

3.3 Lineáris egyenletrendszerek megoldása, mátrixok felbontása

1. Amilyen elemi átalakításokkal kapjuk az A mátrixból az E -t, ugyanolyan elemi átalakításokkal kapjuk az E -ből az A mátrix inverzét.

Az A mátrix inverze:

$$\begin{aligned}
 (A|E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array} \right) \sim \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array} \right),
 \end{aligned}$$

tehát az A mátrix inverze:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

A B mátrix inverze:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{8} & \frac{9}{8} & \frac{5}{4} \\ -\frac{13}{8} & \frac{11}{8} & \frac{7}{4} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

A C mátrix inverze:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{11}{20} & \frac{3}{20} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{20} & -\frac{1}{20} \end{pmatrix}$$

A D mátrix inverze:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

2. Az A mátrix LU felbontása:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A determinánsok szorzástételét felhasználva $\det(A) = \det(L)\det(U) = \det(U) = 4$

Mivel $A=LU$, ezért az $Ax=b$ egyenletrendszert $LUx=b$ alakban is felírhatjuk. Bevezetve az $y:=Ux$ jelölést, előbb az

$Ly=b$ majd az

$Ux=y$ egyenletrendszert kell megoldanunk.

1. $Ly=b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$y_1=3, y_2=4, y_3=-2$$

2. $Ux=y$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

megoldásvektor:

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

A B mátrix LU felbontása:

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ -2 & -7 & 3 \\ 2 & 12 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 10 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A determinánsok szorzástételét felhasználva $\det(B) = \det(L)\det(U) = \det(U) = 1 \cdot 0 = 0$ azaz a B mátrix szinguláris.

1. Az $Ly=b$ egyenletrendszer megoldása:

$$y_1 = -2, y_2 = 7, y_3 = 0$$

2. $Ux=y$

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az $Ux=y$ lineáris egyenletrendszer 3. egyenletét minden $x \in \mathbb{R}^3$ vektor teljesíti, így az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Legyen $x_3=t$, ahol $t \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned} -5x_2 + 2t &= 7 \implies x_2 = \frac{7-2t}{-5} \\ -4x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -2 \implies x_1 = \frac{19+t}{10} \end{aligned}$$

megoldásvektor:

$$\begin{pmatrix} \frac{19+t}{10} \\ \frac{7-2t}{-5} \\ t \end{pmatrix}.$$

A C mátrix LU felbontása:

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 1 \\ 9 & 5 & -4 & 1 \\ -6 & -9 & 16 & 17 \\ 3 & 4 & -8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 12 & 15 \\ 0 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\det(C) = -6$$

1. Az $Ly=b$ egyenletrendszer megoldása:

$$y_1 = -13, y_2 = 3, y_3 = -14, y_4 = -2$$

2. Az $Ux=y$ egyenletrendszert megoldva a megoldás:

$$x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = -2, x_4 = 2.$$

A D mátrix LU felbontása:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -4 & -5 & -3 \\ -2 & -5 & a-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & a-6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}$$

$$\det(D) = -2a-6$$

1. $Ly=b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5-2a \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 4, y_2 = 5, y_3 = -2(a+3)$$

2. $Ux=y$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2(a+3) \end{pmatrix}$$

megoldásvektor $a \neq -3$ esetén:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ha azonban $a=-3$, akkor az egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ennek végtelen sok megoldása van, ugyanis az $Ux=y$ lineáris egyenletrendszer 3. egyenletét minden $x \in \mathbb{R}^3$ vektor teljesíti. Legyen $x_3=t$, ahol $t \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Ekkor

$$-x_2 - 3t = 5 \implies x_2 = -5 - 3t$$

$$2x_1 + 2x_2 = 4 \implies x_1 = 7 + 3t$$

megoldásvektor:

$$\begin{pmatrix} 7+3t \\ -5-3t \\ t \end{pmatrix}.$$

Az E mátrix LU felbontása:

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\det(E)=12$$

1. Az $Ly=b$ egyenletrendszer megoldása:

$$y_1 = 0, y_2 = -8, y_3 = -4$$

2. Az $Ux=y$ egyenletrendszert megoldva a megoldásvektor:

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Az F mátrix LU felbontása:

$$\begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\det(F)=0$$

1. $Ly=b$ egyenletrendszer megoldása:

$$y_1 = -2, y_2=1, y_3=2$$

2. $Ux=y$ egyenletrendszer

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ami ellentmondásos.

A G mátrix LU felbontása:

$$\begin{aligned}
G &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \\ -4 & 8 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\det(G) = 48$$

1. Az $Ly=b$ egyenletrendszer megoldása:

$$y_1=5, y_2=6, y_3=5, y_4=6$$

2. Az $Ux=y$ egyenletrendszer megoldása:

$$x_1 = -2, x_2 = -1, x_3=2, x_4 = 3$$

A H mátrix LU felbontása:

$$\begin{aligned}
H &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -6 & -5 & 3 \\ -4 & 18 & 3 & 2 \\ -3 & 8 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 10 & -13 & 14 \\ 0 & 2 & -5 & 7 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\det(H)=12$$

1. Az $Ly=b$ egyenletrendszer megoldása:

$$y_1 = 21, y_2 = 1, y_3 = 4, y_4 = -6$$

2. Az $Ux=y$ egyenletrendszer megoldása:

$$x_1 = -3, x_2 = 4, x_3 = 1, x_4 = -2$$

Az I mátrix LU felbontása:

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & -5 & 6 & -3 \\ -4 & 5 & 8 & -5 \\ 2 & 6 & -22 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & -18 & 13 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\det(I)=48$$

1. Az $Ly=b$ egyenletrendszer megoldása:

$$y_1=14, y_2 = -8, y_3=4, y_4 = -6$$

2. Az $Ux=y$ egyenletrendszer megoldása:

$$x_1 = -1, x_2 = 4, x_3 = 0, x_4 = -2$$

3. Mivel $a_{11} = 0$, ezért sorcserét kell végre hajtani. A

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

permutációs mátrixszal balról szorozva egy mátrixot, annak első és második sora felcserélődik. Így

$$A = P_1 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & -28 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

és erre a legutóbbi mátrixra már végrehajtható az LU felbontás első lépése.

$$A = P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 14 & -28 & -7 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 14 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -63 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

A legutolsó mátrixban a főelem (az a_{33} elem) 0, így újra sorcserére van szükség. A

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixszal

$$A = P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 14 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} P_2 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -63 \end{pmatrix} =: P_1 \tilde{L} P_2 U$$

Mivel

$$\tilde{L} P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 14 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 14 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: P_2 L$$

ezért

$$A = P_1 P_2 L U =: PLU$$

ahol

$$P = P_1 P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Az determinánsok szorzástételét felhasználva $\det(A) = \det(P) \det(L) \det(U) = 315$

B mátrix PLU felbontása:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

$$\det(B)=-33$$

C mátrix PLU felbontása:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -24 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -24 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{3} \end{pmatrix}$$

$$\det(C)=-13$$

D mátrix PLU felbontása:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(D)=-25$$

E mátrix PLU felbontása:

$$E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(E)=0$$

F mátrix PLU felbontása:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{7} & \frac{11}{28} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(F)=0$$

4. balról szorozva

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & \dots & d_1 a_{1n} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & \dots & d_2 a_{2n} \\ \vdots & & & \\ d_n a_{n1} & d_n a_{n2} & \dots & d_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

jobbról szorozva

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_2 a_{12} & \dots & d_n a_{1n} \\ d_1 a_{21} & d_2 a_{22} & \dots & d_n a_{2n} \\ \vdots & & & \\ d_1 a_{n1} & d_2 a_{n2} & \dots & d_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

5. Az A mátrix LDL^T felbontása:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 4 & -8 & 2 \\ -8 & 12 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Az B mátrix LDL^T felbontása:

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -7 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Az C mátrix LDL^T felbontása:

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 11 & -2 \\ 2 & -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A D mátrix LDL^T felbontása:

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 7 \\ -2 & -2 & 1 & -8 \\ -1 & 7 & -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 5 & -6 \\ 0 & 6 & -6 & 7 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -11 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

6. Az A mátrix Cholesky-felbontása:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \\ -6 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

A determinánsok szorzástételét felhasználva $\det(A)=\det(L)\det(U)=\det(U)=36$

A B mátrix Cholesky-felbontása:

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{pmatrix} 3 & -9 & 9 \\ -9 & 29 & -31 \\ 9 & -31 & 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 & 9 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 & 9 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -3\sqrt{3} & \sqrt{2} & 0 \\ 3\sqrt{3} & -2\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -3\sqrt{3} & 3\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\det(B)=12$$

A C mátrix Cholesky-felbontása:

$$\begin{aligned}
 C &= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -4 & 9 & -13 \\ 6 & -13 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 3\sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\det(C)=4$$

A D mátrix Cholesky-felbontása:

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{pmatrix} 9 & -3 & 9 \\ -3 & 17 & -7 \\ 9 & -7 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -3 & 9 \\ 0 & 16 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -3 & 9 \\ 0 & 16 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\det(D)=0$$

Az E mátrix Cholesky-felbontása:

$$\begin{aligned}
 E &= \begin{pmatrix} 16 & -8 & 12 & -4 \\ -8 & 13 & -3 & 2 \\ 12 & -3 & 14 & -11 \\ -4 & 2 & -11 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & -8 & 12 & -4 \\ 0 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 20 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & -8 & 12 & -4 \\ 0 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 20 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & -8 & 12 & -4 \\ 0 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\det(E)=2304$$

Az F mátrix Cholesky-felbontása:

$$\begin{aligned}
 F &= \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & a^2 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & a^2 + 9 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\det(F)=4a^2$$

P1. Számítógéppel (dupla pontosságú számítás mellett) kiszámolva az első egyenletrendszer megoldására a következőt kapjuk: $x_1 = 0, x_2 = 1$. Ugyanakkor a második egyenletrendszer esetén $x_1 = 1, x_2 = 1$ adódik.

Azt látjuk tehát, hogy két matematikailag ekvivalens egyenletrendszer esetén lényegesen különböző megoldásokat kaptunk a gépi megoldás során. Egyik megoldás sem pontos, de látható, hogy a második megoldás közelebb van a valódi megoldáshoz. A jelenség magyarázata az, hogy a kerekítési hibákból adódó pontatlanságok nagy hibákat okozhatnak osztás során, ha a nevező abszolút értékben kicsi. Az előző esetben pontosan ez a helyzet (hiszen a megoldás során az $a_{11} = 10^{-17}$ elemmel osztunk). Az ilyen hibák elkerülése érdekében használjuk a főelemválasztást.