + K$$

$$y(t) = \frac{\sin(t) + \cos(t)}{2} + Ke^t$$

$$y(0) = 0 = \frac{0 + 1}{2} + K \cdot 1 \implies K = -0.5$$

$$y(t) = \frac{\sin(t) + \cos(t) - e^t}{2}$$

Fa 4

Oldja meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$\dot{x} + t^2 x = t^2, \quad x(0) = 2$$

Mo 4

Kezdetiérték feladatok

$\dot{x} = -t^2 x$ a homogén rész, melynek megoldása:

$$x(t) = Ce^{-\frac{t^3}{3}} \quad \text{variálás:}$$

$$C'(t)e^{-\frac{t^3}{3}} + C(t)(-t^2)e^{-\frac{t^3}{3}} = -t^2 C(t)e^{-\frac{t^3}{3}} + t^2$$

$$C'(t) = t^2 e^{\frac{t^3}{3}} = \left(e^{\frac{t^3}{3}} \right)' \implies$$

$$C(t) = e^{\frac{t^3}{3}} + K$$

$$y(t) = 1 + Ke^{-\frac{t^3}{3}}$$

$$y(0) = 2 = 1 + K \cdot 1 \implies K = 1$$

Adjuk meg a

$$e^{y-x} + y'e^{x-y} = 0$$

egyenlettel megadott görbesereg origón átmenő példányát.

1.megoldás: szokásos módon szeparábilis-ként oldjuk meg

2.megoldás: látjuk, hogy az $y(x) = x$ egy megoldás, és az egyenletet $y' = f(x, y)$ alakban felírva felfedezhetjük, hogy teljesülnek a Picard-Lindelöf feltételei (f'_y folytonos), így megvan az egyetlen megoldás.

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Desc [Summa](#)

Fa [1.feladat](#)

Fa [2.feladat](#)

Diffegyenletek

Desc Summa

$f(tx, ty) = f(x, y)$ változóiban homogén

$$\iff f(x, y) = h\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{mert:}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f\left(x \frac{x_0}{x}, y \frac{x_0}{x}\right) = \\ &= f\left(x_0, x_0 \frac{y}{x}\right) = h\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Az ilyenek szeparábilisra vezetnek:

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{helyettesítés}$$

$$u'x + u = h(u) \quad \text{szeparábilis...}$$

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Fa 1.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

Mo 1.feladat

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Mo 1.feladat

$$u = \frac{y}{x}$$

$$u'x + u = u + \frac{1}{u}$$

$$uu' = \frac{1}{x}$$

$$\int u \mathrm{d}u = \int \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

$$\frac{u^2}{2} = \log(|x|) + C$$

$$y = \pm x \left(\log(x^2) + C \right)^{\frac{1}{2}}$$

Fa 1.feladat

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Fa 2.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$xy' + y \log(x) = y \log(y)$$

Mo 2.feladat

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Mo 2.feladat

$$e^u = \frac{y}{x}$$

$$y' = e^u u' x + e^u = e^u u$$

$$u'x + 1 = u \quad \text{szétválasztható:}$$

$$\frac{u'}{u-1} = \frac{1}{x} \quad \text{integrálva:}$$

$$\log(|u-1|) = \log(|x|) + C$$

$$|u-1| = D|x| \quad D > 0$$

$$u = Dx + 1 \quad D \in \mathbb{R}$$

$$y = xe^{Dx+1}$$

Fa 2.feladat

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Bernoulli

Desc Summa

Fa 1.feladat

Fa 2.feladat

Fa 3.feladat

Fa 4.feladat

Diffegyenletek

Desc Summa

$$y' = f_1 y + f_a y^a \quad \text{alakú, } a \neq 0, 1$$

Keressük a megoldást u^b alakban:

$$b u^{b-1} u' = f_1 u^b + f_a u^{ab}$$

$$b - 1 = ab \quad \implies \quad b = \frac{1}{1-a}$$

$$b u' = f_1 u + f_a$$

$$u' = (1-a) f_1 u + (1-a) f_a$$

Összefoglalva:

$$u' = (1-a) f_1 u + (1-a) f_a \quad (\text{ber})$$

$$y = u^{\frac{1}{1-a}}$$

Bernoulli

Fa 1.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$xy^2y' = x^2 + y^3$$

Mo 1.feladat

Bernoulli

Mo 1.feladat

Bernoulli, $a = -2$ -vel

$$y' = xy^{-2} + \frac{1}{x}y$$

$$u' = 3\frac{1}{x}u + 3x$$

$$u' = 3\frac{1}{x}u \quad \text{homogén:}$$

$$u = Cx^3 \quad \text{változó variálás:}$$

$$C'(x)x^3 + C(x)3x^2 = 3x + 3C(x)x^2$$

$$C'(x) = 3x^{-2}, \quad C(x) = -3x^{-1} + K$$

$$u = x^2(Kx - 3)$$

$$y = \left(x^2(Kx - 3)\right)^{\frac{1}{3}}$$

Fa 1.feladat

Bernoulli

Fa 2.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$tu' + 4u = t^4 u^2 \quad t > 0$$

Mo 2.feladat

Bernoulli

Mo 2.feladat

Az eredeti egy Bernoulli $a = 2$ -vel:

$$u' = -\frac{4}{t}u + t^3u^2$$

tehát $y^{\frac{1}{1-a}} = y^{-1} = u$ -val, a következőt kell megoldani:

$$y' = \frac{4}{t}y - t^3$$

$$y' = \frac{4}{t}y \implies y = Kt^4 \quad \text{változó variálás:}$$

$$K't^4 + K4t^3 = \frac{4}{t}Kt^4 - t^3$$

$$K' = -\frac{1}{t} \implies K(t) = -\log(|t|) + C$$

$$K(t) = C - \log(t) \quad t \text{ pozitív}$$

$$y = t^4(C - \log(t))$$

$$u = \frac{1}{t^4(C - \log(t))}$$

Fa 3.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$u' = u^4 \cos(x) + u \tan(x)$$

Mo 3.feladat

Bernoulli

Mo 3.feladat

Bernoulli $a = 4$ -el:

$$y' = -3 \tan(x)y - 3 \cos(x)$$

$$y' = -3 \tan(x)y \quad \text{homogén:}$$

$$y = Ce^{-3 \int \tan(x) dx}$$

$$\int \tan(x) dx = -\log(|\cos(x)|)$$

$$y = C |\cos(x)|^3$$

$$y = C \cos^3(x) \quad \text{konstans variálás:}$$

$$C'(x) \cos^3(x) - \underbrace{C(x) 3 \cos^2(x) \sin(x)} =$$

$$= \underbrace{-3 \tan(x) C(x) \cos^3(x)} - 3 \cos(x)$$

$$C'(x) \cos^3(x) = -3 \cos(x)$$

$$C'(x) = -3 \frac{1}{\cos^2(x)} C(x) = -3 \tan(x) + K$$

$$y(x) = (-3 \tan(x) + K) \cos^3(x)$$

$$u(x) = ((-3 \tan(x) + K) \cos^3(x))^{-\frac{1}{3}}$$

Fa 4.feladat

Oldja meg következő differenciálegyenletet:

$$3x' + x = (1 - 2t)x^4$$

Mo 4.feladat

Bernoulli

Mo 4.feladat

$$x' = -\frac{1}{3}x + \frac{1-2t}{3}x^4 \quad \text{Bernoulli, } a = 4$$

$$y' = y + (2t - 1) \quad y^{-\frac{1}{3}} = x$$

$$y = C(t)e^t \quad \text{:hom.mo.; C-variálás:}$$

$$C'(t) = e^{-t}(2t - 1) \quad \text{parciális int.:}$$

$$\int e^{-t}(2t - 1)dt = -e^{-t}(2t - 1) - \int -e^{-t}2dt =$$

$$= -e^{-t}(2t - 1) - 2e^{-t} =$$

$$= K - e^{-t}(2t + 1) \quad \text{inhom-ba vissza:}$$

$$y = (K - e^{-t}(2t + 1))e^t$$

$$x = y^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{((K - e^{-t}(2t + 1))e^t)^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{(Ke^t - (2t + 1))^{\frac{1}{3}}} =$$

$$y'' = a_1 y' + a_0 y$$

Desc [Képlet](#)

Diffegyenletek

Desc Képlet

másodrendű, lineáris, homogén, konstans együtthatós:

$$y'' = a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$\lambda^2 = a_1 \lambda + a_0 = 0 \text{ karakterisztikus egyenlet}$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ valósak:}$$

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \text{ az ált. mo.}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \text{ valós:}$$

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_2 t} \text{ az ált. mo.}$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ komplexek:}$$

$$\lambda_{1,2} = a \pm bi$$

$$C_1 e^{at} \cos(bt) + C_2 t e^{at} \sin(bt) \text{ az ált. mo.}$$

$$y'' = a_1 y' + a_0 y$$

Fourier

Sorok

Transzform

Matematika mérnököknek 2

Sorok

Desc Egyben

Fourier

Desc Egyben

pdf

Sorok

Transzform

Desc Egyben

Fourier

Desc Egyben

pdf

Transzform

Matlab

Desc [diff](#)

Fa [másik diff](#)

Desc [függvények megadása](#)

Matematika mérnököknek 2

Desc diff

`diff`

input: $v = [v_1, \dots, v_n]$

output: $dv = [v_2 - v_1, \dots, v_n - v_{n-1}]$

példa:

```
v=[1:7].^2
```

```
v =
```

```
    1    4    9   16   25   36   49
```

```
dv=diff(v)
```

```
dv =
```

```
    3    5    7    9   11   13
```

```
diff(diff(v))
```

```
ans =
```

```
    2    2    2    2    2
```

```
diff(v,2)
```

```
ans =
```

```
    2    2    2    2    2
```

Azaz megfelelő paraméterezéssel több `diff` hívást összevonhatunk.

Matlab

Fa másik diff

Hogyan valósítaná meg a `diff` függvényt? (elegendő ha vektorok esetén működik, de ciklust ne tartalmazzon!)

Mo másik diff

Matlab

Mo másik diff

Egy lehetséges megoldás:

```
function dv=mdiff(v)
    dv=v(2, end)-v(1, end-1);
end
```

Próbáljuk ki!

Fa másik diff

Matlab

Desc függvények megadása

Rövid függvények megadásának legegyszerűbb módja:

```
fun = @(x) x.^2  
fun =  
@(x) x .^ 2  
fun(1:7)  
ans =  
     1     4     9    16    25    36    49
```

További lehetőségek: [create functions](#).

Matlab

Projekt

Desc [Határidők](#)

Desc [Nappali](#)

Desc [Levelező](#)

[Első projekt](#)

[Második projekt](#)

[Harmadik projekt](#)

Matematika mérnököknek 2

Desc Határidők

1. projekt határidő: **március 15.**

A beküldés: **csapattagoknevei.zip** állományban

Ha gond van a feladattal: noszaly.csaba@inf.unideb.hu

Projekt

Desc Nappali

Virág,Sike,Hornyák,Paládi	1P1		
Koczka,Boiko,Makár,Polgár	1P2		
Polyák,Balyi,Pákozdi,Szilágyi D.	1P3		
Radáz	1P4		
Káta	1P5		
Ignéczi,Kovács M.,Szilágyi J.,Szabó P.	1P6		
Zolnai,Patkós,Kádár,Süvöltős	1P7		
Csatári,Jécsák,Varga	1P8		
Paksi,Molnár,Sári,Gyimesi	1P9		
Szabó S.,Kovács B.,Szanyi	1P10		
(Tisza Z.) (Nagy Kristóf)	1P11		
Kriczky G.	1P12		

Projekt

Desc Levelező

Bulyáki Péter	1P1		
Firneisz Áron Ákos	1P2		
Gőczi Dávid	1P3		
Ilosvai Róbert	1P4		
Kiss Gergő Ferenc	1P5		
Linzenbold Tibor	1P6		
Madarasi Zoltán	1P7		
Matolay György Balázs	1P8		
Molnár Ferenc	1P9		
Németh Balázs	1P10		
Papp Zoltán	1P11		
Reichenbach Réka	1P12		

Projekt

Első projekt

Desc 1

Desc 2

Desc 3

Desc 4

Desc 5

Desc 6

Desc 7

Desc 8

Desc 9

Desc 10

Desc 11

Desc 12

Projekt

Desc 1

Vezesse le a

$$y' - y = x + \sin(x)$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-3, 3] \times [-2, 5]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(-3) = 1.5, \quad y(-3) = 2.5, \quad y(-3) = 3.5$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 2

Vezesse le a

$$y' + y = x^2 + x$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-3, 1] \times [-2, 6]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(-3) = -1, \quad y(-3) = 1, \quad y(-3) = 3$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 3

Vezesse le a

$$y' + \frac{y}{x} = \sqrt{x}$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[0.5, 4] \times [-4, 6]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(0.5) = -4, \quad y(0.5) = 0, \quad y(0.5) = 4$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 4

Vezesse le a

$$y' - y = x \sin(x)$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-1, 2] \times [-5, 7]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(-1) = -0.5, \quad y(-1) = -0.3, \quad y(-1) = -0.1$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 5

Vezesse le a

$$y' = y - x \cos(x)$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-1, 2] \times [-7, 4]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(-1) = -0.1, \quad y(-1) = -0.3, \quad y(-1) = -0.5$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 6

Vezesse le a

$$y' = y + xe^{-x}$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-1, 2] \times [-13, 3]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(-1) = 0.8, \quad y(-1) = 0.5, \quad y(-1) = 0.1$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 7

Vezesse le a

$$y' = xy + x^2 \sin(x)$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-1, 2] \times [-13, 3]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(-1) = -4, \quad y(-1) = -2, \quad y(-1) = -1$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Vezesse le a

$$y' = \frac{(x-1)y}{x} + x$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[0.5, 5] \times [-8, 8]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(1) = -3, \quad y(1) = 0, \quad y(1) = 3$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 9

Vezesse le a

$$y' = \left(x - \frac{2}{x}\right)y + 1 - \frac{1}{x^2}$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-2, -0.5] \times [-15, 0]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(-2) = -2, \quad y(-2) = -4, \quad y(-2) = -6$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 10

Vezesse le a

$$y' = \left(t + \frac{1}{t}\right) y + t$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-2, 0] \times [-3, 3]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(-2) = -1, \quad y(-2) = 0, \quad y(-2) = 1$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 11

Vezesse le a

$$y' + y = e^x$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-3, 1] \times [-3, 3]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(-2) = -2, \quad y(-2) = 0, \quad y(-2) = 2$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Desc 12

Vezesse le a

$$y' - y = xe^x$$

differentiálegyenlet megoldását kézzel. Oldja meg a Matlab/Octave `dsolve` függvénye segítségével is. Ábrázolja az egyenlet vektormezejét a $[-3, 1] \times [-3, 3]$ -en és rajzoltassa rá az

$$y(-3) = -3, \quad y(-3) = 0.5, \quad y(-3) = 3$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldásokat is.

Első projekt

Második projekt

Desc 1

Desc 2

Desc 3

Desc 4

Desc 5

Desc 6

Desc 7

Desc 8

Desc 9

Desc 10

Desc 11

Desc 12

Projekt

Desc 1

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(0.5y) + \frac{e^{-2y}}{t^2 + 1} - \cos(t)$$
$$y(-10) = 2$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' + y' + 3y = t - 1$$

$$y(0) = 2$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 2

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = y \sin(y) + \frac{e^{-y}}{t^2 + 1} + \cos(t)$$
$$y(-10) = 0$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - y' - 3y = 1 - 2t$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 3

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(2y) + \frac{e^{-y^2}}{t^2 + 1} + \cos(t)$$
$$y(-10) = 1$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 2y' + y = 2 - 2t$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 1$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 4

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = y \sin(y) - \frac{e^{-y}}{t^2 + 1} + \cos(t^2)$$
$$y(-10) = 1$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' + 2y' + 3y = t - 1$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 5

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(y^2) + \frac{e^{-y^2}}{t^2 + 1} + \cos(t)$$
$$y(-10) = 2$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 3y' + 3y = 2t - 3$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 6

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = 2 \sin(y^2) - \frac{e^{-y^2}}{t^2 + 1} + \cos(t)$$
$$y(-10) = -2$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 2y' + 3y = t$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = -1$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(e^y) - \sin(y)^2 + t$$

$$y(-10) = -1$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdeti érték problémát:

$$y'' + 3y' + 3y = 3t - 1$$

$$y(0) = 3$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(-y) + \frac{e^{-y^2}}{t^2 + 1} + \cos(t + 10)$$

$$y(-10) = 1$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 2y' + 3y = 2t + 1$$

$$y(0) = 3$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(y) + \frac{e^{-y}}{t^2 + 1} + \cos(t)$$

$$y(-10) = 0$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 2y' - 3y = 2t - 1$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 1$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Desc 10

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(2y) - \frac{e^{-y}}{t^2 + 1} + \cos(t)$$
$$y(-10) = 1$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 2y' + 3y = 2t - 1$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 11

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = -\sin(y + 3) + \frac{e^{-y}}{t^4 + 1} + \cos(t)$$
$$y(-10) = 0$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 2y' + 3y = 3t + 1$$

$$y(0) = -1$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Desc 12

Első rész : Oldja meg Euler módszerrel és 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = \sin(2y + 1) + \frac{e^{-2y}}{t^2 + 3} + \cos(t)$$
$$y(-10) = -1$$

Hány lépést kell tenni a $[-10, 10]$ intervallumon, ha 10^{-3} -nál kevesebb eltérést akarunk $y(10)$ -re az `ode45` illetve `ode23` által számolthoz képest?

Második rész : Oldja meg Runge-Kutta módszerrel az alábbi kezdetiérték problémát:

$$y'' - 2y' + 3y = 12t + 11$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = -1$$

$$y(1) = ?$$

A lépésszám legyen 222. Hasonlítsa össze a kapott eredményt az `ode45` -által számoltakkal.

Második projekt

Harmadik projekt

Desc 1

Desc 2

Desc 3

Desc 4

Desc 5

Desc 6

Desc 7

Desc 8

Desc 9

Desc 10

Desc 11

Desc 12

Projekt

Desc 1

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} 10 & x \in [0, 1) \\ 20 & x = 1 \\ 30 & x \in (1, 2] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 2

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} -10 & x \in [-1, 0) \\ -20 & x = 0 \\ -30 & x \in (0, 1] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 3

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [4, 6) \\ 2 & x = 6 \\ 3 & x \in (5, 7] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 4

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} -21 & x \in [-4, -3) \\ -20 & x = -3 \\ -19 & x \in (-3, -2] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 5

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} 10 & x \in [0, 1) \\ 20 & x = 1 \\ 30 & x \in (1, 2] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 6

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [3, 5) \\ -2 & x = 5 \\ -3 & x \in (5, 7] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 7

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [4, 5) \\ 2 & x = 5 \\ 4 & x \in (5, 6] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [4, 6) \\ 2 & x = 6 \\ 3 & x \in (5, 7] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 9

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} -21 & x \in [-4, -3) \\ -20 & x = -3 \\ -19 & x \in (-3, -2] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 10

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in [4, 5) \\ 3 & x = 5 \\ 4 & x \in (5, 6] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 11

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [3, 5) \\ -2 & x = 5 \\ -3 & x \in (5, 7] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc 12

Határozza meg a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [4, 5) \\ 2 & x = 5 \\ 4 & x \in (5, 6] \end{cases}$$

függvény periodikus kiterjesztésének Fourier együtthatóit "kézzel". A kapott eredmény segítségével ábrázolja az eredeti függvényt és 5, 10, 15 tagot felhasználó közelítését.

Harmadik projekt

Desc Linkek

[jelenléti](#)

[előadás](#)

[gyakorlat](#)

[Khan Academy](#)

[ez a githubon](#)

Matematika mérnököknek 2