

Előadás követő fóliák a Matematika mérnököknek II. című tárgyhoz

Burai Pál

Differenciálegyenletek

Newton második törvénye

Egy tömegpont gyorsulása egyenesen arányos a rá ható erővel és fordítottan arányos a tömegével.

$$F = ma,$$

ahol F jelöli az erőt (vagy a ható erők összegét), m a tömeget, a pedig a gyorsulást.

A SZABADESÉS EGYENLETE: Jelölje $x(t)$ a tömegpont helyzetét az idő függvényében. Ismert, hogy a sebesség megegyezik $x'(t)$ -vel, a gyorsulás pedig $x''(t)$ -vel. Ekkor a szabadon eső tömegpont egyenlete:

$$mx''(t) = -gm, \text{ azaz } x''(t) = -g,$$

ahol $g \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$ a Föld gravitációja okozta nehézségi gyorsulás. A mínusz előjel az irányra utal.

Példák differenciálegyenletekre

Ekkor kétszeri integrálás után kapjuk, hogy

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} + c_1t + c_2,$$

ahol c_1, c_2 tetszőleges konstansok. Ha feltételezzük, hogy a $t = 0$ időpillanatban a test sebessége nulla és \bar{s} magasságból "indul" a szabadesés, akkor az

$$x(0) = \bar{s}, \quad x'(0) = 0$$

kezdeti feltételeket kapjuk, melyeket a fenti megoldásba visszahelyettesítve kapjuk az

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} + \bar{s}$$

megoldást, amely leírja az \bar{s} méter magasságból szabadon eső tömegpont helyzetét az idő függvényében.

Példák differenciálegyenletekre

HARMONIKUS REZGŐMOZGÁS EGYENLETE: Ha Newton második törvényét harmonikus rezgőmozgásra alkalmazzuk (inga, rugó, stb.), akkor az egyenlet

$$x''(t) = -\omega^2 x(t)$$

alakot ölt, ahol ω^2 a mozgásra jellemző állandó. Ezt már nem lehet olyan egyszerűen integrálni, mint a szabadesés egyenletét. A megoldás

$$x(t) = a \cos(\omega t + \varphi),$$

alakú lesz, ahol a és φ értéke a kezdeti feltételekből határozható meg.

EGY GEOMETRIAI PÉLDA: Tegyük fel, hogy egy függvény bármely pontjában az érintő meredeksége az érintési pont koordinátáinak összegével egyenlő. Ekkor ezt a függvényt az

$$x'(t) = t + x(t)$$

differenciálegyenlet jellemzi, melynek általános megoldása:

$$ce^t - t - 1.$$

Példák differenciálegyenletekre

A RÁDIOAKTÍV BOMLÁS EGYENLETE: Jelölje $x(t)$, $t \geq 0$ a t időpillanatban el nem bomlott rádióaktív anyag mennyiségét. Mérési tapasztalatok alapján az egységnyi idő alatt elbomló anyag mennyisége arányos az adott pillanatban még el nem bomlott anyag mennyiségével, azaz

$$x(t) - x(t+1) = \alpha x(t),$$

valamely α paraméterrel. Ha az időegység helyett h időtartamot veszünk, akkor az

$$x(t) - x(t+h) = \alpha(h)x(t)$$

egyenletet kapjuk. Belátható, hogy α monoton növekvő és létezik β , hogy $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(h)}{h} = \beta > 0$. Az előbbi egyenletből így az

$$x'(t) = -\beta x(t)$$

differenciálegyenletet kapjuk, melynek általános megoldása

$$x(t) = ce^{-\beta t}.$$

Példák differenciálegyenletekre

POPULÁCIÓ DINAMIKA EGYENLETE: Jelölje $x(t)$ a t időpillanatban egy populáció nagyságát. Legyen továbbá $c(t, x(t))$ a növekedési ráta. Ekkor

$$x'(t) = c(t, x(t))x(t).$$

A gyakorlatban a populáció méretének van egy, a környezettől függő felső korlátja N . Feltehető továbbá, hogy a növekedési ráta nem függ explicit módon t -től, és nullához tart, amint a populáció mérete N -hez tart. Ilyen például a populáció dinamikában használt

$$c(x(t)) = \alpha(N - x(t))^k$$

függvény, ahol $k \in \{0, 1, 2\}$. (Ezt az egyenletet $k = 1$ esetén **logisztikai egyenlet**nek nevezzük.) Ebből $\alpha = c_0(N - x_0)^{-k}$, amelyet visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe $x_0 = 1$ és $N = \beta x_0$ feltételek mellett kapjuk, hogy

$$x' = c_0 \left(\frac{\beta - x}{\beta - 1} \right)^k, \quad k \in \{0, 1, 2\}.$$

Ezt $k = 0$ és $k = 1$ esetén könnyű megoldani, de $k = 2$ már sokkal nehezebb.

Példák differenciálegyenletekre, Feladatok

- Galileo Galilei a Pisai ferde torony 56 méter magas tornyából leejt egy 100 kg súlyú vasgolyót és egy ugyanolyan méretű 10 kg-os fagolyót. Mit tapasztal? Melyik golyó, mennyi idő múlva ér földet?
- A rádióaktív jód izotóp felezési ideje 8 nap. Mennyi marad 30 nap után, ha kezdetben 200g izotópunk volt?
- A testek hűlési sebessége arányos a test és a környezete közötti hőmérséklet különbséggel. Az előbbit jelölje T , az utóbbit T_k . Egy 100 Celsius fokos test 0 fokos helyen 20 perc alatt 50 fokra hűl le. Hány fokra hűl le 10 perc alatt? Az ide vonatkozó hőegyenlet

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -k(T - T_k),$$

ahol k az anyagtól függő állandó.

Differenciálegyenletek osztályozása

Ha egyváltozós függvények és deriváltjaik szerepelnek az egyenletben, akkor az egyenletet **közönséges differenciálegyenlet**nek nevezzük. Ezekre a továbbiakban a **KDE** jelölést használjuk.

Példák KDE-re

- $x'(t) = t^3 x(t)$,
- $x'(t) = 4t\sqrt{x(t)}$, $x(1) = 1$,
- $x'(t) = \log(x(t))$,
- $x'(t) = (1 + x^2) \log t$.

Ha többváltozós függvények parciális deriváltját vagy deriváltjait tartalmazza, akkor **parciális differenciálegyenlet**nek nevezzük a szóban forgó egyenletet. Ezekre a továbbiakban a **PDE** rövidítést használjuk.

Példák PDE-re

- $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = 0$,
- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0$,
- $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_1, \dots, x_n) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(t, x_1, \dots, x_n) - \dots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(t, x_1, \dots, x_n) = e^t$.

Differenciálegyenletek osztályozása

Több differenciálegyenletet tartalmazó rendszert differenciálegyenlet-rendszernek nevezünk, ami szintén lehet - a szereplő deriváltaktól függően- parciális- illetve közönséges differenciálegyenlet-rendszer. Ha a differenciálegyenletben a derivált olyan az ismeretlen függvénytől nem függő függvénysszerese, és ilyen tagok összege szerepel, akkor az egyenletet **lineáris**nak nevezük. Egyébként az egyenlet **nem lineáris**.

$$\mathbf{x}'(\mathbf{t}) + \mathbf{g}(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{t})$$

Példák lineáris KDE-re

- $x'(t) - tx(t) = t^3,$
- $x'(t) + x(t) = e^{-t},$
- $x'(t) + x(t) \tan t = \sin 2t \quad t \in]0, \frac{\pi}{2}[,$
- $tx'(t) + 2x(t) = 3t, \quad x(1) = 0,$
- $x'(t) = x(t) + t,$
- $x'(t) = -tx(t) + t.$

Példák nem lineáris KDE-re

- $x'(t)x^3(t) = t^3$,
- $x'^2(t) + x(t) = 0$,
- $x'(t) + \tan(x(t))t = \sin 2t \quad t \in]0, \frac{\pi}{2}[$,
- $x'(t) + x(t) = -\frac{1}{x(t)}$.

A differenciálegyenletben szereplő legmagasabb rendű derivált rendje n , akkor n -edrendű egyenletről beszélünk.

Példák magasabb rendű KDE-re

- $x'' - x' - x = 0$,
- $a_n(t)x^{(n)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(n)}(t))$,
- $y'''(x) - y'(x) = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1$,
- $z(s) - z'''(s)z'(s) = z''(s)$.

Az n -ed rendű, explicit egyenleteket át lehet írni n darab elsőrendű egyenletből álló differenciálegyenlet-rendszerre.

Közösleges differenciálegyenlet fogalma

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt, nem üres intervallum. $F: I \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvény. Ekkor az

$$(IKDE) \quad F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$$

egyenletet **n -edrendű, implicit, közösleges differenciálegyenletnek** nevezzük. Ha létezik olyan $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, hogy $F = x^{(n)} - f$ alakú akkor (IKDE)

$$(EKDE) \quad x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

alakba írható, amelyet **n -edrendű, explicit, közösleges differenciálegyenletnek** nevezünk. Ha léteznek olyan $a_i: I \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n-1$ függvények, hogy $f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}$, azaz

$$(LKDE) \quad x^{(n)} = a_0(t)x + a_1(t)x' + \dots + a_{n-1}(t)x^{(n-1)},$$

akkor (LKDE)-t **n -edrendű, lineáris, közösleges differenciálegyenletnek** nevezzük.

Explicit, elsőrendű KDE

Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, ekkor a

$$(EE-KDE) \quad x' = f(t, x)$$

egyenletet **explicit, elsőrendű, közönséges differenciálegyenlet**nek nevezzük.

Az (EE-KDE) egyenlet megoldása

Legyen I egy intervallum, $x: I \rightarrow \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy x **megoldása az (EE-KDE) egyenletnek**, ha

- gráfja D -ben van, azaz

$$(t, x(t)) \in D, \quad t \in I,$$

- differenciálható,
- kielégíti az egyenletet, azaz

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I.$$

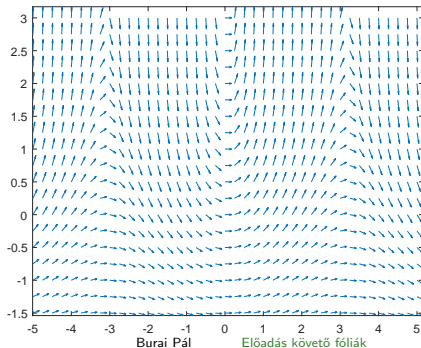
Íránymező

A korábbi jelölések mellett $t \in I$ esetén a $(t, x(t), f(t, x(t)))$ hármas **vonalelem**nek nevezzük. A vonalelemek összességét

$$IM := \{ (t, x(t), f(t, x(t))) \mid t \in I \}$$

pedig **íránymező**nek (pontosabban az (EE-KDE) egyenlethez tartozó iránymezőnek) nevezzük.

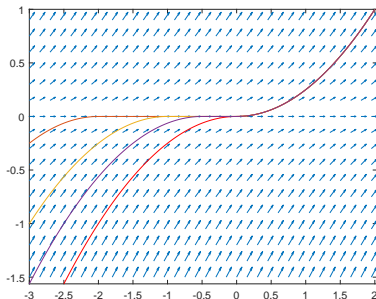
Például az $x' = e^x \sin(t)$ egyenlet iránymezeje:



Az iránymezőt szemléltethetjük úgy, hogy a síkon egy (ξ, η) koordinátájú pontot kiválasztva egy $f(\xi, \eta)$ iránytangensű egyenesdarabot rajzolunk a pontra. Ez az eljárás azt sugallja, hogy a sík minden pontján pontosan egy megoldás halad át. Ez általában nem igaz. Tekintsük az alábbi egyenletet az $a < 0$ paraméteres megoldáscsaláddal együtt:

$$x' = \sqrt{|x|}, \quad x_a(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } a < x \leq 0 \\ -\frac{(t-a)^2}{2} & \text{ha } x \leq a. \end{cases}$$

Ekkor az egyenletnek $x(0) = 0$ feltétel mellett végtelen sok megoldása van.



Kezdeti érték probléma

A korábbi feltételek mellett a

$$(1) \quad x'(t) = f(t, x(t)), \quad x \in I,$$

$$(2) \quad x(\xi) = \eta$$

párost **kezdeti érték problémának** nevezzük. A második egyenletet pedig **kezdeti feltételnek**.

Az előző példából látható, hogy a kezdeti érték problémának sem feltétlenül egyértelmű a megoldása.

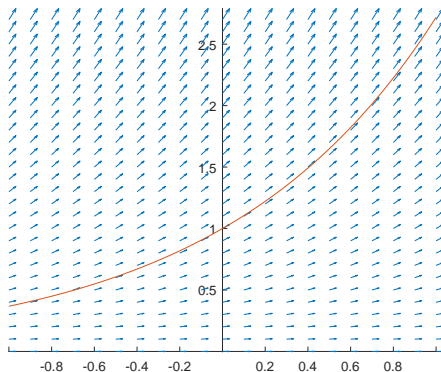
Később bebizonyítjuk, hogy az egyenlet jobboldalára kirótt egyszerű feltétel mellett már létezik az egyértelmű megoldás a kezdeti feltétel egy környezetében.

Példa

Tekintsük az

$$\begin{aligned}x' &= x \\ x(0) &= 1\end{aligned}$$

kezdeti érték problémát. Az egyenlet iránymezejében látható a kezdeti feltételt is kielégítő, egyértelmű megoldás $x(t) = e^t$.



Elemi úton megoldható egyenletek

$$x' = f(t)$$

Ha az egyenlet jobb oldala nem függ az ismeretlen függvénytől, akkor egyszerűen integrálva az egyenletet, megkapjuk a megoldást.

$$x(t) = \int_{\xi}^t f(t) dt$$

Itt az $x(\xi) = 0$ kezdeti feltétel teljesül.

Példa

$$x' = t^3 + \cos t$$

megoldása

$$x(t) = \frac{1}{4}t^4 + \sin t + C$$

Határozzuk meg az $x(1) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldást!

Elemi úton megoldható egyenletek

$$x' = g(x)$$

Ekkor heurisztikusan feltételezve, hogy t felírható x függvényeként, az egyenletet átrendezve kapjuk, hogy

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int 1 dt = t + C,$$

ahol C tetszőleges konstans.

Példa

$$x' = x,$$

ekkor az $x(t) \neq 0$ feltételt teljesítő megoldásokra

$$\int \frac{dx}{x} = \int 1 dt = t + C \Rightarrow \log(|x|) = t + C \Rightarrow x(t) = Ke^t,$$

ahol K tetszőleges konstans.

Szétválasztható változójú egyenletek

$$(3) \quad x' = f(t)g(x)$$

Heurisztika: Az egyenletet

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x)$$

alakba írva, átrendezéssel szétválaszthatjuk a változókat. Integrálás után kapjuk, hogy

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t) dt .$$

Elemi úton megoldható egyenletek

Ha az

$$(4) \quad x' = f(t)g(x), \quad x(\xi) = \eta$$

kezdeti érték problémára alkalmazzuk az előző heurisztikát, akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$(5) \quad \int_{\eta}^x \frac{da}{g(a)} = \int_{\xi}^t f(b) db$$

Tétel

Tegyük fel, hogy

- *f folytonos egy I_t intervallumon,*
- *g folytonos egy I_x intervallumon,*
- *η belső pontja I_x -nek, és $g(\eta) \neq 0$.*

Ekkor létezik ξ -nek olyan környezete (ez lehet féloldali környezet is, ha ξ I_t határpontja), amelyen a (4) kezdeti érték problémának létezik egyértelmű megoldása, amely egyben az (5) integrálegyenlet megoldása.

Feladatok

- $x' = \frac{1}{t+a}, \quad a \in \mathbb{R},$
- $z' = \frac{1}{2+3t^2},$
- $u' = \cos(t),$
- $y' = x, \quad y(0) = 1,$
- $x' = -x, \quad x(1) = -1,$
- $y' = xe^x,$
- $x' = te^x,$
- $(t^2 - 1)x' + 2tx^2 = 0.$

Lineáris differenciálegyenlet

Legyenek $g, h: I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények. Ekkor az

$$(6) \quad x' + g(t)x = h(t), \quad t \in I$$

egyenletet **lineáris differenciálegyenlet**nek nevezzük. Ha $h \equiv 0$ akkor az egyenlet **homogén**, egyébként **inhomogén**.

A homogén egyenlet megoldása

Ez egy speciális szétválasztható változójú egyenlet melynek megoldása

$$x(t; C) = Ce^{-G(t)}, \quad \text{ahol} \quad G(t) = \int_{\xi}^t g(a) da,$$

ahol $\xi \in I$ rögzített. Az $x(\xi) = \eta$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás az előbb definiált G -vel az

$$x(t) = \eta e^{-G(t)}$$

alakot ölti.

Lineáris differenciálegyenlet

Az inhomogén egyenlet megoldása

A megoldást ismét $x(t; C) = Ce^{-G(t)}$ alakban keressük de itt feltesszük, hogy C nem konstans, hanem t függvénye.

Példa

Tekintsük az $x' - x = t$ inhomogén, lineáris differenciálegyenletet.

Homogén rész: $x' = x \Rightarrow x = ce^t$. **Konstans variálása:** $c \rightsquigarrow c(t)$.

Ebből $x(t) = c(t)e^t$ és $x'(t) = c'(t)e^t + c(t)e^t$. Ezt az egyenletbe visszahelyettesítve:

$$\underbrace{c'(t)e^t + c(t)e^t}_{x'} - \underbrace{c(t)e^t}_x = t \Rightarrow c' = te^{-t} \Rightarrow c(t) = e^{-t}(1 - t) + K,$$

ahol K tetszőleges konstans.

Ebből az eredeti egyenlet megoldása:

$$x = 1 - t + Ke^t,$$

ahol K továbbra is egy tetszőleges konstans.

Feladatok

- $x' + 2tx = 0$,
- $tx' - x = 0$,
- $x' - \frac{x}{t} = t^2 + 3t - 2$,
- $(t - 2)x' - x = 2(t - 2)^3$.

Bernoulli egyenlet

Jacob Bernoulli (1654-1705) svájci matematikus fedezte fel a következő egyenletípust, melynek a korábban említett logisztikai egyenlet egy speciális esete.

$$x' + g(t)x + h(t)x^\alpha = 0, \quad \alpha \neq 1.$$

Ha az egyenletet megszorozzuk $(1 - \alpha)x^{-\alpha}$ -nal, akkor az $y = x^{1-\alpha}$ függvényre teljesül az

$$y' + (1 - \alpha)g(t)y + (1 - \alpha)h(t) = 0$$

lineáris differenciálegyenlet.

Egyszerűbb nemlineáris egyenletek

Példa

$x' - x - tx^5 = 0$ szorozva $-4x^{-5}$ -tel kapjuk, hogy $-4x^{-5}x' + x^{-4} + 4t = 0$.

Az $y = x^{-4}$, $y' = -4x^{-5}x'$ helyettesítések után a következő lineáris KDE-t kell megoldanunk:

$$y' + 4y + 4t = 0,$$

melynek megoldása

$$x^{-4} = y = ce^{-4t} - t + \frac{1}{4}.$$

Feladatok

- $3x' + x = (1 - 2t)x^4$,
- $x' + x = x^2(\cos t - \sin t)$.

Egyszerűbb nemlineáris egyenletek

Riccati egyenlet

A következő nemlineáris egyenlet Jacopo Riccati (1676-1754) velencei matematikusról kapta a nevét.

$$x' = q_0(t) + q_1(t)x + q_2(t)x^2$$

Általában nem adható meg a megoldás zárt alakban, de ha ismert egy megoldás, akkor ennek segítségével a Riccati egyenlet visszavezethető Bernoulli egyenletre.

Tegyük fel, hogy φ egy adott megoldás. Ekkor tetszőleges x ismeretlen megoldás esetén az $u := x - \varphi$ függvény megoldása az

$$\underbrace{(x - \varphi)'}_{u'} = q_1(t) \underbrace{(x - \varphi)}_u + q_2(t)(y^2 - \varphi^2) = q_1(t)u + q_2(t) \underbrace{(x - \varphi)}_{=u} \underbrace{(x + \varphi)}_{=u+2\varphi},$$

egyenletnek, amiből

$$u' = (q_1(t) + 2q_2(t)\varphi)u + q_2(t)u^2,$$

amely már Bernoulli egyenlet az ismeretlen u függvényre.

Feladatok

Oldjuk meg az alábbi Riccati egyenleteket a megadott partikuláris megoldások segítségével:

- $y'(x) + \frac{1}{x}y(x) + y^2(x) = \frac{4}{x^2}, \quad y_p(x) = \frac{2}{x},$
- $y'(x) + \frac{1}{3}y^2(x) + \frac{2}{3}\frac{1}{x^2} = 0, \quad y_p(x) = \frac{1}{x},$
- $y'(x) + 2y(x)e^x - y^2(x) = e^{2x} + e^x, \quad y_p(x) = e^x,$
- $y'(x) - \frac{y(x)}{x} = y^2(x) + \frac{1}{x^2}, \quad y(x)_p = \frac{c}{x}.$

Definíció

Az

$$\begin{aligned}x_1' &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\&\vdots \\x_n' &= f_n(t, x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

rendszer **elsőrendű, explicit, differenciálegyenlet rendszernek** nevezzük, ahol $f_i: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ adott függvények. Az $x^T = (x_1, \dots, x_n)$ vektorfüggvény **megoldása** a differenciálegyenlet rendszernek, ha $(t, x) \in D$ és x komponensei kielégítik az egyenletrendszert.

A továbbiakban alkalmazzuk az előbbi vektorjelölést, így az egyenletrendszert az

$$x' = f(t, x)$$

formába írhatjuk fel, ahol $f^T = (f_1, \dots, f_n)$.

Egyenletrendszerek és magasabb rendű egyenletek

A vektorfüggvények deriválása illetve integrálása koordinátánként értendő.
Az előbbi vektoros jelölésekkel az

$$x' = f(t, x), \quad x(\xi) = \eta, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \eta \in \mathbb{R}^n$$

feladatot az $x' = f(x, t)$ **elsőrendű, explicit differenciálegyenlet rendszerre vonatkozó kezdeti érték problémának** nevezzük. Erre is megfogalmazható, teljesen analóg módon, az explicit, elsőrendű differenciálegyenletekre vonatkozó kezdeti érték problémára vonatkozó egzisztencia és unicitási tétel.

Definíció

Az

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

egyenletet **n -edrendű, explicit, közöségi differenciálegyenletnek nevezzük.**

Egyenletrendszerek és magasabb rendű egyenletek

Az előbbi n -edrendű egyenlet átttranszformálható elsőrendű, explicit differenciálegyenlet rendszerre a következőképpen:

$$x'_1 = x_2, x'_2 = x_3, \dots, x'_{n-1} = x_n, x'_n = f(t, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Az említett rendszerek ekvivalensek a következő értelemben: ha az $x = (x_1, \dots, x_n)$ vektorfüggvény megoldása a fenti rendszernek, akkor $x = x_1$ n -szer differenciálható, és megoldása az n -edrendű, explicit, közönséges differenciálegyenletnek. Megfordítva, ha x megoldása az n -edrendű egyenletnek, akkor az $x := (x_1, \dots, x_n) = (x, x', \dots, x^{(n-1)})$ vektorfüggvény megoldása a fenti differenciálegyenlet rendszernek.

Ez az ekvivalencia később fontos lesz a magasabb rendű egyenletek numerikus megoldásánál!

Másodrendű, lineáris differenciálegyenletek

Állandó együtthatós, másodrendű, homogén, lineáris differenciálegyenlet

$$ax'' + bx' + cx = 0,$$

ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ adott konstansok. Az

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

másodfokú egyenletet az állandó együtthatós, másodrendű, homogén, lineáris differenciálegyenlet **karakterisztikus egyenlet**ének nevezzük.

Definíció

Két függvényt (az értelmezési tartományaik metszetén) **lineárisan függetlennek** nevezünk, ha az (értelmezési tartományaik metszetén) azonosan nulla függvény csak triviálisan kombinálható ki belőlük, azaz, φ, ψ lineárisan függetlenek, ha $\lambda\varphi + \mu\psi = 0$ pontosan akkor, ha $\lambda = \mu = 0$.

Másodrendű, lineáris differenciálegyenletek

Példa

A $\varphi(t) = e^{\alpha t}$ és a $\psi(t) = e^{\beta t}$ $\alpha \neq \beta$ esetén lineárisan függetlenek.

A konstans együtthatós, másodrendű, homogén, lineáris differenciálegyenlet megoldása

Az összes megoldás előáll két lineárisan független megoldás lineáris kombinációjaként, azaz, ha φ_1 és φ_2 kielégítik az egyenletet, akkor az összes megoldás

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$$

alakú, ahol c_1, c_2 tetszőleges konstansok.

Másodrendű, lineáris differenciálegyenletek

Jelölje a karakterisztikus egyenlet gyökeit λ_1, λ_2 . A következő esetek lehetségesek:

- Mindkét gyök valós és különböző, ekkor $\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ és $\varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ lineárisan független megoldások.
- Egy kétszeres valós gyöke van a karakterisztikus egyenletnek $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Ekkor $\varphi_1(t) = e^{\lambda t}$ és $\varphi_2(t) = te^{\lambda t}$ lineárisan független megoldások.
- Két komplex gyök van, ekkor ezek egymás konjugáltjai, azaz $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ és $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Ekkor $\varphi_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ és $\varphi_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ lineárisan független megoldások.

Példa

Tekintsük az

$$x'' - x' - 6x = 0$$

egyenletet. Ekkor a karakterisztikus egyenlet gyökei $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = -2$, így a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t}.$$

Másodrendű, lineáris differenciálegyenletek

Feladatok

Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket!

- $x'' - 8x' + 16 = 0$
- $4x'' + 4x' + 37x = 0$
- Egy pont akkor végez csillapítatlan harmonikus rezgőmozgást, ha a gyorsulása arányos az elmozdulásával, de azzal ellentétes irányú. Határozzuk meg az elmozdulást, ha a $t = 0$ időpillanatban a pont kitérése 0 és a sebessége $v_0 = c_2\omega$.

A csillapítatlan harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete:

$$\ddot{y} = \omega^2 y,$$

ahol ω a szögsebesség.

- Oldjuk meg a csillapított rezgőmozgás egyenletét az előbbihez hasonló kezdeti feltételekkel

$$m\ddot{y} = -\omega^2 my - 2s\dot{y},$$

ahol m a test tömege s pedig a csillapítási tényező.

Tétel (Egyszisztencia és unicitási tétel)

Tegyük fel, hogy létezik $L > 0$, amellyel

$$|f(t, x) - f(t, \bar{x})| \leq L|x - \bar{x}|, \quad (\text{Lipschitz feltétel})$$

minden rögzített $t \in [\xi, \xi + a]$ esetén. f folytonos $[\xi, \xi + a] \times \mathbb{R}$ -en. Ekkor az (1)-(2) kezdeti érték problémájának létezik pontosan egy

$$x: [\xi, \xi + a] \rightarrow \mathbb{R}$$

megoldása a $[\xi, \xi + a]$ intervallumon.

Tétel (Peano egyszisztencia tétele)

Ha f folytonos egy (ξ, η) -t tartalmazó nyílt halmazán a síknak, akkor a Ekkor az (1)-(2) kezdeti érték problémájának létezik legalább egy megoldása, és minden megoldás kiterjeszthető a nyílt halmaz határáig.

Feladatok

- Vizsgáljuk meg, hogy a következő egyenletekre teljesülnek-e az előbbi két tétel feltételei:
 - $x' = \sqrt{|x|}$, $x(0) = 0$,
 - $y' = y \log(y)$, $y(1) = 1$.
- Írjuk át a következő kezdeti érték problémákat velük ekvivalens integrálegyenletre:
 - $x' = t - x^2$, $x(0) = 0$,
 - $y' = y^2 - 3x^2 - 1$, $y(0) = 1$,
 - $y' = y + e^y$, $y(0) = 1$.