

2. BEADANDÓ PROGRAM

Legkisebb négyzetes közelítés.

Adott t_1, \dots, t_m alappontok és f_1, \dots, f_m függvényértékek esetén a négyzetesen legjobban közelítő legfeljebb n -edfokú polinom meghatározása, illetve a polinom helyettesítési értékének meghatározása adott z_1, \dots, z_M helyeken.

Ha a közelítő polinom

$$F(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i,$$

akkor az $A^T A x = A^T f$ Gauss-féle normálegyenletben

$$A^T A = \begin{pmatrix} m & \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^m t_i^n \\ \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 & \sum_{i=1}^m t_i^3 & \cdots & \sum_{i=1}^m t_i^{n+1} \\ \sum_{i=1}^m t_i^2 & \sum_{i=1}^m t_i^3 & \sum_{i=1}^m t_i^4 & \cdots & \sum_{i=1}^m t_i^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^m t_i^n & \sum_{i=1}^m t_i^{n+1} & \sum_{i=1}^m t_i^{n+2} & \cdots & \sum_{i=1}^m t_i^{2n} \end{pmatrix},$$

és

$$A^T f = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m f_i \\ \sum_{i=1}^m f_i t_i \\ \sum_{i=1}^m f_i t_i^2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m f_i t_i^n \end{pmatrix}.$$

A normálegyenletet megoldásánál az 1. feladatként programozott Cholesky-felbontást használják! Ha a felbontás során kiderül, hogy a mátrix nem pozitív definit (tehát a legkisebb négyzetes feladat megoldása nem egyértelmű), akkor a **singularis** üzenet jelenjen meg.

A normálegyenlet megoldásával megkapjuk a keresett polinom c_0, \dots, c_n együtthatóit, ezekből Horner-algoritmus segítségével (ld. Stoyan Gisbert: Numerikus matematika mérnököknek és programozóknak, 110. oldal) meg kell határozni a polinom z_1, \dots, z_M pontokban felvett helyettesítési értékét.

Az outputban 8 tizedes jegyig legyenek kiírva a számok.

Input: A beolvasás a standard inputról történik. Az input első sora a megoldandó feladatok számát tartalmazza (N , ahol $N \leq 20$), a következő sorban az első feladatra vonatkozó m, n, M értékek szerepelnek (egymástól szóközzel elválasztva), az ezt követő 3 sorban rendre a t_1, \dots, t_m alappontok, az f_1, \dots, f_m függvényértékek és a z_1, \dots, z_M értékek. Ezt követően ugyanezek az adatok következnek a többi feladatra vonatkozóan.

Output: N részből áll: minden feladat esetén a keresett polinom együtthatóit (c_0, \dots, c_n), és a polinom z_1, \dots, z_M pontokban felvett helyettesítési értékét tartalmazza. Ha az adott feladat esetén az egyenletrendszer mátrixa nem pozitív definit, akkor csak a **singularis** üzenet jelenjen meg.

Példainput:

```

3
5 1 2
-1 -1 1 2 3
1 0.5 0 -0.5 0
-0.5 1.5
4 1 3
1 1 1 1
1 2 1 2
1 2 3
4 3 2
1 2 3 4
1 8 27 64
0 -1

```

Itt 3 feladatot akarunk megoldani, az első esetben 5 darab mérési eredményünk van ($m = 5$), elsőfokú polinommal szeretnénk közelíteni az adatokat ($n = 1$), és 2 helyen kell kiszámítani a polinom értékét ($M = 2$). A t_i értékek: $-1, -1, 1, 2, 3$, az f_i értékek: $1, 0.5, 0, -0.5, 0$. A z_i értékek: $-0.5, 1.5$.

A második esetben $m = 4$, $n = 1$, $M = 3$, a t_i értékek: $1, 1, 1, 1$, az f_i értékek: $1, 2, 1, 2$, a z_i értékek: $1, 2, 3$.

A harmadik esetben $m = 4$, $n = 3$, $M = 2$, a t_i értékek: $1, 2, 3, 4$, az f_i értékek: $1, 8, 27, 64$, a z_i értékek: $0, -1$.

Az első esetben az $A^T A$ mátrix és az $A^T f$ vektor:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}, \quad A^T f = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

A Gauss-féle normálegyenlet megoldása után azt kapjuk, hogy $c_0 = \frac{13}{32} = 0.40625$, $c_1 = -\frac{33}{128} = -0.2578125$. A $-0.5, 1.5$ helyen vett helyettesítési értékek: $0.53515625, 0.01953125$.

A második esetben elsőfokú polinommal akarunk közelíteni, de mind a négy t_i érték megegyezik, így a Gauss-féle normálegyenlet szinguláris.

A harmadik esetben látható, hogy a (t_i, f_i) értékek az $F(t) = t^3$ függvényből származnak, és itt a feladat egy legfeljebb harmadfokú modell illesztése, így a Gauss-féle normálegyenlet megoldása után visszkapjuk az $F(t) = t^3$ függvényt, azaz $c_0 = c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = 1$. A helyettesítési értékek: $0, -1$.

Példaoutput:

```

0.40625000 -0.25781250
0.53515625 0.01953125
szingularis
0.00000000 0.00000000 0.00000000 1.00000000
0.00000000 -1.00000000

```