

### 3.5 Sajátérték feladatok

1. (a)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

A sajátértékek meghatározásához írjuk fel az  $A$  mátrix karakterisztikus polinomját!

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 3 \\ -4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda) \cdot (5 - \lambda) - (-12) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1.$$

A  $\lambda = 2$  sajátértékhez tartozó sajátvektort az

$$(A - 2 \cdot E)v = 0$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk.

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

így

$$v = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \end{pmatrix}.$$

A  $\lambda = 1$  sajátértékhez tartozó sajátvektort az

$$(A - 1 \cdot E)v = 0$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk.

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

így

$$v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A mátrix karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Ennek gyökei:

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4}{2}, \quad \lambda = 2.$$

A mátrixnak egy kétszeres multiplicitású valós sajátértéke van.

A  $\lambda = 2$  sajátértékhez tartozó sajátvektort az

$$(A - 2 \cdot E)v = 0$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

így

$$v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

Ennek gyökei

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i, \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm i$$

A mátrix sajátértékei komplexek.

A  $\lambda = 1 + i$  sajátértékhez tartozó sajátvektort az

$$(A - (1 + i) \cdot E)v = 0$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk.

$$\begin{pmatrix} -2 - i & -5 \\ 1 & 2 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

így

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{5}(i+2) \end{pmatrix}.$$

A  $\lambda = 1 - i$  sajátértékhez tartozó sajátvektort az

$$(A - (1 - i) \cdot E)v = 0$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk.

$$\begin{pmatrix} -2+i & -5 \\ 1 & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

így

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{5}(2-i) \end{pmatrix}.$$

2. Induljunk ki az  $Av = \lambda v$  egyenletből, majd vegyük mindkét oldal normáját!

$$\|A\| \cdot \|v\| \geq \|Av\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$$

Ebből  $v \neq 0$  miatt következik, hogy

$$\|A\| \geq |\lambda|.$$

3. Ha  $A$ -nak a 0 sajátértéke, akkor  $\det(A - 0E) = 0$ , tehát  $\det(A) = 0$ , azaz  $A$  szinguláris. Ha  $A$  szinguláris akkor  $\det(A) = 0$ , azaz a  $\lambda = 0$  megoldja a  $\det(A - \lambda E) = 0$  egyenletet, tehát  $A$ -nak a 0 sajátértéke.

4. Legyen  $v \neq 0$  a  $\lambda$  sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v.$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát balról  $A^{-1}$ -gyel:

$$v = \lambda \cdot A^{-1} \cdot v.$$

Az  $A$  mátrix reguláris, így  $\lambda \neq 0$ .

$$\frac{1}{\lambda} \cdot v = A^{-1} \cdot v,$$

azaz az  $A^{-1}$  mátrixnak  $\frac{1}{\lambda}$  sajátértéke, a hozzá tartozó sajátvektor  $v$ .

5. Legyen  $v \neq 0$  a  $\lambda$  sajátértékhez tartozó sajátvektor.

$$\begin{aligned} A \cdot v &= \lambda \cdot v & / \cdot A \\ A^2 \cdot v &= \lambda \cdot A \cdot v \\ A^2 \cdot v &= \lambda \cdot (\lambda \cdot v) \\ A^2 \cdot v &= \lambda^2 \cdot v, \end{aligned}$$

azaz  $\lambda^2$  az  $A^2$  mátrix sajátértéke, a hozzá tartozó sajátvektor  $v$ .

6. Legyen  $v \neq 0$  az  $A$  mátrix  $\lambda$  sajátértékéhez tartozó sajátvektor.

$$\begin{aligned} A \cdot v &= \lambda \cdot v & / - cE \cdot v \\ (A - cE) \cdot v &= (\lambda - c) \cdot v, \end{aligned}$$

tehát  $\lambda - c$  sajátértéke az  $A - cE$  mátrixnak,  $v$  pedig a  $\lambda - c$  sajátértékhez tartozó sajátvektor.

7. Ha egy mátrix domináns főátlójú, akkor a főátlóban álló elemek nagyobbak, mint a velük egy sorban lévő elemek abszolútértékeinek összegei.

Ez alapján a Gersgorin körök uniójában nincs benne a 0, tehát az nem sajátérték a mátrixnak, így a mátrix reguláris.

8. (a) A mátrix sajátértékei a

4 középpontú és 4 sugarú,

–3 középpontú és 2 sugarú,

–7 középpontú és 1 sugarú körök uniójában helyezkednek el.

A 0 beleesik a 4 középpontú körbe, így lehet, hogy a mátrix nem invertálható.

A körök nem metszik egymást, így minden körben pontosan 1 darab sajátérték található, amelyek valósak.

(b) A mátrix sajátértékei a

4 középpontú és 3 sugarú,

3 középpontú és 2 sugarú,

7 középpontú és 3 sugarú körök uniójában helyezkednek el.

A 0 nem tartozik egyik körhöz sem, tehát a mátrix invertálható. Mind három kör metszi egymást, így a 3 sajátérték ezek uniójában bárhol lehet. Mivel a mátrix szimmetrikus, így sajátértékei biztosan valósak, a Gersgorin körök elhelyezkedéséből következően pedig pozitívak. A mátrix így pozitív definit.

- (c) A mátrix sajátértékei a  
 4 középpontú és 5 sugarú,  
 –5 középpontú és 2 sugarú,  
 –11 középpontú és 2 sugarú körök uniójában helyezkednek el.

A 0 beleesik a 4 középpontú körbe, így lehet, hogy a mátrix nem invertálható.  
 A körök nem metszik egymást, így minden körben pontosan 1 darab sajátérték található, amelyek valósak.

9. A mátrix sajátértékei a  
 8 középpontú és 6 sugarú,  
 5 középpontú és 3 sugarú,  
 –3 középpontú és 2 sugarú,  
 7 középpontú és 4 sugarú,  
 –4 középpontú és 3 sugarú körök uniójában helyezkednek el.

A 0 nem tartozik egyik körhöz sem, tehát  $A$  mátrix reguláris. A –3 és –4 középpontú körök uniójában 2, a 8 az 5 és a 7 középpontú körök uniójában pedig 3 darab sajátérték található.

10. Ha adott az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix és a  $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$  vektor, akkor a  $J(\lambda) = \|A \cdot v - \lambda \cdot v\|_2^2$  függvény minimumhelye

$$\lambda = \frac{\langle Av, v \rangle}{\langle v, v \rangle}.$$

Ezt a hányadost nevezzük Rayleigh hányadosnak.

Esetünkben:

$$\lambda = \frac{\langle Av, v \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{(-3) \cdot (-13) + 7 \cdot 27 + 2 \cdot 6 + 5 \cdot 20 + 1 \cdot 4}{(-3)^2 + 7^2 + 2^2 + 5^2 + 1^2} = \frac{43}{11},$$

így  $\lambda = \frac{43}{11}$  esetén lesz minimális az  $Av - \lambda v$  euklideszi normája.

$$11. \quad v = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad Av = \begin{pmatrix} -15 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix},$$

$$\lambda = \frac{\langle Av, v \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{(-5) \cdot (-15) + 4 \cdot 12}{(-5)^2 + 4^2} = 3,$$

így a minimumhely  $\lambda = 3$ .

$$A - 3E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\det(A - 3E) = 0$ , tehát a 3 sajátértéke az  $A$  mátrixnak.

12. (a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \epsilon = 0.01.$$

Az  $y^{(0)}$ -t tetszőlegesen választjuk ki, innentől kezdve ez érvényes az alábbi feladatokra is!

$$y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Ay^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda^0 = \frac{\langle Ay^{(0)}, y^{(0)} \rangle}{\langle y^{(0)}, y^{(0)} \rangle} = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{1^2 + 0^2} = 2$$

$$y^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Ay^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \lambda^1 = \frac{\langle Ay^{(1)}, y^{(1)} \rangle}{\langle y^{(1)}, y^{(1)} \rangle} = \frac{10}{5} = 2$$

Mivel a sajátérték két egymást követő közelítőértéke megegyezik, az iterációt abbahagyjuk. Könnyen ellenőrizhető, hogy annak ellenére, hogy az iteráció leállási feltétele teljesül (tetszőleges  $\epsilon$  esetén),  $\lambda = 2$  nem sajátértéke a mátrixnak. A jelenség oka, hogy a mátrix sajátértékei komplexek ( $2 \pm i$ ).

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \epsilon = 0,001.$$

Az  $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  vektorból indítva az iterációt

K	$\lambda^K$
1	4,428571
2	4,565836
3	4,708517
4	4,820636
5	4,892743
6	4,936241
7	4,962060
8	4,977372
9	4,986477
10	4,991906

$K = 10$  esetén teljesül a leállási feltétel.

A  $\lambda^{(10)}$ -hez tartozó sajátvektor közelítés:

$$y^{(10)} = \begin{pmatrix} 0,005678 \\ 0,707095 \\ 0,707095 \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\|Ay^{(10)} - \lambda^{10} \cdot y^{(10)}\|_2^2 \leq \epsilon,$$

ezért az iteráció sikeres.

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \epsilon = 0,001.$$

Az  $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  vektorból indítva az iterációt

K	$\lambda^K$
1	3,333333
2	3,411765
3	3,414141

$K = 3$  esetén teljesül a leállási feltétel.

A  $\lambda^{(3)}$ -hoz tartozó sajátvektor közelítés:

$$y^{(3)} = \begin{pmatrix} -0,497468 \\ 0,710669 \\ -0,497468 \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\|Ay^{(3)} - \lambda^3 \cdot y^{(3)}\|_2^2 \leq \epsilon,$$

ezért az iteráció sikeres.

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \epsilon = 0,001.$$

Az  $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  vektorból indítva az iterációt

K	$\lambda^K$
1	-0,714286
2	-1,647059
3	-0,767123
.	.
.	.
.	.
.	.
17	2,997504
18	3,001397

$K = 18$  esetén teljesül a leállási feltétel.

A  $\lambda^{(18)}$ -hoz tartozó sajátvektor közelítés:

$$y^{(18)} = \begin{pmatrix} 0,580383 \\ 0,577778 \\ 0,573871 \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\|Ay^{(18)} - \lambda^{18} \cdot y^{(18)}\|_2^2 \leq \epsilon,$$

ezért az iteráció sikeres.

(e)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \epsilon = 0,001.$$

Az  $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  vektorból indítva az iterációt

K	$\lambda^K$
1	3,666666
2	3,976744
3	3,998536
4	3,999908

$K = 4$  esetén teljesül a leállási feltétel.

A  $\lambda^{(4)}$ -hez tartozó sajátvektor közelítés:

$$y^{(4)} = \begin{pmatrix} -0,575086 \\ 0,581852 \\ -0,575086 \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\|Ay^{(4)} - \lambda^4 \cdot y^{(4)}\|_2^2 \leq \epsilon,$$

ezért az iteráció sikeres.

(f)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon = 0,001.$$

Az  $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  vektorból indítva az iterációt

K	$\lambda^K$
1	3,777777
2	4,060606
3	3,956204
4	4,018622
5	3,989857
6	4,004856
7	3,997516
8	4,001229



$K = 8$  esetén teljesül a leállási feltétel.

A  $\lambda^{(8)}$ -hoz tartozó sajátvektor közelítés:

$$y^{(8)} = \begin{pmatrix} 0,161621 \\ 0,973528 \\ 0,161621 \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\|Ay^{(8)} - \lambda^8 \cdot y^{(8)}\|_2^2 \leq \epsilon,$$

ezért az iteráció sikeres.

(g)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \epsilon = 0,001.$$

$$\text{Az } y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vektorból indítva az iterációt}$$

K	$\lambda^K$
1	5
2	5,193370
3	5,151964
4	5,092132
5	5,049725
6	5,024130
7	5,009953
8	5,002709
9	4,999389

$K = 9$  esetén teljesül a leállási feltétel.

A  $\lambda^{(9)}$ -hez tartozó sajátvektor közelítés:

$$y^{(9)} = \begin{pmatrix} 0,156041 \\ -0,486969 \\ -0,322878 \\ -0,796406 \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\|Ay^{(9)} - \lambda^9 \cdot y^{(9)}\|_2^2 \leq \epsilon,$$

nem teljesül ezért az iteráció sikertelen. Az iteráció más kezdővektorokból indítva sem lesz sikeres, aminek az az oka, hogy a mátrix sajátértékei komplexek.

(h)

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -2 & -2 \\ 15 & 1 & 7 \\ 21 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \epsilon = 0,001.$$

Az  $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  vektorból indítva az iterációt

K	$\lambda^K$
1	-7,428571
2	-4,204082
3	-5,840173
4	-5,916457
5	-5,592783
6	-5,681270
7	-5,710750
8	-5,686712
9	-5,688746

$K = 9$  esetén teljesül a leállási feltétel.

A  $\lambda^{(9)}$ -hez tartozó sajátvektor közelítés:

$$y^{(9)} = \begin{pmatrix} -0,464045 \\ 0,122739 \\ 0,877267 \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\|Ay^{(9)} - \lambda^9 \cdot y^{(9)}\|_2^2 \leq \epsilon,$$

ezért az iteráció sikeres.

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \epsilon = 0,001.$$

Az  $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  vektorból indítva az iterációt

K	$\lambda^K$
1	-2
2	-2

Mivel a sajátérték két egymás követő közelítőértéke megegyezik, az iterációt abbahagyjuk.

Mivel  $\lambda = -2$  esetén az  $A \cdot v = \lambda \cdot v$  egyenlet teljesül, ezért  $\lambda$  sajátértéke a mátrixnak.