

3.9 Közelítő integrálás

1. (a) $\int_3^6 \sqrt{x-2} dx, \quad m = 5$

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{6-3}{5} = 0,6.$$

Az alapintervallumot $[3, 6]$ -ot 5 egyenlő részre osztjuk.

Az alappontok a következők:

$$x_0 = 3 \quad x_1 = 3,6 \quad x_2 = 4,2 \quad x_3 = 4,8 \quad x_4 = 5,4 \quad x_5 = 6.$$

Összetett trapéz formula:

Az

$$I_{mx2} = h \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{m-1}) + \frac{f(x_m)}{2} \right)$$

képletbe az adatokat behelyettesítve, és az eredményt 6 tizedesjegyre kerekítve

$$I_{5x2} = 4,659228.$$

A hiba becslése:

az

$$|I(f) - I_{mx2}(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12m^2} M_2$$

becslést használjuk, ahol

$$M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Az $f(x) = \sqrt{x-2} = (x-2)^{\frac{1}{2}}$ függvény első és második deriváltja,

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x-2)^{-\frac{3}{2}},$$

amiből $M_2 = \frac{1}{4}$, így

$$|I(f) - I_{5x2}(f)| \leq \frac{(6-3)^3}{12 \cdot 5^2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{400} = 2,25 \cdot 10^{-2}.$$

Összetett Simpson formula:

Az

$$I_{mx3} = \frac{h}{6} \left(f(x_0) + 4f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + 2f(x_1) + 4f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \dots + \right. \\ \left. + 4f\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}\right) + f(x_m) \right)$$

képletbe az adatokat behelyettesítve, és az eredményt 6 tizedesjegyre kerekítve
 $I_{5x3} = 4,666652$.

A hiba becslése:

az

$$|I(f) - I_{mx3}(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880m^4} M_4$$

becslést használjuk, ahol

$$M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

A függvény harmadik és negyedik deriváltja:

$$f'''(x) = \frac{3}{8} \cdot (x-2)^{-\frac{5}{2}},$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16} \cdot (x-2)^{-\frac{7}{2}},$$

tehát $M_4 = \frac{15}{16}$, így

$$|I(f) - I_{5x3}(f)| \leq \frac{(6-3)^5}{2880 \cdot 5^4} \cdot \frac{15}{16} = \frac{81}{640000} = 1,2656 \cdot 10^{-4}.$$

(b) $\int_1^2 \ln(x^2) dx, \quad m = 5$

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5}$$

Az alapintervallumot $([1, 2]-t)$ 5 egyenlő részre osztjuk.

Az alappontok a következők:

$$x_0 = 1 \quad x_1 = 1,2 \quad x_2 = 1,4 \quad x_3 = 1,6 \quad x_4 = 1,8 \quad x_5 = 2.$$

Összetett trapéz formula:

$$I_{5x2}(f) = \frac{1}{5} \cdot (0 + \ln(1,2^2) + \ln(1,4^2) + \ln(1,6^2) + \ln(1,8^2) + \frac{\ln 4}{2}) = 0,769263.$$

A hiba becslése:

Az $f(x) = \ln(x^2) = 2 \cdot \ln(x)$ függvény első és második deriváltja:

$$f'(x) = \frac{2}{x},$$

$$f''(x) = -\frac{2}{x^2},$$

amit felhasználva $M_2 = 2$, így

$$|I(f) - I_{5x2}(f)| \leq \frac{(2-1)^3}{12 \cdot 5^2} \cdot 2 = \frac{1}{150} = 6,6667 \cdot 10^{-3}.$$

Összetett Simpson formula:

$$\begin{aligned} I_{5x3}(f) = & \frac{1}{30} \cdot (0 + 4 \cdot \ln(1,1^2) + 2 \cdot \ln(1,2^2) + 4 \cdot \ln(1,3^2) + 2 \cdot \ln(1,4^2) + \\ & + 4 \cdot \ln(1,5^2) + 2 \cdot \ln(1,6^2) + 4 \cdot \ln(1,7^2) + 2 \cdot \ln(1,8^2) + \\ & + 4 \cdot \ln(1,9^2) + \ln 4) = 0,772587. \end{aligned}$$

A hiba becslése:

A függvény harmadik és negyedik deriváltja:

$$f'''(x) = \frac{4}{x^3},$$

$$f''''(x) = -\frac{12}{x^4},$$

tehát $M_4 = 12$, így

$$|I(f) - I_{5x3}(f)| \leq \frac{(2-1)^5}{2880 \cdot 5^4} \cdot 12 = \frac{1}{150000} = 6,6667 \cdot 10^{-6}.$$

(c) $\int_0^1 e^{x^2-1} dx, \quad m = 5$

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5}$$

Az alapintervallumot $([0, 1]$ -et) 5 egyenlő részre osztjuk.

Az alappontok a következők:

$$x_0 = 0 \quad x_1 = 0,2 \quad x_2 = 0,4 \quad x_3 = 0,6 \quad x_4 = 0,8 \quad x_5 = 1.$$

Összetett trapéz formula:

$$I_{5x2}(f) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{e^{-1}}{2} + e^{-0,96} + e^{-0,84} + e^{-0,64} + e^{-0,36} + \frac{1}{2} \right) = 0,544702.$$

A hiba becslésére:

Az $f(x) = e^{x^2-1}$ függvény első és második deriváltját használjuk:

$$f'(x) = e^{x^2-1} \cdot 2x,$$

$$f''(x) = e^{x^2-1} \cdot (4x^2 + 2),$$

amiből $M_2 = 6$, így

$$|I(f) - I_{5x2}(f)| \leq \frac{(1-0)^3}{12 \cdot 5^2} \cdot 6 = \frac{1}{50} = 2 \cdot 10^{-2}.$$

Összetett Simpson formula:

$$I_{5x3}(f) = \frac{1}{30} \cdot (e^{-1} + 4 \cdot e^{-0,99} + 2 \cdot e^{-0,96} + 4 \cdot e^{-0,91} + 2 \cdot e^{-0,84} +$$

$$+ 4 \cdot e^{-0,75} + 2 \cdot e^{-0,64} + 4 \cdot e^{-0,51} + 2 \cdot e^{-0,36} + 4 \cdot e^{-0,19} + 1) =$$

$$= 0,538090.$$

A hiba becslése:

A függvény harmadik és negyedik deriváltja:

$$f'''(x) = e^{x^2-1} \cdot 2x \cdot (4x^2 + 2) + e^{x^2-1} \cdot 8x = e^{x^2-1} \cdot (8x^3 + 12x),$$

$$f''''(x) = e^{x^2-1} \cdot 2x \cdot (8x^3 + 12x) + e^{x^2-1} \cdot (24x^2 + 12) = e^{x^2-1} \cdot (16x^4 + 48x^2 + 12),$$

amit felhasználva $M_4 = 76$, így

$$|I(f) - I_{5x3}(f)| \leq \frac{(1-0)^5}{2880 \cdot 5^4} \cdot 76 = \frac{19}{450000} = 4,2222 \cdot 10^{-5}.$$

(d) $\int_1^2 x^2 \ln x dx, \quad m = 4$

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{2-1}{4} = 0,25$$

Az alapintervallumot $([1, 2]-t)$ 4 egyenlő részre osztjuk.

Az alappontok a következők:

$$x_0 = 1 \quad x_1 = 1,25 \quad x_2 = 1,5 \quad x_3 = 1,75 \quad x_4 = 2.$$

Összetett trapéz formula:

$$I_{4x2}(f) = 0,25 \cdot (0 + (1,25^2 \cdot \ln 1,25) + (1,5^2 \cdot \ln 1,5) + (1,75^2 \cdot \ln 1,75) + \frac{2^2 \cdot \ln 2}{2}) = 1,090269.$$

A hiba becslésére:

Az $f(x) = x^2 \ln x$ függvény első és második deriváltját felhasználva:

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x,$$

$$f''(x) = 2 \cdot \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2 \cdot \ln x + 3,$$

amiből $M_2 = 2 \cdot \ln 2 + 3$, így

$$|I(f) - I_{4x2}(f)| \leq \frac{(2-1)^3}{12 \cdot 4^2} \cdot (2 \cdot \ln 2 + 3) = 2,2845 \cdot 10^{-2}.$$

Összetett Simpson formula:

$$I_{4x3}(f) = 1,070613.$$

A hiba becslése:

A függvény harmadik és negyedik deriváltja:

$$f'''(x) = \frac{2}{x},$$

$$f''''(x) = -\frac{2}{x^2},$$

tehát $M_4 = 2$, így

$$|I(f) - I_{4x3}(f)| \leq \frac{(2-1)^5}{2880 \cdot 4^4} \cdot 2 = \frac{1}{368640} = 2,7127 \cdot 10^{-6}.$$

(e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx, \quad m = 3$

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{\frac{\pi}{4}}{3} = \frac{\pi}{12}$$

Az alapintervallumot $([0, \frac{\pi}{4}]$ -et) 3 egyenlő részre osztjuk.

Az alappontok a következők:

$$x_0 = 0 \quad x_1 = \frac{\pi}{12} \quad x_2 = \frac{\pi}{6} \quad x_3 = \frac{\pi}{4}.$$

Összetett trapéz formula:

$$I_{3x2}(f) = -0,0921.$$

A hiba becslésére:

Az $f(x) = \ln(\cos x)$ függvény első és második deriváltját használjuk,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\tan x,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x},$$

tehát $M_2 = 2$, így

$$|I(f) - I_{3x2}(f)| \leq \frac{(\frac{\pi}{4})^3}{12 \cdot 3^2} \cdot 2 = 8,9717 \cdot 10^{-3}.$$

Összetett Simpson formula:

$$I_{3x3}(f) = -0,0864.$$

A hiba becslése:

A függvény harmadik és negyedik deriváltja:

$$f'''(x) = 2 \cdot \cos^{-3} x \cdot (-\sin x) = -2 \cdot \cos^{-3} x \cdot \sin x,$$

$$\begin{aligned} f''''(x) &= 6 \cdot \cos^{-4} x \cdot (-\sin x) \cdot \sin x - 2 \cdot \cos^{-3} x \cdot \cos x = \\ &= -6 \cdot \cos^{-4} x \cdot \sin^2 x - 2 \cdot \cos^{-2} x = -\frac{6 \sin^2 x}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x} = \\ &= -\frac{6 \sin^2 x + 2}{\cos^4 x} = -\frac{6 - 4 \cos^2 x}{\cos^4 x} \end{aligned}$$

tehát $M_4 = 16$, így

$$|I(f) - I_{3x3}(f)| \leq \frac{(\frac{\pi}{4})^5}{2880 \cdot 3^4} \cdot 16 = 2,0497 \cdot 10^{-5}.$$

(f) $\int_{-1}^0 e^{x^2} dx, \quad m = 3$

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{0+1}{3} = \frac{1}{3}$$

Az alapintervallumot $([-1, 0]$ -t) 3 egyenlő részre osztjuk.

Az alappontok a következők:

$$x_0 = -1 \quad x_1 = -\frac{2}{3} \quad x_2 = -\frac{1}{3} \quad x_3 = 0.$$

Összetett trapéz formula: $I_{3x2}(f) = 1,512094$.

A hiba becslése:

Az $f(x) = e^{x^2}$ függvény első és második deriváltját kiszámolva,

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x,$$

$$f''(x) = e^{x^2} \cdot 2x \cdot 2x + e^{x^2} \cdot 2 = e^{x^2} \cdot (4x^2 + 2),$$

amit felhasználva $M_2 = 6 \cdot e$, így

$$|I(f) - I_{3x2}(f)| \leq \frac{(0+1)^3}{12 \cdot 3^2} \cdot (6 \cdot e) = 0,151016.$$

Összetett Simpson formula:

$$I_{3x3}(f) = 1,462873.$$

A hiba becslése:

A függvény harmadik és negyedik deriváltja:

$$f'''(x) = e^{x^2} \cdot 2x \cdot (4x^2 + 2) + e^{x^2} \cdot 8x = e^{x^2} \cdot (8x^3 + 12x),$$

$$f''''(x) = e^{x^2} \cdot 2x \cdot (8x^3 + 12x) + e^{x^2} \cdot (24x^2 + 12) = e^{x^2} \cdot (16x^4 + 48x^2 + 12),$$

tehát $M_4 = 76 \cdot e$, így

$$|I(f) - I_{3x3}(f)| \leq \frac{(0+1)^5}{2880 \cdot 3^4} \cdot (76 \cdot e) = 8,8559 \cdot 10^{-4}.$$

2. Összetett trapéz képlet esetén a hiba becslése:

$$|I(f) - I_{mx2}(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12m^2} M_2, \text{ ahol } M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Míg összetett Simpson formula esetén a hiba becslése:

$$|I(f) - I_{mx3}(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880m^4} M_4, \text{ ahol } M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

A megoldás során felhasználjuk, hogy az M_2 és M_4 értékeket már az 1. feladatnál kiszámoltuk.

$$(a) \int_3^6 \sqrt{x-2} dx$$

Ha a trapéz formula esetén az m értékét úgy határozzuk meg, hogy

$$\frac{(b-a)^3}{12m^2} M_2 < 0,5 \cdot 10^{-4}$$

teljesüljön, akkor a hiba a megadott korlát alatt marad.

$$\begin{aligned}\frac{(6-3)^3}{12 \cdot m^2} \cdot \frac{1}{4} &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ \frac{9}{8} \cdot 10^4 &< m^2 \\ 106,066 &< m.\end{aligned}$$

Ha m -et legalább 107-nek választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint $0,5 \cdot 10^{-4}$.

Ha a Simpson képlet esetén az m értékét úgy határozzuk meg, hogy

$$\frac{(b-a)^5}{2880m^4} M_4 < 0,5 \cdot 10^{-4}$$

teljesüljön, akkor a hiba a megadott korlát alatt marad.

$$\begin{aligned}\frac{(6-3)^5}{2880 \cdot m^4} \cdot \frac{15}{16} &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ \frac{3^5 \cdot 15}{2880 \cdot 8} \cdot 10^4 &< m^4 \\ 6,3067 &< m.\end{aligned}$$

Ha m -et legalább 7-nek választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint $0,5 \cdot 10^{-4}$.

(b) $\int_1^2 \ln(x^2) dx$

Trapéz képlet esetén:

$$\begin{aligned}\frac{(2-1)^3}{12 \cdot m^2} \cdot 2 &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ \frac{1}{3} \cdot 10^4 &< m^2 \\ 57,735 &< m.\end{aligned}$$

Ha m -et legalább 58-nak választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint $0,5 \cdot 10^{-4}$.

Simpson képlet esetén:

$$\begin{aligned}\frac{(2-1)^5}{2880 \cdot m^4} \cdot 12 &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ \frac{1}{120} \cdot 10^4 &< m^4 \\ 3,0214 &< m.\end{aligned}$$

Ha m -et legalább 4-nek választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint $0,5 \cdot 10^{-4}$.

(c) $\int_0^1 e^{x^2-1} dx$

Trapéz képlet esetén:

$$\begin{aligned}\frac{(1-0)^3}{12 \cdot m^2} \cdot 6 &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ 10^4 &< m^2 \\ 100 &< m.\end{aligned}$$

Ha m -et legalább 101-nek választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint $0,5 \cdot 10^{-4}$.

Simpson képlet esetén:

$$\begin{aligned}\frac{(1-0)^5}{2880 \cdot m^4} \cdot 76 &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ \frac{19}{360} \cdot 10^4 &< m^4 \\ 4,7931 &< m.\end{aligned}$$

Ha m -et legalább 5-nek választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint $0,5 \cdot 10^{-4}$.

(d) $\int_1^2 x^2 \ln x dx$

Trapéz képlet esetén:

$$\begin{aligned}\frac{(2-1)^3}{12 \cdot m^2} \cdot (2 \cdot \ln 2 + 3) &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ \frac{2 \cdot \ln 2 + 3}{6} \cdot 10^4 &< m^2 \\ 85,5019 &< m.\end{aligned}$$

Ha m -et legalább 86-nak választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint $0,5 \cdot 10^{-4}$.

Simpson képlet esetén:

$$\begin{aligned}\frac{(2-1)^5}{2880 \cdot m^4} \cdot 2 &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ \frac{1}{720} \cdot 10^4 &< m^4 \\ 1,9305 &< m.\end{aligned}$$

Ha m -et legalább 2-nek választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint $0,5 \cdot 10^{-4}$.

(e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$

Trapéz képlet esetén:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{12 \cdot m^2} \cdot 2 &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{3} \cdot 10^4 &< m^2 \\ 40,1859 &< m. \end{aligned}$$

Ha m -et legalább 41-nek választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint $0,5 \cdot 10^{-4}$.

Simpson képlet esetén:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^5}{2880 \cdot m^4} \cdot 16 &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^5}{90} \cdot 10^4 &< m^4 \\ 2,4005 &< m. \end{aligned}$$

Ha m -et legalább 3-nak választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint $0,5 \cdot 10^{-4}$.

(f) $\int_{-1}^0 e^{x^2} dx$

Trapéz képlet esetén:

$$\begin{aligned} \frac{(0+1)^3}{12 \cdot m^2} \cdot (6 \cdot e) &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ e \cdot 10^4 &< m^2 \\ 164,8721 &< m. \end{aligned}$$

Ha m -et legalább 165-nek választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint $0,5 \cdot 10^{-4}$.

Simpson képlet esetén:

$$\begin{aligned} \frac{(0+1)^5}{2880 \cdot m^4} \cdot (76 \cdot e) &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ \frac{19}{360} \cdot e \cdot 10^4 &< m^4 \\ 6,1544 &< m. \end{aligned}$$

Ha m -et legalább 7-nek választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint $0,5 \cdot 10^{-4}$.

3. $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$,
így az $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ integrál közelítését kell elvégeznünk.

Mivel $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ és $M_2 = 2$, ezért ha az m értékét úgy választjuk, hogy

$$\frac{(2-1)^3}{12 \cdot m^2} \cdot 2 < 0,5 \cdot 10^{-3}$$

teljesüljön, akkor a hiba kisebb lesz, mint $0,5 \cdot 10^{-3}$.

Az előbbi egyenlőtlenséget átrendezve

$$\frac{1}{3} \cdot 10^3 < m^2, \text{ amiből} \\ 18,2574 < m.$$

Ha m -et legalább 19-nek választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint $0,5 \cdot 10^{-3}$.
Ekkor $I_{19 \times 2} = 0,693320$.

4. A közelítést $a_1 \cdot f(x_1) + a_2 \cdot f(x_2) + a_3 \cdot f(x_3)$ alakú kvadratúrával keressük.

A kvadratúra alappontjai:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0.5, \quad x_3 = 1.$$

Ha az integrálközelítő formula együtthatóit úgy határozzuk meg, hogy az pontos legyen az $f(x) \equiv 1, f(x) = x, f(x) = x^2$ függvények esetén, akkor a formula pontos lesz minden legfeljebb másodfokú polinom esetén.

•Legyen $f(x) \equiv 1$

$$\text{Egyrészt } \int_0^1 1 \cdot \sqrt{x} dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3},$$

$$\text{másrészt } a_1 \cdot f(x_1) + a_2 \cdot f(x_2) + a_3 \cdot f(x_3) = a_1 + a_2 + a_3.$$

Így az $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{2}{3}$ egyenletnek kell teljesülnie.

•Legyen $f(x) = x$

$$\text{Egyrészt } \int_0^1 x \cdot \sqrt{x} dx = \frac{2}{5},$$

$$\text{illetve } a_1 \cdot f(x_1) + a_2 \cdot f(x_2) + a_3 \cdot f(x_3) = 0 \cdot a_1 + \frac{1}{2} \cdot a_2 + 1 \cdot a_3.$$

Így az $\frac{1}{2} \cdot a_2 + a_3 = \frac{2}{5}$ egyenletnek kell teljesülnie.

•Legyen $f(x) = x^2$

$$\text{Egyrészt } \int_0^1 x^2 \cdot \sqrt{x} dx = \frac{2}{7},$$

$$\text{illetve } a_1 \cdot f(x_1) + a_2 \cdot f(x_2) + a_3 \cdot f(x_3) = 0 \cdot a_1 + \frac{1}{4} \cdot a_2 + 1 \cdot a_3.$$

Így az $\frac{1}{4} \cdot a_2 + a_3 = \frac{2}{7}$ egyenletnek kell teljesülnie.

Az

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \cdot a_2 + a_3 &= \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} \cdot a_2 + a_3 &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása $a_1 = \frac{4}{105}, a_2 = \frac{16}{35}, a_3 = \frac{6}{35}$.

5. $\int_{-1}^1 f(x)dx$

A kvadratúra alappontjai:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Hasonlóan eljárva mint az előző feladatnál:

• legyen $f(x) \equiv 1$

$$\int_{-1}^1 1dx = 2,$$

az $a_0 + a_1 + a_2 = 2$ egyenletnek kell teljesülnie.

• legyen $f(x) = x$

$$\int_{-1}^1 xdx = 0,$$

az $-\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot a_0 + \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot a_2 = 0$, azaz $-a_0 + a_2 = 0$ egyenletnek kell teljesülnie.

• legyen $f(x) = x^2$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3},$$

az $\frac{3}{5} \cdot a_0 + \frac{3}{5} \cdot a_2 = \frac{2}{3}$ egyenletnek kell teljesülnie.

Az

$$a_0 + a_1 + a_2 = 2$$

$$-a_0 + a_2 = 0$$

$$\frac{3}{5} \cdot a_0 + \frac{3}{5} \cdot a_2 = \frac{2}{3}$$

egyenletrendszer megoldva kapjuk, hogy a kvadratúra súlyai

$$a_0 = \frac{5}{9} \quad , \quad a_1 = \frac{8}{9} \quad , \quad a_2 = \frac{5}{9}.$$

Vizsgáljuk meg, hogy a kvadratúra pontos-e a legfeljebb harmadfokú polinomok esetén!

Ha $f(x) = x^3$, akkor

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = 0, \text{ továbbá}$$

$$\begin{aligned} a_0 \cdot f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + a_1 \cdot f(0) + a_2 \cdot f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) &= \\ &= \frac{5}{9} \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 + \frac{8}{9} \cdot 0^3 + \frac{5}{9} \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 = 0, \end{aligned}$$

tehát a legfeljebb harmadfokú polinom esetén is pontos a képlet.

Vizsgáljuk meg, hogy a kvadratúra pontos-e a legfeljebb negyedfokú polinomok esetén!

Ha $f(x) = x^4$, akkor

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{2}{5}, \text{ továbbá}$$

$$\begin{aligned}
& a_0 \cdot f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + a_1 \cdot f(0) + a_2 \cdot f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \\
& = \frac{5}{9} \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4 + \frac{8}{9} \cdot 0^4 + \frac{5}{9} \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4 = \frac{2}{5},
\end{aligned}$$

tehát a legfeljebb negyedfokú polinom esetén is pontos a képlet.

Vizsgáljuk meg, hogy a kvadratura pontos-e a legfeljebb ötödfokú polinomok esetén!

Ha $f(x) = x^5$, akkor

$\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$, továbbá

$$\begin{aligned}
& a_0 \cdot f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + a_1 \cdot f(0) + a_2 \cdot f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \\
& = \frac{5}{9} \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^5 + \frac{8}{9} \cdot 0^5 + \frac{5}{9} \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^5 = 0,
\end{aligned}$$

tehát a legfeljebb ötödfokú polinom esetén is pontos a képlet.

Vizsgáljuk meg, hogy a kvadratura pontos-e a legfeljebb hatodfokú polinomok esetén!

Ha $f(x) = x^6$, akkor

$\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{2}{7}$, továbbá

$$\begin{aligned}
& a_0 \cdot f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + a_1 \cdot f(0) + a_2 \cdot f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \\
& = \frac{5}{9} \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^6 + \frac{8}{9} \cdot 0^6 + \frac{5}{9} \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^6 = \frac{6}{25},
\end{aligned}$$

tehát a legfeljebb hatodfokú polinom esetén már nem pontos a képlet.