

Előadás követő fóliák a Matematika mérnököknek II. című tárgyhoz

Burai Pál

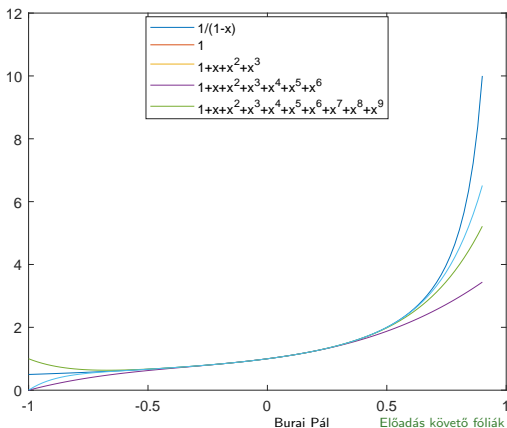
Hatványsorok, Fourier sorok

Hatványsorok, Taylor sorok

Közismert, hogy ha $-1 < x < 1$ akkor

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Az egyenlet baloldalán álló kifejezés x hatványaiból álló, végtelen tagú összeg, a jobboldalon pedig x -nek egy szokásos függvénye áll.



Hatványsorok, Taylor sorok

Azon függvényeket keressük, amelyek előállíthatóak ilyen formában.
Általában az

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

alakú összeget végtelen **hatványsornak** nevezzük.

Az

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

összeget a hatványsor n . **részletösszegének** nevezzük.

Ha egy függvény előáll ilyen alakban, akkor azt mondjuk, hogy **hatványsorba fejthető**.

Hatványsorok alkalmazásai

- A sor n . részletösszegét kiszámítva megkaphatjuk a függvény helyettesítési értékének egy közelítését.
- Az n . részletösszeg a függvény egy közelítését adja.
- Bizonyos feltételek mellett a hatványsor tagonként integrálható (ha a sor abszolút konvergens), amellyel a függvény közelítő integrálját kaphatjuk meg.

Hatványsorok, Taylor sorok

A valós analízisből ismert függvények nagy része előállítható hatványsor alakban, azaz

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Példák



$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$



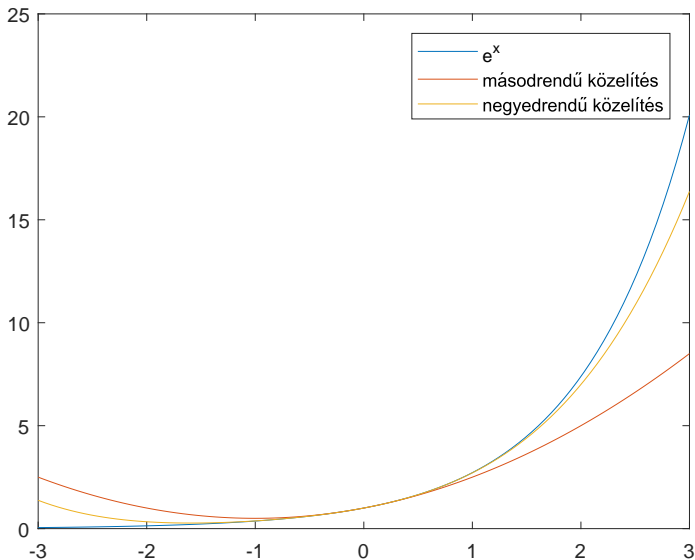
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$



$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

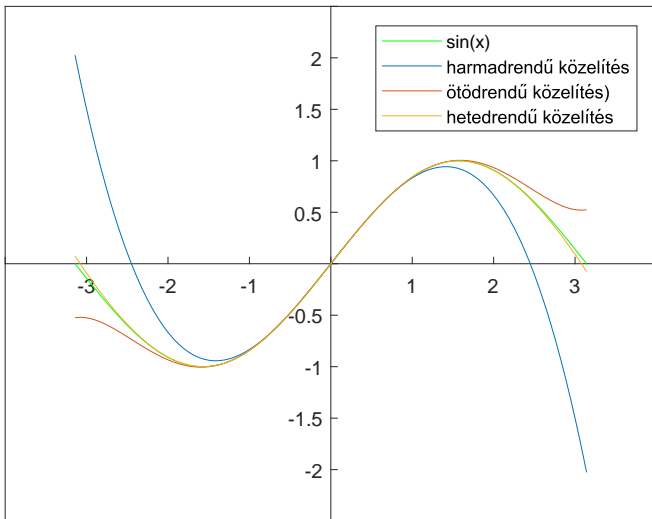
Hatványsorok, Taylor sorok

Az e^x függvény hatványsorának részletösszegei:



Hatványsorok, Taylor sorok

Az $\sin(x)$ függvény hatványsorának részletösszegei:



Hatványsorok, Taylor sorok

Bizonyos feltételek mellett a hatványsorok tagonként tetszőleges rendben differenciálhatóak, azaz

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

$$f''(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)'' = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 \dots$$

$$f'''(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)' = 6a_3 + 24a_4 x + 60a_5 x^2 + \dots$$

A fentiekből az $x = 0$ helyen a következőket kapjuk:

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad \frac{1}{2}f''(0) = a_2, \dots, \frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = a_n,$$

azaz

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

amelyet az f függvény **Maclaurin sorának** nevezünk.

Hatványsorok, Taylor sorok

Azon $x \in \mathbb{R}$ értékek összességét, amelyekre a hatványsor konvergens a hatványsor **konvergencia tartományának** nevezzük.

Példa

Az

$$1 + x + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

geometriai sor minden $-1 < x < 1$ -re konvergens, egyébként divergens.

Definíció

Az

$$R := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

hányadost az

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

hatványsor **konvergenciasugarának** nevezzük.

Tétel

Jelölje R a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

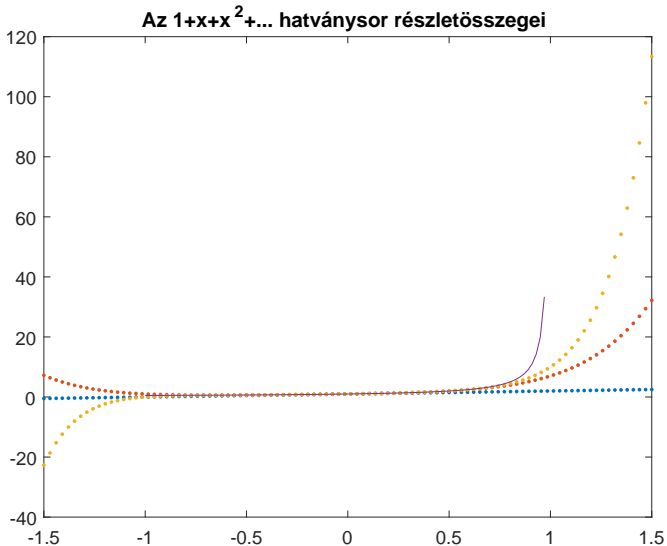
hatványsor konvergenciasugarát. Ekkor a hatványsor minden $|x| < R$ esetén abszolút konvergens, $|x| > R$ esetén divergens, $|x| = R$ esetén további vizsgálatok szükségesek a konvergencia eldöntéséhez.

Feladat

Számítsuk ki a következő hatványsorok konvergenciasugarát!

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n.$$

Hatványsorok, Taylor sorok



Függvényérték közelítése Maclaurin sor segítségével

Tegyük fel, hogy a hatványsor konvergencia sugara R , és az összege $f(x)$, ha $|x| < R$. Legyen $|x_0| < R$. Számítsuk ki $f(x_0)$ közelítő értékét!

$$f(x_0) = \underbrace{a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n}_{f(x_0) \text{ nedrendű közelítő értéke}} + \underbrace{a_{n+1}x_0^{n+1} + \cdots}_{\text{maradéktag}}$$

Példa

Becsüljük meg $\sin(2)$ értékét!

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \quad \text{ebből} \quad \sin(2) \approx 2 - \frac{8}{6} + \frac{32}{120} = \frac{14}{15} = 0.9333$$

Hatványsorok, Taylor sorok

A Maclaurin sor a függvényt a 0 pont közelében "jobban" közelíti. Az alkalmazások szempontjából fontos általánosítása a hatványsorba fejthető függvények tetszőleges $|x_0| < R$ pont körüli hatványsorfejtése.

Definíció

Az x_0 egy környezetében végtelen sokszor differenciálható f függvény esetén, ha

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \end{aligned}$$

akkor azt mondjuk, hogy f **Taylor sorba fejthető** x_0 **körül** és az egyenlőség jobb oldalán álló végtelen összeget az f **függvény** x_0 **körüli Taylor sorának** nevezzük.

Példa

Fejtsük Taylor sorba a \cos függvényt $x_0 = \frac{\pi}{2}$ körül. Mivel $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, ezért a sor minden páros rendű tagja (0. derivált, 2. derivált stb.) kiesik, így

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \\ &\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \dots = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \dots\end{aligned}$$

Feladat

Közelítsük az e szám értékét az exponenciális függvény Taylor sora segítségével! Mi lesz a "jó" x_0 ?

Hatványsorok, Taylor sorok, Példa

A nyomás p a tengerszint feletti magasság h függvénye a következőképpen:

$$p(h) = p = p_0 e^{-\alpha h},$$

ahol $p_0 = p(0)$, azaz, a nyomás a tengerszinttel azonos magasságon, α pedig adott konstans, amely a levegő sűrűségétől függ. Ekkor a h magasságbeli és a tengerszinten lévő nyomás különbsége:

$$\Delta p = p(h) - p(0) = p - p_0 = p_0(e^{-\alpha h} - 1).$$

Az exponenciális függvény közelítését felhasználva $e^{-x} = 1 - x + \dots$, az előző nyomáskülönbség közelítő értéke:

$$\Delta p \approx p_0(1 - \alpha h - 1) = -p_0 \alpha h.$$

Tegyük fel, hogy meg akarjuk becsülni azt a h magasságot amelyen a nyomás 1%-kal kisebb, mint a tengerszinten, azaz $\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{-1}{100}$, ha $\alpha = 0.121 \cdot 10^{-3}$. Ekkor

$$h \approx -\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{1}{100} \frac{1}{0.121 \cdot 10^{-3}} = 82.64 m.$$

Fourier sorok

A hatványsorokkal történő függvényközelítés hátránya, hogy a hatványsor első n eleméből álló polinom csak egy adott pont környezetében ad jó közelítést. Egy mérnöki alkalmazások szempontjából fontos periodikus függvény esetében a hatványsor egy véges darabjával nem lehet jól közelíteni a függvényt a teljes valós számok halmazán, hiszen a polinomok nem periodikus függvények. A megoldást a periodikus függvényekből álló Fourier sorok jelentik.

Definíció

Az f függvény **periodikus**, ha létezik L pozitív valós szám, hogy $f(x) = f(x + L)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. A legkisebb olyan L -et, amellyel ez teljesül a függvény **periódusának** nevezzük.

Példa

A $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ függvényre teljesül, hogy $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$ tetszőleges k egész szám esetén, így a szinusz függvény periodikus. A legkisebb pozitív egész, amelyre az előbbi egyenlőség teljesül 2, tehát a szinusz függvény periódusa 2π .

Definíció

Legyenek $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ numerikus sorozatok, ekkor az

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

függvénysort **Fourier sornak** nevezzük.

A sor tagjainak különböző a periódusa, az n -nek $\frac{2\pi}{n}$. Tekintsünk egy olyan együtthatórendszer $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$, amelyre a fenti sor konvergens, ekkor létezik egy olyan f függvény, hogy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Ekkor ezt az f **függvény Fourier sorának** nevezzük.

Bebizonyítható, hogy ezt a sort lehet tagonként integrálni.

Kérdés: Hogyan határozható meg egy adott függvény esetén az előbbi együtthatórendszer?

Fourier sorok, Az együtthatók kiszámítása

Az együtthatók kiszámításához szükségünk lesz az alábbi integrálokra. Tetszőleges n, m pozitív egész számok esetén fennállnak a következő egyenlőségek:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq n, \\ \pi, & \text{ha } m = n, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0.$$

Fourier sorok, Az együtthatók kiszámítása

a_0 kiszámítása

Integráljuk a Fourier sort a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, ekkor

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx}_{=2\pi a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx}_{=0},$$

azaz

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Fourier sorok, Az együtthatók kiszámítása

a_k kiszámítása

Szorozzuk a Fourier sort $\cos(kx)$ -szel, majd integráljuk a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, ekkor

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx &= \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx}_{=0} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx}_{=0} \\ &+ a_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(kx) dx}_{=\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(nx) dx}_{=0},\end{aligned}$$

azaz

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx.$$

Fourier sorok, Az együtthatók kiszámítása

b_k kiszámítása

Szorozzuk a Fourier sort $\sin(kx)$ -szel, majd integráljuk a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, ekkor

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx &= \underbrace{\frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(kx) dx}_{=0} \\ &+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(nx) dx}_{=0} + b_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(kx) dx}_{=\pi},\end{aligned}$$

azaz

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Fourier sorok, Az együtthatók kiszámítása

Ha az f függvény 2π szerint periodikus és előáll

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

alakban, akkor az együtthatókra teljesülnek a következők:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Mivel f 2π szerint periodikus, tetszőleges 2π hosszúságú intervallumon ugyanezt az eredményt kapjuk.

Nem minden függvény Fourier sora konvergens pontonként, de a mérnöki alkalmazásokban előforduló függvények nagy többségének konvergens a Fourier sora. Számtalan konvergenciakritérium ismert mind a pontonkénti, mind a más típusú konvergenciával kapcsolatban. Az egyik legismertebb a

Dirichlet lemma

Tegyük fel, hogy f periodikus, korlátos, véges sok szélsőértéke van, és véges sok szakadása, amelyek mind elsőfajúak. Ekkor f Fourier sora pontonként konvergens. Továbbá, a függvény folytonossági helyein a függvényértékhez, egyébként a bal- és jobboldali határérték számtani közepéhez konvergál.

Fourier sorok, Páros és páratlan függvények Fourier sora

Ha f páros, azaz $f(x) = f(-x)$, akkor a szinuszos együtthatók eltűnnek. Tehát $b_n = 0$, $n = 1, \dots, \infty$.

Páros függvény Fourier sora

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

Ha f páratlan, azaz $f(x) = -f(-x)$, akkor a koszinuszos együtthatók tűnnek el. Tehát $a_n = 0$, $n = 1, \dots, \infty$.

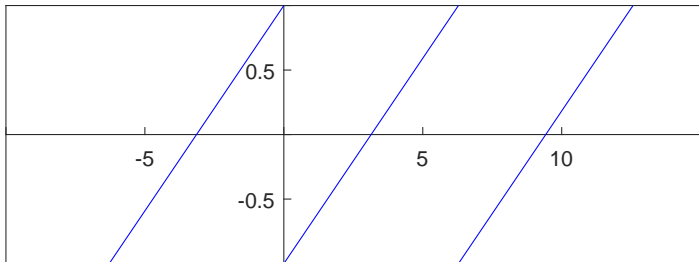
Páratlan függvény Fourier sora

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Fűrészfog függvény: Az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x + 1 & -\pi \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{\pi}x - 1 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

2π szerint periodikus kiterjesztését a valós számok halmazára fűrészfog függvénynek nevezzük.



Fourier sorok, Példák Fourier sorokra

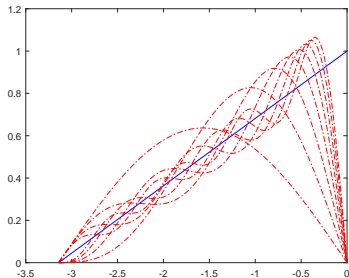
A fűrészfog függvény páratlan, ezért a Fourier sora csak a szinuszos tagokat tartalmazza. Így csak a b_k együtthatókat kell kiszámítanunk.

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\pi}x + 1 \right) \sin(kx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\pi}x - 1 \right) \sin(kx) dx = \frac{-2}{k\pi}.$$

Tehát a Fourier sor alakja:

$$\frac{-2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

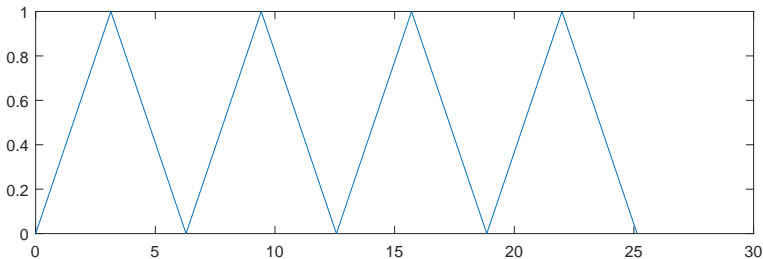
Az első nyolc tagig a részletösszegek grafikonja a $[-\pi, 0]$ intervallumon.



Háromszög hullámfüggvény: Az

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

2π szerint periodikus kiterjesztését a valós számok halmazára háromszög hullámfüggvénynek nevezzük.



Fourier sorok, Példák Fourier sorokra

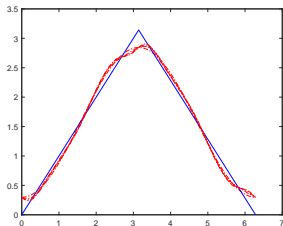
A háromszög hullámfüggvény páros, ezért a Fourier sora csak a koszinuszos tagokat tartalmazza. Így csak az a_k együtthatókat kell kiszámítanunk.

$$a_0 = \pi, \quad a_k = \begin{cases} 0 & \text{ha } k \text{ páros,} \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Tehát a Fourier sor alakja:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{-4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}.$$

Az első négy tagból álló részletösszegek grafikonja a $[0, \pi]$ intervallumon.

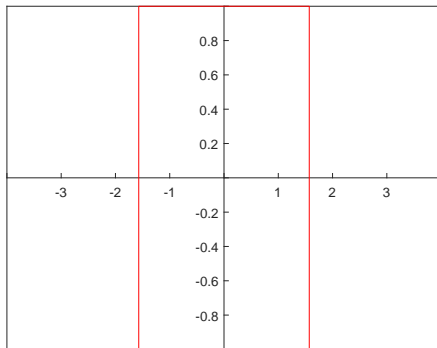


Fourier sorok, Példák Fourier sorokra

Téglalap hullámfüggvény: Az

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq -\frac{\pi}{2} \\ 1, & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ -1, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

2π szerint periodikus kiterjesztését a valós számok halmazára téglalap hullámfüggvénynek nevezzük.



Fourier sorok, Példák Fourier sorokra

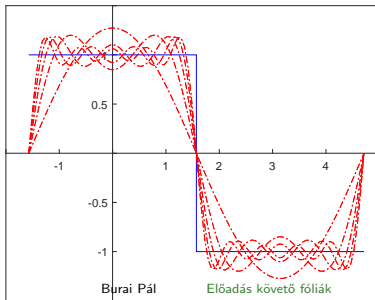
A téglalap hullámfüggvény páros, ezért a Fourier sora csak a koszinuszos tagokat tartalmazza. Így csak az a_k együtthatókat kell kiszámítanunk.

$$a_0 = 0, \quad a_k = \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2}$$

Tehát a Fourier sor alakja:

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sin(n\pi)}{2} \cos(nx).$$

Az első tíz tagból álló részletösszegek grafikonja a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon.



Fourier sorok, Tetszőleges periódusú függvények

Fourier sorok, Tetszőleges periódusú függvények

Fourier sorok, Tetszőleges periódusú függvények

Fourier sorok, Tetszőleges periódusú függvények

Fourier sorok, Feladatok

Fourier sorok, Feladatok
