

3.6 Lagrange interpoláció

1. (a) $(-3, -6), (-2, -17), (-1, -8), (1, -2), (2, 19)$

Készítsük el az osztott differenciák táblázatát:

-3	-6				
		$\frac{(-17)-(-6)}{(-2)-(-3)} = -11$			
-2	-17		$\frac{9-(-11)}{(-1)-(-3)} = 10$		
		$\frac{(-8)-(-17)}{(-1)-(-2)} = 9$		$\frac{(-2)-10}{1-(-3)} = -3$	
-1	-8		$\frac{3-9}{1-(-2)} = -2$		$\frac{2-(-3)}{2-(-3)} = 1$
		$\frac{(-2)-(-8)}{1-(-1)} = 3$		$\frac{6-(-2)}{2-(-2)} = 2$	
1	-2		$\frac{21-3}{2-(-1)} = 6$		
		$\frac{19-(-2)}{2-1} = 21$			
2	19				

Az illesztett polinom:

$$N_4(x) = -6 - 11 \cdot (x+3) + 10 \cdot (x+3) \cdot (x+2) - 3 \cdot (x+3) \cdot (x+2) \cdot (x+1) + (x+3) \cdot (x+2) \cdot (x+1) \cdot (x-1) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 3.$$

- (b) $(-3, -31), (-2, -8), (1, 1), (2, 22)$

A differenciátáblázat:

-3	-31			
		23		
-2	-8		-5	
		3		$\frac{19}{10}$
1	1		$\frac{9}{2}$	
		21		
2	22			

Az illesztett polinom:

$$N_3(x) = -31 + 23 \cdot (x+3) - 5 \cdot (x+3) \cdot (x+2) + \frac{19}{10} \cdot (x+3) \cdot (x+2) \cdot (x-1) = \frac{19}{10}x^3 + \frac{153}{5}x^2 + \frac{1169}{10}x + \frac{478}{5} = -\frac{17}{5} - \frac{1}{10}x + \frac{13}{5}x^2 + \frac{19}{10}x^3.$$

(c) $(-2, -13), (-1, -4), (1, 2)$

A differenciátáblázat:

-2	-13		
		9	
-1	-4		-2
		3	
1	2		

Az illesztett polinom:

$$N_2(x) = -13 + 9 \cdot (x + 2) - 2 \cdot (x + 2) \cdot (x + 1) = -2x^2 + 3x + 1.$$

(d) $(-2, -5), (-1, 3), (0, 1), (2, 15)$

A differenciátáblázat:

-2	-5		
		8	
-1	3		-5
		-2	2
0	1		3
		7	
2	15		

Az illesztett polinom:

$$N_3(x) = -5 + 8 \cdot (x + 2) - 5 \cdot (x + 2) \cdot (x + 1) + 2 \cdot (x + 2) \cdot (x + 1) \cdot x = 2x^3 + x^2 - 3x + 1.$$

(e) $(-1, 4), (1, 2), (2, 10), (3, 40)$

A differenciátáblázat:

-1	4		
		-1	
1	2		3
		8	2
2	10		11
		30	
3	40		

Az illesztett polinom:

$$N_3(x) = 4 - 1 \cdot (x + 1) + 3 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) + 2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) = 2x^3 - x^2 - 3x + 4.$$

(f) $(-2, 38), (-1, 5), (1, -1), (2, -10), (3, -7)$

A differenciátáblázat:

-2	38				
		-33			
-1	5		10		
		-3		-3	
1	-1		-2		1
		-9		2	
2	-10		6		
		3			
3	-7				

Az illesztett polinom:

$$N_4(x) = 38 - 33 \cdot (x + 2) + 10 \cdot (x + 2) \cdot (x + 1) - 3 \cdot (x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) + (x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2).$$

2. A differenciátáblázat:

-2	-6				
		5			
0	4		-4		
		-7		1	
1	-3		0		
		-7			
2	-10				

Az első 4 pontra illeszkedő polinom:

$$\begin{aligned} N_3(x) &= -6 + 5 \cdot (x + 2) - 4 \cdot (x + 2) \cdot x + (x + 2) \cdot x \cdot (x - 1) = \\ &= x^3 - 3x^2 - 5x + 4. \end{aligned}$$

Ha azt a minimális fokszámú polinomot keressük, amely az előző pontokon kívül áthalad a $(-1, 2)$ ponton is, akkor az előző táblázatunkat kiegészítjük az új adattal, és kiszámítjuk az utolsó "ferde" sort:

$$\begin{array}{ccccccc}
-2 & -6 & & & & & \\
& & 5 & & & & \\
0 & 4 & & -4 & & & \\
& & -7 & & 1 & & \\
1 & -3 & & 0 & & \frac{1}{2} & \\
& & -7 & & & \frac{3}{2} & \\
& & & -\frac{3}{2} & & & \\
2 & -10 & & & & & \\
& & -4 & & & & \\
-1 & 2 & & & & &
\end{array}$$

Az 5 pontra illeszkedő polinom:

$$\begin{aligned}
N_4(x) &= N_3(x) + \frac{1}{2} \cdot (x+2) \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-2) = \\
&= \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 - 3x + 4.
\end{aligned}$$

3. Számítsuk ki a függvény értékét az x_1, x_2, x_3 pontokban:

$$f(x_1) = 0; f(x_2) = 1; f(x_3) = 0.$$

Az adataink tehát: $(-1, 0), (0, 1), (1, 0)$.

A differenciátáblázat:

$$\begin{array}{cccc}
-1 & 0 & & \\
& & 1 & \\
0 & 1 & & -1 \\
& & -1 & \\
1 & 0 & &
\end{array}$$

Az illesztett másodfokú polinom:

$$N_2(x) = 0 + 1 \cdot (x+1) - 1 \cdot (x+1) \cdot x = x + 1 - x^2 - x = 1 - x^2.$$

4. Egy másodfokú polinomot egyértelműen meghatároz 3 különböző helyen vett helyettesítési értéke. Ha a táblázatban szereplő értékek pontosak lennének, akkor bármelyik 3 adat ugyanazt a polinomot határozná meg. Először illesszünk az első 3 adatra polinomot:

$$\begin{array}{cccc}
-2 & 15 & & \\
& & -6 & \\
-1 & 9 & & 1 \\
& & -4 & \\
0 & 5 & &
\end{array}$$

A differenciátáblázatból felírva az interpolációs polinomot

$$N_2(x) = 5 - 4 \cdot x + 1 \cdot x \cdot (x + 1) = x^2 - 3x + 5$$

adódik. Számítsuk ki milyen értékeket vesz fel az N_2 polinom az 1, 2, 3 pontokban! $N_2(1) = 3; N_2(2) = 3; N_2(3) = 5$. Látható, hogy az $x = 3$ és $x = 5$ helyeken felvett érték megegyezik a táblázatban adott értékekkel, azaz az N_2 polinom a (2, 2) pont kivételével minden pontra illeszkedik. Ebből következik, hogy az $x = 2$ helyen megadott helyettesítési érték hibás, a helyes érték 3.

A p polinom:

$$p(x) = N_2(x) = x^2 - 3x + 5.$$

5. Ha az f függvény $(n + 1)$ -szer folytonosan differenciálható és $L_n(x)$ az $(x_i, f(x_i)), i = 0, 1, \dots, n$ adatokra épülő Lagrange-polinom, akkor az interpoláció maximális hibája:

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\omega_{n+1}(x)|,$$

ahol $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$,
 $M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{n+1}(x)|$.

A maximális hiba megadáshoz először kiszámoljuk a függvény harmadik deriváltját:
 $f'''(x) = -e^{-x}$.

A harmadik derivált abszolútértékének maximuma az alappontok által kifeszített intervallumon: $M_3 = 1$.

$$\omega_3(x) = (x + 1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot x = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

A $[-1, 0]$ intervallumban az $\omega_3(x)$ függvénynek $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ -nál van maximuma, a maximum értéke $\frac{\sqrt{3}}{36}$. Így

$$|f(x) - L_2(x)| \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{36} \approx 8,02 \cdot 10^{-3}.$$

6. Általános esetben az interpoláció maximális hibája

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\omega_{n+1}(x)|, \text{ azaz } n = 1 \text{ esetén}$$

$$|f(x) - L_1(x)| \leq \frac{M_2}{2!} \cdot |\omega_2(x)| \text{ adódik.}$$

$$\omega_2(x) = (x - a)(x - b),$$

azaz $\omega_2(x)$ egy olyan másodfokú polinom, melynek zérushelyei a és b , a főegyütthatója pedig pozitív.

Ebből következik, hogy $\omega_2(x)$ minimumhelye a gyökök számtani közepe: $x = \frac{a+b}{2}$. Felhasználva, hogy $x \in [a, b]$ esetén

$$\begin{aligned} |\omega_2(x)| &\leq \left| \omega_2 \cdot \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| = \left| \left(\frac{a+b}{2} - a \right) \cdot \left(\frac{a+b}{2} - b \right) \right| = \\ &= \left| \left(\frac{a+b-2a}{2} \right) \cdot \left(\frac{a+b-2b}{2} \right) \right| = \\ &= \left| \frac{b-a}{2} \cdot \frac{a-b}{2} \right| = \left| \frac{(b-a)^2}{4} \right| = \frac{(b-a)^2}{4} \end{aligned}$$

teljesül, az

$$\begin{aligned} |f(x) - L_1(x)| &\leq \frac{M_2}{2!} \cdot |\omega_2(x)| \leq \frac{M_2}{2} \cdot \frac{(b-a)^2}{4} = \\ &= \frac{M_2}{8} \cdot (b-a)^2 = \frac{M_2}{8} \cdot h^2 \end{aligned}$$

összefüggést kapjuk, ami a bizonyítandó állítás.

7. Szakaszonként lineáris interpoláció esetén a hiba a következő módon becsülhető (ld. 6. feladat):

$$|f(x) - L_1(x)| \leq \frac{M_2}{8} \cdot h^2.$$

Ha h értékét úgy határozzuk meg, hogy

$$\frac{M_2}{8} \cdot h^2 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$$

teljesüljön, akkor a hiba a megadott korlát alatt marad. Mivel $f''(x) = -\cos(x)$, ezért $M_2 = \max_{x \in [0, \pi]} |f''(x)| = \max_{x \in [0, \pi]} |-\cos(x)| = 1$.

Tehát

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \cdot h^2 &< \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \\ h^2 &< 4 \cdot 10^{-4} \\ h &< 2 \cdot 10^{-2} = 0,02. \end{aligned}$$

Ha az egyes részintervallumok hossza legfeljebb 0,02, akkor a hiba a megadott korlát alatt marad.