

Előadás követő fóliák a Matematika mérnököknek II. című tárgyhoz

Burai Pál

Laplace transzformáció

Laplace transzformáció

A Laplace transzformáció, többek között, lineáris, állandó együtthatós, közönséges differenciálegyenletek megoldására szolgáló eszköz. Az eljárás lépései a következők:

- 1 A "nehéz" problémát (KDE) "könnyű" problémává (algebrai egyenlet) transzformáljuk.
- 2 Az egyenletet algebrai eszközökkel megoldjuk.
- 3 Az így kapott megoldást visszatranszformáljuk.

Az eljárás segítségével

Laplace transzformáció \longrightarrow Algebrai egyenlet megoldása \longrightarrow Inverz Laplace transzformáció
differenciálegyenletek bizonyos típusainak megoldása algebrai egyenletek megoldásává egyszerűsödik.

Definíció

Tegyük fel, hogy $f(t)$ a nemnegatív valós számok halmazán $t \geq 0$ definiált függvény ($f(t)$ lehet valós és komplex is). Ekkor a következő egyenlőséggel definiált függvényt

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

f **Laplace transzformáltjának** nevezzük, amennyiben az integrál konvergens. Ha F f Laplace transzformáltja, akkor f -et F **inverz Laplace transzformáltjának** nevezzük. Jelölésben: $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

A gyakorlatban Laplace transzformációs táblázatokat használunk a transzformáltak meghatározásához.

Laplace transzformáció, Példa, Feladatok

Legyen $f(t) = 1$. Ekkor

$$\mathcal{L}[f] = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{t=0}^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{s} e^{-st} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}.$$

Számítsuk ki a következő függvények Laplace transzformáltját!

- ❶ $f(t) = e^{at}$.
- ❷ $f(t) = t$.
- ❸ $f(t) = \cos(at)$.
- ❹ $f(t) = e^{t^2}$.

Számítsuk ki a következő függvények inverz Laplace transzformáltját felhasználva az előző feladat eredményeit, illetve transzformációs táblázatokat!

- ❶ $F(s) = \frac{1}{s-1}$.
- ❷ $F(s) = \frac{6}{s^4}$.
- ❸ $F(s) = \frac{s}{s^2+4}$.

Tétel

A Laplace transzformáció és az inverz Laplace transzformáció lineáris leképezés.

Példák

Számítsuk ki az alábbi függvények Laplace transzformáltját!

① $f(t) = 3t + e^t.$

② $f(t) = -2 + \cos t.$

Számítsuk ki az alábbi függvények inverz Laplace transzformáltját!

① $F(s) = \frac{3}{s-2} + \frac{2}{s^2}.$

② $F(s) = -\frac{12}{s^4}.$

Eltolás

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s - \alpha), \quad s > a + \alpha.$$

Derivált Laplace transzformáltja

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0).$$

$$\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2\mathcal{L}[f(t)](s) - sf(0) - f'(0).$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = & s^n\mathcal{L}[f(t)](s) - s^{n-1}f(0) - \\ & s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

Laplace transzformáció, Parciális törtekre bontás

Legyen $N(s)$ és $D(s)$ polinom. A parciális törtekre bontás módszerével az $R(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ kifejezést olyan egyszerűbb tagok összegeként szeretnénk felírni, amelyek Laplace transzformáltja könnyen kiszámítható, illetve transzformációs táblázatból kikereshető. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $D(s)$ és $N(s)$ főegyütthatója 1.

A módszer lépései

1. lépés Keressünk olyan $r(s)$ és $q(s)$ polinomokat, amelyekre

$$R(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = q(s) + \frac{r(s)}{D(s)},$$

ahol $r(s)$ foka szigorúan kisebb, mint $D(s)$ foka.

A módszer lépései

2. lépés Írjuk fel $D(s)$ -t $(s - b)^n$ és/vagy $(s^2 + \alpha s + \beta)$ alakú tényezők szorzataként, ahol α , β és b valós számok, továbbá, $(s^2 + \alpha s + \beta)$ -nak nincs valós gyöke.
3. lépés Bontsuk fel $\frac{r(s)}{D(s)}$ -t parciális törtek összegére a következő módon:
- (i) Az $(s - b)^n$ alakú tagokat írjuk át az alábbi módon:

$$\frac{A_1}{(s - b)} + \frac{A_2}{(s - b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(s - b)^n}.$$

- (ii) Az $(s^2 + \alpha s + \beta)$ alakú tagokat pedig az alábbi módon:

$$\frac{B_1 s + C_1}{s^2 + \alpha s + \beta} + \frac{B_2 s + C_2}{(s^2 + \alpha s + \beta)^2} + \cdots + \frac{B_n s + C_n}{(s^2 + \alpha s + \beta)^n}.$$

Példák

Bontsuk parciális törtek összegére az alábbi kifejezéseket:

$$\textcircled{1} R(s) = \frac{s^3 + s^2 + 2}{s^2 - 1};$$

$$\textcircled{2} R(s) = \frac{s^2 + 5s - 3}{(s^2 + 16)(s - 2)}.$$

Példák

Számítsuk ki az inverz Laplace transzformáltakat!

$$\textcircled{1} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s-3)} \right].$$

$$\textcircled{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3s+6}{s^2+3s} \right].$$

Példa

Laplace transzformáció segítségével oldjuk meg az alábbi kezdeti érték problémát!

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Megoldás: A Laplace transzformáció linearitását felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y''] + 3\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{-t}].$$

A deriváltra vonatkozó szabály és a kezdeti értékek felhasználásával kapjuk, hogy

$$s^2 Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \text{where } \mathcal{L}[y] = Y(s).$$

Átrendezés után a következőket kapjuk:

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+3s+2)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)(s^2+3s+2)} \right].$$

Bontsuk parciális törtek összegére a jobboldali kifejezést.

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+3s+2)} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Az inverz Laplace transzformáció linearitását felhasználva kapjuk a kezdeti érték probléma megoldását.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+2} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)^2} \right] = e^{-2t} - e^{-t} + te^{-t}.$$