

Numerikus matematika

May 11, 2013

Nemlineáris egyenletek megoldása

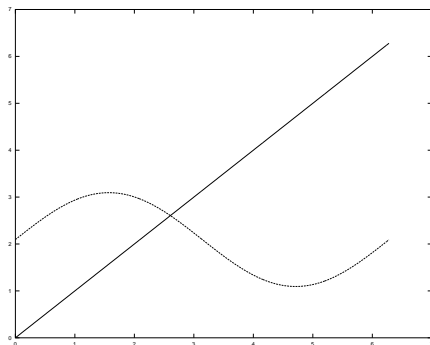
Bevezető

Már egyszerű geometriai feladatok is vezethetnek olyan egyenletre, melyből az ismeretlent nem lehet egyszerűen kifejezni, például: egy körből vágjuk le egy szelővel a területének $\frac{1}{3}$ -át. Ez a következő egyenletre vezet:

$$\alpha = \sin(\alpha) + \frac{2\pi}{3}$$

Nemlineáris egyenletek megoldása

Bevezető



Nemlineáris egyenletek megoldása

Bevezető

Ilyen egyenletek közelítő megoldásával foglalkozunk. Azaz egy tetszőleges $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény esetén szeretnénk meghatározni zérushelyeinek elég jó közelítését.

Nemlineáris egyenletek megoldása

Felező módszer

Ha $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény függvényre $f(a)f(b) < 0$,
akkor $\exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = 0$. Ez az alapja a következő módszernek:

Nemlineáris egyenletek megoldása

Felező módszer

$$a < b, f(a)f(b) < 0, \epsilon > 0$$

while $b - a > \epsilon$ **do**

$$m = \frac{a+b}{2}$$

ha $f(a)f(m) \leq 0$ akkor $b = m$,

egyébként $a = m$.

end while

Nemlineáris egyenletek megoldása

Felező módszer, hiba

Legyen $d = b - a$. Az n -ik lépés után $b - a = \frac{d}{2^n}$. Ezért, ha egy $\epsilon > 0$ nagyságú intervallumba akarjuk beszorítani a gyököt, akkor

$$n > \frac{\log(\frac{d}{\epsilon})}{\log(2)}$$

Nemlineáris egyenletek megoldása

Felező módszer, konvergencia

A felező módszert átírhatjuk a következő alakba:

$$a < b, f(a)f(b) < 0, \epsilon > 0$$

$$k = 0$$

while $b - a > \epsilon$ **do**

$$x_k = \frac{a+b}{2}$$

ha $f(a)f(x_k) \leq 0$ akkor $b = x_k$,

egyébként $a = x_k$.

$$k = k + 1$$

end while

Nemlineáris egyenletek megoldása

Felező módszer, konvergencia

Ha $d = b - a$ és $e_k = |x_k - x^*|$, akkor

$$e_k \leq \frac{d}{2^k}.$$

Nemlineáris egyenletek megoldása

Példa

felez.m

matlab: *inline* használata.

Nemlineáris egyenletek megoldása

Szelőmódszer

Ha x_{k-1}, x_k adott, illesszünk az $(x_{k-1}, f(x_{k-1})), (x_k, f(x_k))$ pontokra egyenest, legyen x_{k+1} ezen egyenes x tengellyel való metszéspontja. A kapott x_k sorozat bizonyos feltételek mellett konvergens.

Nemlineáris egyenletek megoldása

Szelőmódszer

x_{k+1} -re érvényes az:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Nemlineáris egyenletek megoldása

Szelőmódszer, hiba

Tegyük fel, hogy $f(x^*) = 0$ valamely $x^* \in (a, b)$ -re. Ha

$$|f''(x)| \leq m_2, \quad 0 < m_1 \leq |f'(x)|$$

minden $x \in [a, b]$ -re, akkor

$$e_{k+1} \leq \frac{m_2}{2m_1} e_{k-1} e_k,$$

ahol $e_k = |x_k - x^*|$.

Nemlineáris egyenletek megoldása

Szelőmódszer, hiba

Ha $d = \max(e_0, e_1)$, $C = \frac{m_2}{2m_1}$, $d_k = Ce_k$, akkor $d_{k+1} \leq d_{k-1}d_k$,
amiből indukcióval következik, hogy:

$$d_k \leq d^{\gamma_k},$$

ahol $\gamma = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$ az ún. Fibonacci-sorozat.

Nemlineáris egyenletek megoldása

Szelőmódszer, konvergencia, elégséges feltétel

Ha $d < 1$ akkor a $x_k \rightarrow x^*$.

Nemlineáris egyenletek megoldása

Szelőmódszer, példa

szelo.m

Nemlineáris egyenletek megoldása

Newton-Raphson

Ha x_k adott, határozzuk meg az $(x_k, f(x_k))$ ponthoz tartozó érintőjét, legyen x_{k+1} ezen egyenes x tengellyel való metszéspontja.
A kapott x_k sorozat bizonyos feltételek mellett konvergens.

Nemlineáris egyenletek megoldása

Newton-Raphson

x_{k+1} -re érvényes az:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Nemlineáris egyenletek megoldása

Newton-Raphson, hiba

Tegyük fel, hogy $f(x^*) = 0$ valamely $x^* \in (a, b)$ -re. Ha

$$|f''(x)| \leq m_2, \quad 0 < m_1 \leq |f'(x)|$$

minden $x \in [a, b]$ -re, akkor

$$e_{k+1} \leq \frac{m_2}{2m_1} e_k^2,$$

ahol $e_k = |x_k - x^*|$.

Nemlineáris egyenletek megoldása

Newton-Raphson, hiba

Ha $d = e_0$, $C = \frac{m_2}{2m_1}$, $d_k = Ce_k$, akkor $d_{k+1} \leq d_k^2$, amiből
indukcióval következik, hogy:

$$d_k \leq d^{2^k}.$$

Nemlineáris egyenletek megoldása

Newton-Raphson, konvergencia

Ha $d < 1$, akkor $x_k \rightarrow x^*$.

Nemlineáris egyenletek megoldása

Newton-Raphson, példa

newton.m

wiki

matlab: *fzero* használata.

Nemlineáris egyenletek megoldása

Összehasonlítás

Legyen $d < 1$, ekkor elég nagy k -ra:

$$d^{2^k} < d^{\gamma_k} < \frac{1}{2}^k,$$

ami azt mutatja, hogy a tárgyaltak közül a felező a leglassabb, a Newton a leggyorsabb, a szelő a kettő között helyezkedik.

Nemlineáris egyenletek megoldása

Összehasonlítás

Durván annyit mondhatunk a hiba-formulák alapján, hogy a felező-módszernél "néhány" lépésenként 1-el nő a pontos jegyek száma, a Newton-nál "néhány" lépésenként megduplázódik, a szelő pedig a kettő között helyezkedik el.

Nemlineáris egyenletek megoldása

Összehasonlítás

Ezt szokás úgy is megfogalmazni - a "rend" fogalmát intuitívan használva - hogy a felező módszer elsőrendűen, lineárisan, a szelő szuper-lineárisan, a Newton pedig másodrendűen, kvadratikusan konvergens, a megfelelő feltételek teljesülése esetén.

Nemlineáris egyenletek megoldása

Fixpont-iteráció, motiváció

$$f(x) = 0 \Rightarrow g(x) = f(x) + x = x,$$

$$g(x) = x \Rightarrow f(x) = g(x) - x = 0.$$

Nemlineáris egyenletek megoldása

Fixpont-iteráció, Banach-tétel

Legyen (X, ρ) teljes metrikus tér, $f : X \rightarrow X$ melyre:

$$\rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y),$$

teljesül minden $x, y \in X$ -re valamely $0 < q < 1$ -el. Ekkor

$$\exists! x^* : f(x^*) = x^*.$$

Nemlineáris egyenletek megoldása

Fixpont-iteráció, Banach-tétel

Sőt, bármely $x \in X$ esetén, az $x_0 = x$, $x_k = f(x_{k-1})$ sorozatra:
 $x_k \rightarrow x^*$ teljesül.

Nemlineáris egyenletek megoldása

Fixpont-iteráció, megjegyzés

Az fenti tulajdonságú f függvényeket kontrakciónak nevezik, a q -t pedig kontrakciós állandónak.

Nemlineáris egyenletek megoldása

Fixpont-iteráció, indoklás

A háromszög egyenlőtlenség alapján adódik a:

$$\rho(x, y) \leq \frac{\rho(x, f(x)) + \rho(y, f(y))}{1 - q} \quad (\text{A})$$

összefüggés,

Nemlineáris egyenletek megoldása

Fixpont-iteráció,indoklás

amiből kapjuk, hogy:

$$\rho(f^n(x), f^m(y)) \leq \frac{q^n \rho(x, f(x)) + q^m \rho(y, f(y))}{1 - q}. \quad (\text{B})$$

Nemlineáris egyenletek megoldása

Fixpont-iteráció, indoklás

Ez viszont $x = y$ választással éppen azt jelenti, hogy x_k

Cauchy-sorozat, tehát konvergens:

$$x_k \rightarrow x^*.$$

Hasonlóan, egy $y \neq x$ -re: $y_k \rightarrow y^*$. Tegyük fel, hogy $x^* \neq y^*$:

Nemlineáris egyenletek megoldása

Fixpont-iteráció, indoklás

$$\rho(x^*, y^*) \leq \rho(x^*, f^n(x)) + \rho(f^n(x), f^m(y)) + \rho(y^*, f^m(y)),$$

ez azt jelenti, hogy $x^* = y^*$.

Nemlineáris egyenletek megoldása

Fixpont-iteráció, indoklás

Látjuk, hogy tetszőleges pontból indítva az iterációt mindig "ugyanoda jutunk": x^* . Be kell még látni, hogy:

$$f(x^*) = x^*,$$

Nemlineáris egyenletek megoldása

Fixpont-iteráció, indoklás

ami az

$$\rho(x^*, f(x^*)) \leq \rho(x^*, f^n(x^*)) + \rho(f(x^*), f^n(x^*)) \leq$$

$$\rho(x^*, f^n(x^*)) + q\rho(x^*, f^{n-1}(x^*))$$

alapján világos.

Nemlineáris egyenletek megoldása

Fixpont-iteráció, tulajdonságok

Érvényes a következő, fontos becslés:

$$\rho(x_k, x^*) \leq \frac{q^k}{1 - q} \rho(x_0, x_1) \quad (C)$$

amit (B)-ből kaphatunk meg. Ennek segítségével megbecsülhetjük, hogy adott pontosság eléréséhez hány lépést (iterációt) kell tenni.

Nemlineáris egyenletek megoldása

Fixpont-iteráció, tulajdonságok

(C) a felező-módszerhez hasonló, lineáris konvergencia sebességet sugall, de ettől sokkal gyorsabb is lehet...

Nemlineáris egyenletek megoldása

Fixpont-iteráció, Babilóni-módszer

Közelítsük $\sqrt{7}$ -et! $a = 7$ jelöléssel:

$$x^2 = a \Leftrightarrow x = \frac{a}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right).$$

Nemlineáris egyenletek megoldása

Fixpont-iteráció, Babilóni-módszer

Tehát az $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$ fixpontját keressük. Elvégezve négy iterációt:

$$x_0 = 2.5$$

$$x_1 = 2.6500000000000000$$

$$x_2 = 2.64575471698113$$

$$x_3 = 2.64575131106678$$

$$x_4 = 2.64575131106459$$

Nemlineáris egyenletek megoldása

Fixpont-iteráció, Babilóni-módszer

14 jegyre pontos eredményt kapunk! Miért működik? Legyen

$$I = [\sqrt{a}, a].$$

$f : I \rightarrow I$ és I teljes metrikus tér.

Nemlineáris egyenletek megoldása

Fixpont-iteráció, Babilóni-módszer

A középérték-tétel alapján (Rolle):

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi_{xy})| |x - y|,$$

vagyis ahhoz hogy kontrakció legyen f az adott intervallumon, elegendő, ha a deriváltja elég kicsi I -n:

Nemlineáris egyenletek megoldása

Fixpont-iteráció, Babilóni-módszer

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{x^2}\right),$$

f' monoton nő, $f'(\sqrt{a}) = 0$, $f'(a) < \frac{1}{2}$. Tehát f kontrakció I -n.

Nemlineáris egyenletek megoldása

Fixpont-iteráció, Babilóni-módszer

A módszer gyorsaságának intuitív magyarázata: a Newton-módszert alkalmazva az $f(x) = x^2 - a$ -ra ugyanezt a formulát kapjuk. Mindez pontosabban:

Nemlineáris egyenletek megoldása

Fixpont-iteráció, sebesség

Legyen f kontrakció $[a, b]$ -n, $f(x^*) = x^*$. Ha

$f^{(1)}(x^*) = f^{(2)}(x^*) = \dots = f^{(p-1)}(x^*) = 0$ és $f^{(p)}(x^*) \neq 0$, akkor

$$e_{k+1} \leq C e_k^p,$$

$e_k = |x_k - x^*|$ és $C = \max_{x \in [a, b]} \frac{|f^{(p)}(x)|}{p!}$ jelöléssel.

Nemlineáris egyenletek megoldása

Feladatok

matlab: fixpont.m

Sajátértékek közelítése

Motiváció

wiki

Sajátértékek közelítése

Definíció

A továbbiakban mátrixon négyzetes mátrixot értünk. Ha $\lambda, x_\lambda, x \neq 0$ olyan, hogy

$$Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$$

akkor λ -t A sajátértékének, a hozzá tartozó x_λ -t A sajátvektorának nevezzük.

Sajátértékek közelítése

Cayley-Hamilton

$$\lambda \text{ sajátértéke } A\text{-nak} \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0.$$

Azaz, egy n -ed fokú polinom gyökeit kell meghatározni.

Sajátértékek közelítése

Példa

feladatsor:1a

Sajátértékek közelítése

Alaptulajdonságok

1. $|\lambda| \leq \|A\|$, ahol $\|\cdot\|$ vektornorma által indukált;
2. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow 0$ nem sajátértéke A -nak;
3. ha λ sajátértéke A -nak, akkor $\frac{1}{\lambda}$ sajátértéke A^{-1} -nek;
4. ha λ sajátértéke A -nak, akkor λ^n sajátértéke A^n -nek;
5. ha λ sajátértéke A -nak és $c \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda - c$ sajátértéke $A - cE$ -nek;
6. A és A^T sajátértékei megegyeznek.

Sajátértékek közelítése

Gersgorin

Legyen $R_i = K(a_{ii}, \sum_{j \neq i} |a_{ij}|)$.

Ha λ sajátértéke A -nak, akkor $\lambda \in \cup_i R_i$.

Sajátértékek közelítése

Gersgorin, élesítés

Ha i_1, \dots, i_n olyan, hogy $\cup_{j=1}^k R_{i_j} \cap \cup_{j=k+1}^n R_{i_j} = \emptyset$, akkor

$\cup_{j=1}^k R_{i_j}$ pontosan k darab sajátértéket tartalmaz.

Sajátértékek közelítése

Gersgorin, következmény

Az A^T -hoz tartozó $\bar{R}_i = K(a_{ii}, \sum_{j \neq i} |a_{ji}|)$ körökről ugyanezeket mondhatjuk.

Sajátértékek közelítése

Gersgorin,következmény

Ha A szigorúan domináns főátlójú, akkor invertálható.

Sajátértékek közelítése

Példa

feladatsor:8

Sajátértékek közelítése

Tulajdonságok

1. Ha A $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sajátértékei különbözőek, akkor a megfelelő v_1, \dots, v_n vektorok bázist alkotnak.
2. (Rayleigh) Az $R(\alpha) = \|Ax - \alpha x\|$ mennyiséget az $\alpha = \frac{x^T Ax}{x^T x}$ minimalizálja.

Sajátértékek közelítése

Hatvány-iteráció

Tegyük fel, hogy A sajátértékei különbözőek: $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n|$, $\{v_i\}$ a megfelelő sajátvektor-rendszer. Legyen $x_0, \|x_0\| = 1$ olyan vektor, melyre $x = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$, $c_1 \neq 0$. Ekkor az

$x_k = \frac{Ax_{k-1}}{\|Ax_{k-1}\|}$ sorozatra:

$x_k \rightarrow w_1$, ahol w_1 egy λ_1 -hez tartozó sajátvektor.

Sajátértékek közelítése

Hatvány-iteráció

A gyakorlatban az x_0 -ra vonatkozó feltételeket nehéz ellenőrizni, ezért több különböző pontból is futtatjuk az iterációt.

Sajátértékek közelítése

Hatvány-iteráció, algo

$$n > 0, \|x\| = 1$$

while $n > 0$ **do**

$$x = \frac{Ax}{\|Ax\|}$$

$$n = n - 1$$

end while

$$\lambda = \frac{x^T Ax}{x^T x}$$

Sajátértékek közelítése

Hatvány-iteráció, megjegyzések

A konvergencia sebessége a $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ -től függ. A módszer csak a domináns sajátvektor-érték közelítésének meghatározására alkalmas.

Sajátértékek közelítése

Példa

hatit.m

matlab: *eig*

feladatsor:P1

Sajátértékek közelítése

Inverz-iteráció

Tegyük fel, hogy létezik A^{-1} és alkalmazzuk a hatvány-módszert A^{-1} -re. Megállapíthatjuk, hogy $x_k \rightarrow w$, ahol w a λ_n -hez, a "legkisebb" sajátértékhez tartozó sajátvektor. A gyakorlatban A^{-1} -et nem számoljuk, helyette a $Ax_k = x_{k-1}$ egyenletrendszert oldjuk meg.

Sajátértékek közelítése

Inverz-iteráció, algo

$$n > 0, \|x\| = 1$$

while $n > 0$ **do**

$Ay = x$ megoldása

$$x = \frac{y}{\|y\|}$$

$$n = n - 1$$

end while

$$\lambda = \frac{x^T A x}{x^T x}$$

Sajátértékek közelítése

Példa

invit.m

feladatsor:P1

matlab: *backslash*

Sajátértékek közelítése

Inverz-iteráció, eltolás

A módszer kiterjeszthető tetszőleges λ_m sajátérték meghatározására, ha rendelkezésre áll egy elég jó becslés. Legyen A -nak n különböző sajátértéke: ha $c \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $|\lambda_m - c| = \min_i |\lambda_i - c|$, akkor az inverz-iterációt $A - cE$ -re végrehajtva: $x_k \rightarrow w$, ahol w egy a λ_m -hez tartozó sajátvektor.

Sajátértékek közelítése

Példa

invit_eltol.m

Sajátértékek közelítése

Rayleigh-iteráció

Az eltolásos inverz-iterációt módosíthatjuk úgy hogy nem adjuk meg előre az eltolást, hanem mindig az aktuális x_k segítségével számoljuk:

Sajátértékek közelítése

Rayleigh-iteráció, algo

$$n > 0, \|x\| = 1$$

$$\lambda = x^T A x$$

while $n > 0$ **do**

$$(A - \lambda E)y = x \text{ megoldása}$$

$$x = \frac{y}{\|y\|}$$

$$\lambda = x^T A x$$

$$n = n - 1$$

end while

Sajátértékek közelítése

Rayleigh-iteráció, megjegyzés

Valós, szimmetrikus mátrix esetén konvergens a módszer.

Sajátértékek közelítése

Példa

invit_ray.m