

3. beadandó program

Köbös spline-interpoláció

Legyenek adottak az $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ alappontok és az f_0, f_1, \dots, f_n , illetve y_0 és y_n értékek. Olyan $S(x)$ kétszer folytonosan differenciálható függvényt keresünk, melyre

$$S(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n, \quad (1)$$

és

$$S'(x_0) = y_0, \quad S'(x_n) = y_n, \quad (2)$$

teljesül, továbbá

$$S(x) = s_i(x), \quad \text{ha } x \in [x_i, x_{i+1}],$$

ahol $s_i(x)$ legfeljebb harmadfokú polinom.

Adottak tehát az

	x_0	x_1	x_2	\dots	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
S	f_0	f_1	f_2	\dots	f_{n-2}	f_{n-1}	f_n
S'	y_0			\dots			y_n

adatok. Egészítsük ki a táblázatot az y_1, \dots, y_{n-1} ismeretlen mennyiségekkel:

	x_0	x_1	x_2	\dots	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
S	f_0	f_1	f_2	\dots	f_{n-2}	f_{n-1}	f_n
S'	y_0	y_1	y_2	\dots	y_{n-2}	y_{n-1}	y_n

Tekintsük valamelyik x_i belső pontot (tehát $i = 1, \dots, n-1$) és írjuk fel az

	x_{i-1}	x_i
S	f_{i-1}	f_i
S'	y_{i-1}	y_i

illetve

	x_i	x_{i+1}
S	f_i	f_{i+1}
S'	y_i	y_{i+1}

táblázatokhoz tartozó Hermite-polinomokat (ezek lesznek a keresett $s_{i-1}(x)$, ill. $s_i(x)$ polinomok). Az így meghatározott szakaszonként harmadfokú $S(x)$ polinom teljesíti az (1) és (2) feltételeket és az első deriváltja folytonos lesz.

Legyen $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \dots, n-1$. Osztott differenciák módszerével a második táblázatból kapjuk, hogy

$$s_i(x) = f_i + y_i(x - x_i) + \frac{1}{h_i}([x_i, x_{i+1}]f - y_i)(x - x_i)^2 + \frac{1}{h_i^2}(y_{i+1} - 2[x_i, x_{i+1}]f + y_i)(x - x_i)^2(x - x_{i+1})$$

ezt kétszer deriválva és az x_i pontot behelyettesítve:

$$s_i''(x_i) = \frac{2}{h_i}(3[x_i, x_{i+1}]f - 2y_i - y_{i+1}). \quad (3)$$

Az első táblázatból hasonlóan kapjuk, hogy

$$s''_{i-1}(x_i) = \frac{2}{h_{i-1}}(-3[x_{i-1}, x_i]f + y_{i-1} + 2y_i). \quad (4)$$

Az ismeretlen y_1, \dots, y_{n-1} mennyiségeket abból a feltételből fogjuk meghatározni, hogy megköveteljük, hogy S'' folytonos legyen:

$$s''_i(x_i) = s''_{i-1}(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Ekkor a (3) és (4) egyenleteket felhasználva azt kapjuk, hogy $i = 1, \dots, n-1$ esetén

$$h_i y_{i-1} + 2y_i(h_i + h_{i-1}) + h_{i-1} y_{i+1} = 3(h_{i-1}[x_i, x_{i+1}]f + h_i[x_{i-1}, x_i]f).$$

Ha $i = 1$, akkor mivel y_0 ismert a $h_1 y_0$ tag átvihető a jobb oldalra. Hasonlóan, ha $i = n-1$, akkor y_n ismert, így a $h_{n-2} y_n$ tag szintén átvihető.

Összességében tehát az ismeretlen y_1, \dots, y_{n-1} paraméterekre egy

$$Ay = c$$

lineáris egyenletrendszer kaptunk, melynek A mátrixa tridiagonális:

$$\begin{pmatrix} 2(h_1 + h_0) & h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_2 & 2(h_2 + h_1) & h_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & 2(h_3 + h_2) & h_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2(h_{n-2} + h_{n-3}) & h_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_{n-2}) \end{pmatrix},$$

az egyenletrendszer jobb oldala:

$$c = \begin{pmatrix} 3(h_0[x_1, x_2]f + h_1[x_0, x_1]f) - h_1 y_0 \\ 3(h_1[x_2, x_3]f + h_2[x_1, x_2]f) \\ 3(h_2[x_3, x_4]f + h_3[x_2, x_3]f) \\ \vdots \\ 3(h_{n-3}[x_{n-2}, x_{n-1}]f + h_{n-2}[x_{n-3}, x_{n-2}]f) \\ 3(h_{n-2}[x_{n-1}, x_n]f + h_{n-1}[x_{n-2}, x_{n-1}]f) - h_{n-2} y_n \end{pmatrix},$$

(tehát az első és utolsó komponens a többitől eltérő alakú), az y vektort pedig a kiszámítandó y_1, \dots, y_{n-1} értékek alkotják:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Az algoritmus:

Adottak az x_0, \dots, x_n , f_0, \dots, f_n és y_0, y_n értékek, ezenkívül m darab szám: z_1, \dots, z_m .

A feladat: az x_0, \dots, x_n , f_0, \dots, f_n és y_0, y_n adatokat felhasználva számítsuk ki az $S(x)$ harmadfokú spline értékét a z_1, \dots, z_m pontokban. (Tehát nem a szakaszonként harmadfokú $S(x)$ polinomot kell visszaadnia a programnak, hanem az $S(z_1), \dots, S(z_m)$ értékeket).

1. Számítsuk ki a $h_i = x_{i+1} - x_i$ mennyiségeket ($i = 0, \dots, n-1$). Ha $h_i \leq 0$ valamely i -re, akkor a feladat megoldása befejeződik **alappontok** hibaüzenettel.

Ha a z_j pontok valamelyike ($j = 1, \dots, m$) kívül van az $[x_0, x_n]$ intervallumon (azaz $z_j < x_0$, vagy $z_j > x_n$), akkor a feladat megoldása befejeződik **z-ertekek** üzenettel.

2. Számítsuk ki az $[x_i, x_{i+1}]f$ osztott differenciákat ($i = 0, \dots, n-1$).

3. A tridiagonális algoritmussal oldjuk meg az $Ay = c$ lineáris egyenletrendszert, ahol az $(n-1) \times (n-1)$ -es A mátrix és az $(n-1)$ komponensből álló c vektor az előző oldalon látható.

4. Minden egyes j -re ($j = 1, \dots, m$) határozzuk meg, hogy a z_j érték melyik $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumba esik. Ha meghatároztuk i értékét, akkor tudjuk, hogy $S(z_j) = s_i(z_j)$. Számítsuk ki az $s_i(z_j)$ értéket:

$$s_i(z_j) = f_i + y_i(z_j - x_i) + \frac{1}{h_i}([x_i, x_{i+1}]f - y_i)(z_j - x_i)^2 + \frac{1}{h_i^2}(y_{i+1} - 2[x_i, x_{i+1}]f + y_i)(z_j - x_i)^2(z_j - x_{i+1})$$

5. Írjuk ki az $S(z_j)$ értékeket ($j = 1, \dots, m$).

Az input:

Az első sorban a megoldandó feladatok száma: N (és $N \leq 20$). Ezt követi $N \cdot 5$ sor, azaz minden megoldandó feladathoz 5 sor tartozik, a köv. módon:

$n \quad m$

$x_0 \quad \dots \quad x_n$

$f_0 \quad \dots \quad f_n$

$y_0 \quad y_n$

$z_1 \quad \dots \quad z_m$

ahol a használt jelölések megegyeznek az algoritmus leírásánál használt jelölésekkel.

Az output: Annyi sorból áll, ahány feladatot oldottunk meg (N). Minden feladathoz 1 sor tartozik, amely vagy az

alappontok

vagy a

z-ertekek

hibaüzenetet, vagy az

$S(z_1) \quad \dots \quad S(z_m)$

értékeket tartalmazza.

1. Példa: Határozzuk meg az alábbi adatokhoz tartozó harmadfokú spline értékét a

$$-1.6, -0.5, 0.75, -0.25, 2.4, 1.8$$

pontokban!

x_i	-2	-1	0	1	2	3
S	4	1	7	4	12	9
S'	15					8

Ebben az esetben az input adatok:

5 6

-2 -1 0 1 2 3

4 1 7 4 12 9

15 8

-1.6 -0.5 0.75 -0.25 2.4 1.8

1. A h_0, \dots, h_4 értékek mindegyikére azt kapjuk, hogy 1-gyel egyenlő, és az összes z_j , $j = 1, \dots, 5$ érték benne van a $[-2, 3]$ intervallumban.

2. Az osztott differenciák: $[x_0, x_1]f = -3$, $[x_1, x_2]f = 6$, $[x_2, x_3]f = -3$, $[x_3, x_4]f = 8$, $[x_4, x_5]f = -3$.

3. Az A mátrix és a c vektor:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 15 \\ 7 \end{pmatrix},$$

ahol az A mátrixnak csak három átlóját tároljuk 3 vektorban. Az egyenletrendszer megoldása után azt kapjuk, hogy $y_1 = -2$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$, $y_4 = 1$.

4. Ezek alapján az egyes részintervallumokon adott $s_i(x)$ harmadfokú polinomok:

$$\text{ha } x \in [x_0, x_1] \quad s_0(x) = 4 + 15(x+2) - 18(x+2)^2 + 19(x+2)^2(x+1)$$

$$\text{ha } x \in [x_1, x_2] \quad s_1(x) = 1 - 2(x+1) + 8(x+1)^2 - 12(x+1)^2x$$

$$\text{ha } x \in [x_2, x_3] \quad s_2(x) = 7 + 2x - 5x^2 + 11x^2(x-1)$$

$$\text{ha } x \in [x_3, x_4] \quad s_3(x) = 4 + 3(x-1) + 5(x-1)^2 - 12(x-1)^2(x-2)$$

$$\text{ha } x \in [x_4, x_5] \quad s_4(x) = 12 + (x-2) - 4(x-2)^2 + 15(x-2)^2(x-3)$$

z_1 az $[x_0, x_1]$ intervallumban van, azaz $i = 0$, így $S(z_1) = s_0(z_1) = s_0(-1.6) = 5.296$

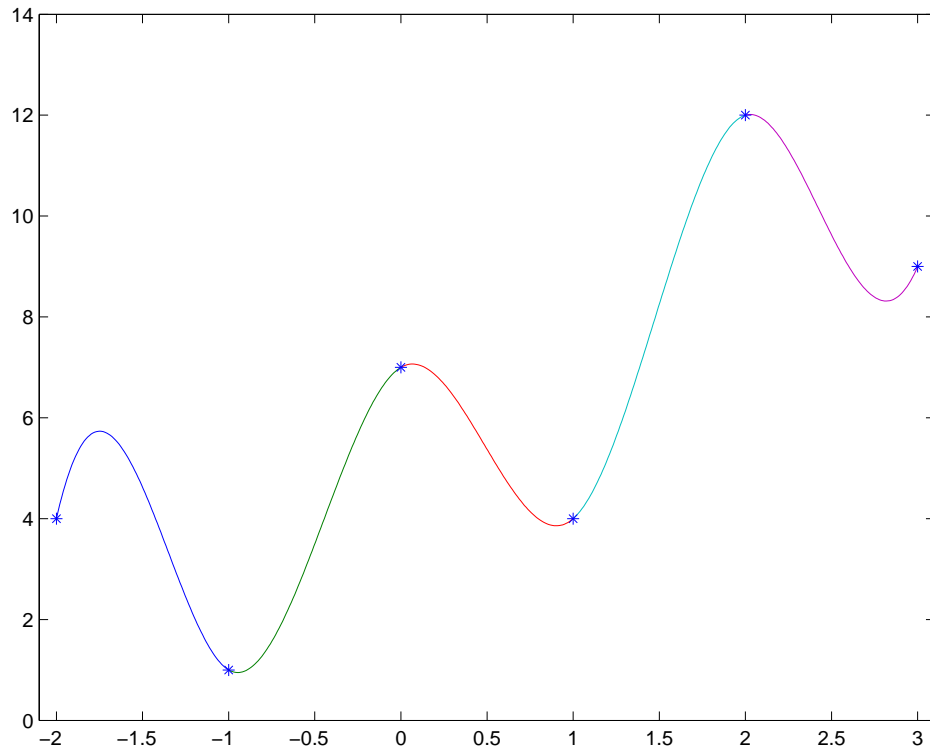
z_2 az $[x_1, x_2]$ intervallumban van, azaz $i = 1$, így $S(z_2) = s_1(z_2) = s_1(-0.5) = 3.5$

z_3 az $[x_2, x_3]$ intervallumban van, azaz $i = 2$, így $S(z_3) = s_2(z_3) = s_2(0.75) = 4.140625$

z_4 az $[x_1, x_2]$ intervallumban van, azaz $i = 1$, így $S(z_4) = s_1(z_4) = s_1(-0.25) = 5.6875$

z_5 az $[x_4, x_5]$ intervallumban van, azaz $i = 4$, így $S(z_5) = s_4(z_5) = s_4(2.4) = 10.32$

z_6 az $[x_3, x_4]$ intervallumban van, azaz $i = 3$, így $S(z_6) = s_3(z_6) = s_3(1.8) = 11.136$



Ha kirajzoltatjuk az s_i polinomokat a megfelelő intervallumok fölött (**a beadandó programnak nem kell rajzolnia!**), akkor a fenti ábrát kapjuk, ahol a megadott (x_i, f_i) pontokat $(i = 0, \dots, 5)$ az ábrán *-gal jelöltük.

2. Példa: Határozzuk meg az alábbi adatokhoz tartozó harmadfokú spline értékét a $-1.6, -1.1, -0.75, -0.5, -0.25, 0.1, 0.3, 0.75, 1.2, 1.5, 1.8$ pontokban!

x_i	-2	-3	0	1	2
S	1	5	8	11	7
S'	20				-4

Ebben az esetben az input adatok:

```
4 11
-2 -3 0 1 2
1 5 8 11 7
20 -4
-1.6 -1.1 -0.75 -0.5 -0.25 0.1 0.3 0.75 1.2 1.5 1.8
```

1. $h_0 = -1$, azaz $h_0 \leq 0$, így az algoritmus befejeződik **alappontok** hibaüzenettel.

3. Példa: Határozzuk meg az alábbi adatokhoz tartozó harmadfokú spline értékét a $-1.6, -1.1, -0.75, -0.5, -0.25, 0.1, 0.3, 0.75, 1.2, 1.5, 1.8$ pontokban!

x_i	-2	-1	0	1	2
S	1	5	8	11	7
S'	20				-4

Ebben az esetben az input adatok:

4 11

-2 -1 0 1 2

1 5 8 11 7

20 -4

-1.6 -1.1 -0.75 -0.5 -0.25 0.1 0.3 0,75 1.2 1.5 1.8

1. A h_0, \dots, h_4 értékek mindegyikére azt kapjuk, hogy 1-gyel egyenlő.
2. Az osztott differenciák: $[x_0, x_1]f = 4$, $[x_1, x_2]f = 3$, $[x_2, x_3]f = 3$, $[x_3, x_4]f = -4$.
3. Az A mátrix és a c vektor:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 18 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ahol az A mátrixnak csak három átlóját tároljuk 3 vektorban. Az egyenletrendszer megoldása után azt kapjuk, hogy $y_1 = -1$, $y_2 = 5$, $y_3 = -1$.

4. Ezek alapján az egyes részintervallumokon adott $s_i(x)$ harmadfokú polinomok:

$$\text{ha } x \in [x_0, x_1] \quad s_0(x) = 1 + 20(x+2) - 16(x+2)^2 + 11(x+2)^2(x+1)$$

$$\text{ha } x \in [x_1, x_2] \quad s_1(x) = 5 - (x+1) + 4(x+1)^2 - 2(x+1)^2x$$

$$\text{ha } x \in [x_2, x_3] \quad s_2(x) = 8 + 5x - 2x^2 - 2x^2(x-1)$$

$$\text{ha } x \in [x_3, x_4] \quad s_3(x) = 11 - (x-1) - 3(x-1)^2 + 3(x-1)^2(x-2)$$

és

z_1 az $[x_0, x_1]$ intervallumban van, azaz $i = 0$, így $S(z_1) = 5.384$,

z_2 az $[x_0, x_1]$ intervallumban van, azaz $i = 0$, így $S(z_2) = 5.149$,

z_3 az $[x_1, x_2]$ intervallumban van, azaz $i = 1$, így $S(z_3) = 5.09375$,

z_4 az $[x_1, x_2]$ intervallumban van, azaz $i = 1$, így $S(z_4) = 5.75$,

z_5 az $[x_1, x_2]$ intervallumban van, azaz $i = 1$, így $S(z_5) = 6.78125$,

z_6 az $[x_2, x_3]$ intervallumban van, azaz $i = 2$, így $S(z_6) = 8.498$,

z_7 az $[x_2, x_3]$ intervallumban van, azaz $i = 2$, így $S(z_7) = 9.446$,

z_8 az $[x_2, x_3]$ intervallumban van, azaz $i = 2$, így $S(z_8) = 10.90625$,

z_9 az $[x_3, x_4]$ intervallumban van, azaz $i = 3$, így $S(z_9) = 10.584$,

z_{10} az $[x_3, x_4]$ intervallumban van, azaz $i = 3$, így $S(z_{10}) = 9.375$,

z_{11} az $[x_3, x_4]$ intervallumban van, azaz $i = 3$, így $S(z_{11}) = 7.896$.

4. Példa: Határozzuk meg az alábbi adatokhoz tartozó harmadfokú spline értékét a -1.8, -1.6, -1.2, -0.75, -0.5, 0, 0.2, 0.8, 1.1, 1.3, 2, 2.5, 2.75, 3.2, 3.5, 3.75 pontokban!

x_i	-2	-1	1	3	4
S	1	3	9	7	5
S'	$\frac{25}{2}$				$-\frac{11}{2}$

Ebben az esetben az input adatok:

4 16

-2 -1 1 3 4

1 3 9 7 5

12.5 -5.5

-1.8 -1.6 -1.2 -0.75 -0.5 0 0.2 0.8 1.1 1.3 2 2.5 2.75 3.2 3.5 3.75

1. $h_0 = 1, h_1 = 2, h_2 = 2, h_3 = 1.$

2. Az osztott differenciák: $[x_0, x_1]f = 2, [x_1, x_2]f = 3, [x_2, x_3]f = -1, [x_3, x_4]f = -2.$

3. Az A mátrix és a c vektor:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása után azt kapjuk, hogy $y_1 = -1, y_2 = 2, y_3 = -1.$

4. Ezek alapján az egyes részintervallumokon adott $s_i(x)$ harmadfokú polinomok:

$$\text{ha } x \in [x_0, x_1] \quad s_0(x) = 1 + \frac{25}{2}(x+2) - \frac{21}{2}(x+2)^2 + \frac{15}{2}(x+2)^2(x+1)$$

$$\text{ha } x \in [x_1, x_2] \quad s_1(x) = 3 - (x+1) + 2(x+1)^2 - \frac{5}{4}(x+1)^2(x-1)$$

$$\text{ha } x \in [x_2, x_3] \quad s_2(x) = 9 + 2(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{3}{4}(x-1)^2(x-3)$$

$$\text{ha } x \in [x_3, x_4] \quad s_3(x) = 7 - (x-3) - (x-3)^2 - \frac{5}{2}(x-3)^2(x-4)$$

és

z_1 az $[x_0, x_1]$ intervallumban van, azaz $i = 0$, így $S(z_1) = 2.84,$

z_2 az $[x_0, x_1]$ intervallumban van, azaz $i = 0$, így $S(z_2) = 3.6,$

z_3 az $[x_0, x_1]$ intervallumban van, azaz $i = 0$, így $S(z_3) = 3.32,$

z_4 az $[x_1, x_2]$ intervallumban van, azaz $i = 1$, így $S(z_4) = 3.01171875,$

z_5 az $[x_1, x_2]$ intervallumban van, azaz $i = 1$, így $S(z_5) = 3.46875,$

z_6 az $[x_1, x_2]$ intervallumban van, azaz $i = 1$, így $S(z_6) = 5.25,$

z_7 az $[x_1, x_2]$ intervallumban van, azaz $i = 1$, így $S(z_7) = 6.12,$

z_8 az $[x_1, x_2]$ intervallumban van, azaz $i = 1$, így $S(z_8) = 8.49,$

z_9 az $[x_2, x_3]$ intervallumban van, azaz $i = 2$, így $S(z_9) = 9.17075,$

z_{10} az $[x_2, x_3]$ intervallumban van, azaz $i = 2$, így $S(z_{10}) = 9.35025,$

z_{11} az $[x_2, x_3]$ intervallumban van, azaz $i = 2$, így $S(z_{11}) = 8.75,$

z_{12} az $[x_2, x_3]$ intervallumban van, azaz $i = 2$, így $S(z_{12}) = 7.78125,$

z_{13} az $[x_2, x_3]$ intervallumban van, azaz $i = 2$, így $S(z_{13}) = 7.33203125,$

z_{14} az $[x_3, x_4]$ intervallumban van, azaz $i = 3$, így $S(z_{14}) = 6.84$,
 z_{15} az $[x_3, x_4]$ intervallumban van, azaz $i = 3$, így $S(z_{15}) = 6.5625$,
 z_{16} az $[x_3, x_4]$ intervallumban van, azaz $i = 3$, így $S(z_{16}) = 6.0390625$.

5. Példa: Határozzuk meg az alábbi adatokhoz tartozó harmadfokú spline értékét a $-1.8, -3.5, -1, -0.5, 0.25, 0.75, 1, 1.2, 1.5, 2.2, 2.5, 2.8$ pontokban!

x_i	-2	0	$\frac{1}{2}$	2	3
S	2	4	3	27	25
S'	-27				20

Ebben az esetben az input adatok:

4 12
 -2 0 0.5 2 3
2 4 3 27 25
 -27 20
 -1.8 -3.5 -1 -0.5 0.25 0.75 1 1.2 1.5 2.2 2.5 2.8

1. Mivel $z_2 \notin [x_0, x_4]$, az algoritmus befejeződik **z-erte**k hibaüzenettel.

6. Példa: Határozzuk meg az alábbi adatokhoz tartozó harmadfokú spline értékét a $-1.8, -1.5, -1, -0.5, 0.25, 0.75, 1, 1.2, 1.5, 2.2, 2.5, 2.8$ pontokban!

x_i	-2	0	$\frac{1}{2}$	2	3
S	2	4	3	27	25
S'	-27				20

Ebben az esetben az input adatok:

4 12
 -2 0 0.5 2 3
2 4 3 27 25
 -27 20
 -1.8 -1.5 -1 -0.5 0.25 0.75 1 1.2 1.5 2.2 2.5 2.8

1. $h_0 = 2$, $h_1 = \frac{1}{2}$, $h_2 = \frac{3}{2}$, $h_3 = 1$.

2. Az osztott differenciák: $[x_0, x_1]f = 1$, $[x_1, x_2]f = -2$, $[x_2, x_3]f = 16$, $[x_3, x_4]f = -2$.

3. Az A mátrix és a c vektor:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása után azt kapjuk, hogy $y_1 = -1$, $y_2 = 4$, $y_3 = 1$.

4. Ezek alapján az egyes részintervallumokon adott $s_i(x)$ harmadfokú polinomok:

$$\text{ha } x \in [x_0, x_1] \quad s_0(x) = 2 - 27(x+2) + 14(x+2)^2 - \frac{15}{2}(x+2)^2x$$

$$\text{ha } x \in [x_1, x_2] \quad s_1(x) = 4 - x - 2x^2 + 28x^2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{ha } x \in [x_2, x_3] \quad s_2(x) = 3 + 4\left(x - \frac{1}{2}\right) + 8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2(x-2)$$

$$\text{ha } x \in [x_3, x_4] \quad s_3(x) = 27 + (x-2) - 3(x-2)^2 + 25(x-2)^2(x-3)$$

Az output:

-2.3 -5.1875 -3.5 1.4375 3.1875 5.4375 10 14.424 21 26.28 23.625 22.68