

# Tartalomjegyzék

<b>1</b>	<b>BEVEZETÉS</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>FELADATOK</b>	<b>3</b>
2.1	Lebegőpontos számok . . . . .	3
2.2	Normák, kondíciós számok . . . . .	5
2.3	Lineáris egyenletrendszerek megoldása, mátrixok felbontása . . . . .	8
2.4	Legkisebb négyzetek módszere . . . . .	11
2.5	Sajátérték feladatok . . . . .	13
2.6	Lagrange interpoláció . . . . .	16
2.7	Hermite interpoláció, spline-interpoláció . . . . .	18
2.8	Nemlineáris egyenletek és egyenletrendszerek . . . . .	20
2.9	Közelítő integrálás . . . . .	22
<b>3</b>	<b>MEGOLDÁSOK</b>	<b>23</b>
3.1	Lebegőpontos számok . . . . .	23
3.2	Normák, kondíciós számok . . . . .	29
3.3	Lineáris egyenletrendszerek megoldása, mátrixok felbontása . . . . .	36
3.4	Legkisebb négyzetek módszere . . . . .	51
3.5	Sajátérték feladatok . . . . .	56
3.6	Lagrange interpoláció . . . . .	66
3.7	Hermite interpoláció, spline-interpoláció . . . . .	72
3.8	Nemlineáris egyenletek és egyenletrendszerek . . . . .	78
3.9	Közelítő integrálás . . . . .	84
<b>4</b>	<b>BEFEJEZÉS</b>	<b>96</b>
<b>5</b>	<b>KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS</b>	<b>97</b>
<b>6</b>	<b>IRODALOMJEGYZÉK</b>	<b>98</b>

# 1 BEVEZETÉS

Ezt a feladatgyűjteményt a Debreceni Egyetem három Gazdaságinformatikus szakos hallgatója (Potyók Nikolett, Lehóczky Bence, Jobbágy Dávid) állította össze, Dr. Baran Ágnes témavezető, és Kézi Csaba Gábor konzulens segítségével. Célunk az volt, hogy a jelenleg folyó előadás anyagához bőséges, és lehetőségeinkhez képest megfelelő szakmai színvonalú feladatgyűjteményt adjunk hallgatótársaink kezébe.

Ez a példatár főként azoknak a gazdaságinformatikus hallgatóknak készült, akiknek szüksége van további gyakorlásra a gyakorlati órákon kívül, hogy elsajátítsák a numerikus matematika tantárgy feladatainak megoldását, illetve nagy segítséget nyújthat a vizsgákra való felkészülésben. Külön témakörbe szedtük a hasonló feladattípusokat, amikhez nem csak a végeredményt, hanem útmutatást is közöltünk a Megoldások című részben a könnyebb megértés érdekében.

Reméljük, hogy ez a példatár és feladatgyűjtemény hasznosan fogja szolgálni a Debreceni Egyetem gazdaságinformatikus-képzés célkitűzéseit, valamint a hallgatók órákra való felkészülését.

## 2 FELADATOK

### 2.1 Lebegőpontos számok

1. Adott  $a, t, k_+, k_-$  számábrázolási jellemzők esetén írjuk fel a legnagyobb ábrázolható lebegőpontos számot ( $M_\infty$ ), a legkisebb pozitív ábrázolható számot ( $\varepsilon_0$ ), illetve az 1 jobb- és baloldali szomszédját!
2. Adott  $a, t, k_-$  és  $k_+$  számábrázolási jellemzők mellett hány darab pozitív lebegőpontos szám írható fel?
3.  $a = 2, t = 4$  esetén írjuk fel az alábbi számok lebegőpontos alakját!

$$\frac{3}{16}, \quad -\frac{11}{4}, \quad 3, 25, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{15}{128}.$$

4.  $a = 2, \quad t = 4, \quad k_- = -3, \quad k_+ = 3$  esetén írjuk fel az alábbi számokhoz rendelt lebegőpontos számot szabályos kerekítés, ill. levágás esetén!

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{27}, \quad e.$$

5.  $a = 2, \quad t = 4, \quad k_- = -3, \quad k_+ = 2$  esetén ábrázoljuk számegyenesen az összes pozitív lebegőpontos számot!
6. Legyen  $k_+ > t$ . Melyik a legkisebb természetes szám, amely nem lebegőpontos?
7. Legyen  $a = 2, \quad t = 4, \quad k_- = -4, \quad k_+ = 4$ . Keressünk olyan  $x, y > 0$  lebegőpontos számokat, melyekre:
  - (a)  $x \neq y$  és  $fl(x - y) = 0$
  - (b)  $fl(x + y) = x$
  - (c)  $x + y \in [-M_\infty, M_\infty]$ , de  $x + y$  nem lebegőpontos szám!

8. Legyen  $t < k_+$ ,  $s \in (0, 1)$  lebegőpontos szám és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lehet-e túlsordulás, ha  $\frac{1}{\det A}$  értékét számítógéppel számítjuk ki?

P1. Határozza meg számítógépén  $\varepsilon_1$  értékét!

P2. Az alábbi algoritmus elméletileg minden  $x \geq 0$  esetén az  $x$  eredeti értékét adja vissza. Vizsgálja meg mi történik a gyakorlatban, ha az algoritmust  $x = 1000, x = 100$  kezdőértékkel futtatja! Mi az oka a tapasztalt jelenségnek?

```
for i = 1 : 60
    x = sqrt(x)
end
for i = 1 : 60
    x = x^2
end
```

P3. Tekintsük az alábbi azonosságot(ahol  $x \neq 0$ )!

$$\left(\frac{1}{10} + 1\right) \cdot x^2 - x^2 = 0, 1$$

Az  $x = 1, \dots, 100$  értékekre számítógépén tesztelje a fenti egyenlőség teljesülését!

P4. Ismert, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ . Számítsa ki az  $\frac{e^x - 1}{x}$  hányados értékét egyre csökkenő  $x$  értékek esetén!

P5. Legyen  $x = \frac{1}{3}$ . Ciklusban futtassuk le néhányszor az  $x = 4x - 1$  utasítást, ami elméletileg az  $x = \frac{1}{3}$  értéket adja vissza. Mit tapasztalunk a gyakorlatban?

## 2.2 Normák, kondíciós számok

1. Mutassa meg, hogy a lineáris normált tér bármely  $x, y$  elemére

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\|$$

teljesül!

2.  $\|A\|_1 = ?$ ,  $\|A\|_\infty = ?$ ,  $\|A\|_2 = ?$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Az alábbi  $A$  mátrix esetén  $\|A\|_1 = ?$ ,  $\|A\|_\infty = ?$  Adjon meg egy-egy olyan  $x \neq 0$  vektort, mellyel  $\|Ax\|_1 = \|A\|_1 \cdot \|x\|_1$ , illetve  $\|Ax\|_\infty = \|A\|_\infty \cdot \|x\|_\infty$  teljesül!

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 9 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Bizonyítsa be, hogy az egységmátrix normája 1 minden indukált mátrixnormában!
5. Bizonyítsa be, hogy vektornorma által indukált mátrixnormában

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

teljesül minden  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  esetén.

6. Legyen  $n > 1$  és tekintsük  $\mathbb{R}^{n \times n}$ -en az ún. Frobenius normát:

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Származtatható-e ez a mátrixnorma valamilyen vektornormából?

7. Legyen  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Mutassa meg, hogy

$$\|A\| = \max_{i,j} |a_{ij}|$$

normát definiál  $\mathbb{R}^{n \times n}$ -en! Lehet-e ez a norma vektornorma által indukált?

8. Legyen  $\lambda$  az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix egy tetszőleges sajátértéke. Bizonyítsa be, hogy

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

teljesül minden indukált mátrixnorma esetén!

9. Számítsa ki  $\text{cond}_\infty(A)$ -t az alábbi mátrixok esetén!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, (a \in \mathbb{R}) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

10. Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket, hasonlítsa össze a megoldásokat!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,0001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,0001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2,0001 \end{pmatrix}$$

11. Jelölje  $\lambda_{\max}$ , ill.  $\lambda_{\min}$  az  $A$  abszolút értékben legnagyobb, ill. legkisebb sajátértékét. Bizonyítsa be, hogy

$$\left| \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right| \leq \text{cond}(A).$$

12. Oldja meg az  $Ax = b$  lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1,99 \\ 1,97 \end{pmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy  $b$  helyett  $b + \delta b$  ismert,

$$b + \delta b = \begin{pmatrix} 1,98 \\ 1,98 \end{pmatrix}.$$

Oldja meg az  $A(x + \delta x) = b + \delta b$  lineáris egyenletrendszert! Számítsa ki a  $\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ ,  $\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$  relatív hibákat!

13. Legyen

$$A = A(s) = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} 1 + s^2 & 1 - s^2 \\ 1 - s^2 & 1 + s^2 \end{pmatrix}, \quad s \in (0, 1).$$

Határozza meg az  $\|A\|_\infty$  és  $\text{cond}_\infty(A)$  értékeket!

14. Legyen  $A = A(s)$  az előző feladatban definiált mátrix. Oldja meg az  $Ax = b$  lineáris egyenletrendszert, ahol  $b = (1, 1)^T$ , majd oldja meg az egyenletrendszert akkor is, ha a  $b$  vektor  $\delta b = (\varepsilon, -\varepsilon)^T$  (ahol  $\varepsilon > 0$ ) hibával terheltén adott. Számítsa ki a megoldás relatív hibáját (maximum-normában)!

15. Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  reguláris mátrix,  $0 \neq c \in \mathbb{R}$ .  $\text{cond}(cA) = ?$

## 2.3 Lineáris egyenletrendszerek megoldása, mátrixok felbontása

1. Határozza meg az alábbi mátrixok inverzét Gauss-Jordan eliminációval!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Oldja meg LU-felbontással az  $Ax = b$  egyenletrendszert! Határozza meg az A mátrix determinánsát!

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ -2 & -7 & 3 \\ 2 & 12 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 1 \\ 9 & 5 & -4 & 1 \\ -6 & -9 & 16 & 17 \\ 3 & 4 & -8 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -13 \\ 42 \\ -25 \\ 19 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -4 & -5 & -3 \\ -2 & -5 & a-6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5-2a \end{pmatrix}; \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$E = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \\ -4 & 8 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix};$$



$$H = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -6 & -5 & 3 \\ -4 & 18 & 3 & 2 \\ -3 & 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 21 \\ -41 \\ 83 \\ 52 \end{pmatrix};$$

$$I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & -5 & 6 & -3 \\ -4 & 5 & 8 & -5 \\ 2 & 6 & -22 & 15 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ -15 \\ 34 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

3. Határozza meg az alábbi mátrixok PLU felbontását! Számítsa ki a mátrixok determinánsát!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -28 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -24 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Vizsgálja meg mi történik, ha egy  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  mátrixot balról, ill. jobbról megszorunk egy

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

diagonális mátrixszal!

5. Határozza meg az alábbi mátrixok  $LDL^T$ -felbontását!

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 2 \\ -8 & 12 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -7 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 11 & -2 \\ 2 & -2 & 9 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 7 \\ -2 & -2 & 1 & -8 \\ -1 & 7 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Határozza meg az alábbi mátrixok Cholesky-felbontását! Számítsa ki a mátrixok determinánsát!

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \\ -6 & 4 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 9 \\ -9 & 29 & -31 \\ 9 & -31 & 37 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -4 & 9 & -13 \\ 6 & -13 & 21 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 9 \\ -3 & 17 & -7 \\ 9 & -7 & 10 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 12 & -4 \\ -8 & 13 & -3 & 2 \\ 12 & -3 & 14 & -11 \\ -4 & 2 & -11 & 21 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & a^2 + 10 \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

P1. Főelem választás nélküli Gauss-eliminációval oldja meg az alábbi egyenletrendszereket! Határozza meg az egzakt megoldást is és magyarázza meg a tapasztalt jelenséget!

$$\begin{pmatrix} 10^{-17} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-17} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 2.4 Legkisebb négyzetek módszere

1. Határozzuk meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes egyenletét!

$$\begin{array}{ll}
 (a) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} t_i & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline f_i & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{array} & (c) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} t_i & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 \\ \hline f_i & \frac{3}{4} & 1 & 2 & \frac{9}{4} & 3 & 3 \end{array} \\
 (b) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} t_i & -1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f_i & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} & (d) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} t_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f_i & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}
 \end{array}$$

2. Határozzuk meg az alábbi pontokat négyzetesen legjobban közelítő másodfokú polinomot!

$$\begin{array}{ll}
 (a) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} t_i & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline f_i & -1 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{array} & (b) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} t_i & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline f_i & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 \end{array}
 \end{array}$$

3. Az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i$$

alakú függvényt keresünk. Milyen  $n$  értéket érdemes választani? Határozzuk meg az ehhez tartozó polinomot!

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} t_i & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ \hline f_i & 1,2 & 1 & 0,8 & 1 & 1,1 \end{array}$$

4. Közelítsük az alábbi adatokat

$$F(t) = c_0 + c_1 \cos(\pi t) + c_2 \sin(\pi t)$$

alakú modellel!

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} t_i & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ \hline y_i & 1 & -2 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} \end{array}$$

Mit tapasztalunk, ha a fenti modellel a következő adatokat közelítjük?

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} t_i & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ \hline f_i & 1 & -2 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} \end{array}$$

5. Határozzuk meg a

$t_i$	0	0,5	0,5	1	1,2	1,5	1,8	2	2,3	2,5
$f_i$	1,5	1,7	1,8	2,1	2,1	2,3	2,5	2,4	2,7	2,7

adatokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes egyenletét!

6. Határozzuk meg a

$t_i$	0,5	0,6	0,7	0,9	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$f_i$	8,1	7	6,3	5,3	5	4,52	4,14	3,9	3,7	3,51

adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = a + \frac{b}{t}$$

alakú függvényt!

7. Határozzuk meg a

$t_i$	0	0,3	0,5	0,6	0,8	1	1,1	1,3	1,5	1,6	1,8	1,9	2
$f_i$	1,9	2,4	2,2	1,9	1,2	0,5	0,2	0	0,2	0,5	1,2	1,6	1,9

adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = a + b \cdot \cos(\pi t) + c \cdot \sin(\pi t)$$

alakú függvényt!

## 2.5 Sajátérték feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

(a)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Mutassuk meg, hogy ha  $\lambda$  az  $A$  mátrix sajátértéke, akkor  $|\lambda| \leq \|A\|$ , ahol a norma tetszőleges vektornorma által indukált mátrixnorma.
3. Bizonyítsuk be, hogy  $A$  mátrix pontosan akkor szinguláris, ha a 0 sajátértéke!
4. Mutassuk meg, hogy ha a reguláris  $A$  mátrixnak  $\lambda$  sajátértéke, akkor  $1/\lambda$  sajátértéke  $A^{-1}$ -nek. Mi lesz az  $A^{-1}$  mátrix  $1/\lambda$  sajátértékéhez tartozó sajátvektor?
5. Bizonyítsuk be, hogy ha az  $A$  mátrixnak  $\lambda$  sajátértéke, akkor  $\lambda^2$  sajátértéke  $A^2$ -nek!
6. Bizonyítsuk be, hogy ha az  $A$  mátrixnak  $\lambda$  sajátértéke, akkor az  $A - cE$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) mátrixnak  $\lambda - c$  sajátértéke! Mi lesz az  $A - cE$  mátrix  $\lambda - c$  sajátértékéhez tartozó sajátvektor?
7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix szigorúan domináns főátlójú, akkor reguláris!
8. Mit tudunk mondani az alábbi mátrixokról a Gersgorin-tétel alapján?

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -1 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -11 \end{pmatrix}$$

9. Mit tudunk mondani az alábbi mátrix sajátértékeinek elhelyezkedéséről?

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Mit mondhatunk az  $A$  regularitásáról? Legyen  $v = (-3, 7, 2, 5, 1)^T$ . Melyik  $\lambda$  esetén lesz minimális az  $Av - \lambda v$  euklideszi normája?

10. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Legyen  $v = (-5, 0, 4)^T$  az  $A$  egyik sajátvektorának közelítése. Melyik  $\lambda$  esetén lesz minimális az  $Av - \lambda v$  euklideszi normája? Ez a  $\lambda$  sajátértéke-e  $A$ -nak?

11. Alkalmazzuk a hatványmódszert az alábbi mátrixokra!

Az iterációt addig folytassuk, amíg a

$$|\lambda^K - \lambda^{K-1}| \leq \epsilon(1 + |\lambda^K|)$$

leállási feltétel nem teljesül.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(e)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(f)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(g)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(h)

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -2 & -2 \\ 15 & 1 & 7 \\ 21 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2.6 Lagrange interpoláció

1. Határozzuk meg az alábbi pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

(a)  $(-3, -6), (-2, -17), (-1, -8), (1, -2), (2, 19)$

(b)  $(-3, -31), (-2, -8), (1, 1), (2, 22)$

(c)  $(-2, -13), (-1, -4), (1, 2)$

(d)  $(-2, -5), (-1, 3), (0, 1), (2, 15)$

(e)  $(-1, 4), (1, 2), (2, 10), (3, 40)$

(f)  $(-2, 38), (-1, 5), (1, -1), (2, -10), (3, -7)$

2. Határozzuk meg a  $(-2, -6), (0, 4), (1, -3), (2, -10)$  pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot! Határozzuk meg azt a minimális fokszámú polinomot, amely az előző pontokon kívül áthalad a  $(-1, 2)$  ponton is!

3. Közelítsük az  $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$  függvényt a  $[-1, 1]$  intervallumon másodfokú polinommal a  $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$  pontokra támaszkodva!

4. Az alábbi táblázatban egy másodfokú  $p$  polinom helyettesítési értékei láthatóak, melyek közül pontosan egy hibás. Határozza meg a hibás értéket, helyettesítse a helyes értékkel és adja meg a  $p$  polinomot!

$x_i$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$
$p_i$	$15$	$9$	$5$	$3$	$2$	$5$

5. Becsüljük meg az interpoláció maximális hibáját az alappontok által kifeszített intervallumon, ha az  $f(x) = e^{-x}$  függvényt közelítjük az  $x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 0$  alappontokra támaszkodva!



6. Igazoljuk, hogy ha  $f$  kétszer folytonosan differenciálható, akkor lineáris interpoláció esetén az interpoláció hibájára

$$|f(x) - L_1(x)| \leq \frac{M_2}{8} \cdot h^2, \quad a \leq x \leq b$$

teljesül, ahol  $a$  és  $b$  a két alappont,  $h = b - a$  és  $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ .

7. Milyen sűrűn kell megadni az  $f(x) = \cos(x)$  függvény értékeit az  $[0, \pi]$  intervallumon, hogy szakaszonként lineárisan interpolálva a hiba kisebb legyen, mint  $0,5 \cdot 10^{-4}$ ?

## 2.7 Hermite interpoláció, spline-interpoláció

1. Határozzuk meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

(a)

$x_i$	$-1$	$1$	$2$
$f(x_i)$	$4$	$6$	$94$
$f'(x_i)$	$9$	$17$	$213$

(b)

$x_i$	$-2$	$-1$	$1$
$f(x_i)$	$13$	$3$	$7$
$f'(x_i)$	$-31$	$14$	$18$
$f''(x_i)$		$-40$	

(c)

$x_i$	$-1$	$1$	$2$
$f(x_i)$	$4$	$2$	$91$
$f'(x_i)$	$5$	$9$	$269$
$f''(x_i)$		$42$	

(d)

$x_i$	$-1$	$1$	$2$
$f(x_i)$	$-1$	$3$	$23$
$f'(x_i)$	$2$	$2$	$59$

(e)

$x_i$	$-2$	$-1$	$1$
$f(x_i)$	$-10$	$-2$	$2$
$f'(x_i)$	$-20$	$10$	$10$
$f''(x_i)$		$-16$	

2. Legyen az  $f$  valós függvény differenciálható az  $x_0$  pontban. Hermite interpoláció segítségével írjuk fel az  $f$  függvény  $x_0$ -beli érintőjének egyenletét!

3. Írjuk fel az  $x_0, f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$  adatokra illeszkedő Hermite - polinomot!

4. Írjuk fel az  $f(x) = \cos x - x^2 - 3x$  függvény  $x = 0$  pontbeli érintőjének egyenletét!

5. Határozzuk meg azt a folytonosan differenciálható, szakaszonként harmadfokú

$$H(x) = \begin{cases} H_1(x), & \text{ha } x \in [-1, 1] \\ H_2(x), & \text{ha } x \in (1, 3] \end{cases}$$

polinomot, melyre  $H(-1) = 4, H(1) = 6, H(3) = 12, H'(-1) = -3, H'(1) = 13, H'(3) = 9$  teljesül!

6. Határozzuk meg azt a folytonosan differenciálható, szakaszonként harmadfokú

$$H(x) = \begin{cases} H_1(x), & \text{ha } x \in [-1, 1] \\ H_2(x), & \text{ha } x \in (1, 3] \end{cases}$$

polinomot, melyre  $H(-1) = 4, H(1) = 6, H(3) = 12, H'(-1) = -3, H'(1) = \alpha, H'(3) = 9$  teljesül, ahol  $\alpha \in \mathbb{R}$ !

7. Az előző feladatban határozzuk meg  $\alpha$  értékét úgy, hogy  $H(x)$  kétszer folytonosan differenciálható legyen!

## 2.8 Nemlineáris egyenletek és egyenletrendszerek

1. Közelítse a  $3x = \cos(x)$  egyenlet  $[-\pi/2, \pi/2]$  intervallumbeli gyökét fixpont-iterációval! Mit mondhatunk a módszer konvergenciájáról?
2. Közelítse a  $3x^2 - 12x + 4 = 0$  egyenlet  $[0,1]$  intervallumbeli gyökét fixpont-iterációval! Vizsgálja meg az iteráció konvergenciáját!
3. Közelítse az  $\ln(x) = 2 - x$  egyenlet gyökét!
4. Mutassa meg, hogy  $f(x) = e^x - 4x^2$  függvénynek van zérushelye a  $[0,1]$  intervallumban! Igazolja, hogy az

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} e^{\frac{x_n}{2}}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

iteráció tetszőleges  $x_0 \in [0,1]$  kezdőpont esetén tart ehhez a gyökhöz!

5. Közelítse  $\sqrt{5}$  értékét Newton-módszerrel!
6. Közelítse Newton-módszerrel az  $e^x = \sin(x)$  egyenlet valamely gyökét!
7. Vizsgálja meg a Newton-módszer viselkedését, ha azt valamilyen  $x_0 \neq 0$  kezdőpontból indítva az  $f(x)=0$  egyenlet megoldására alkalmazzuk, ahol

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{ha } x \geq 0, \\ -\sqrt{-x}, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

8. Közelítse az  $x^3 - 3x - 2 = 0$  egyenlet gyökét Newton-módszerrel az  $x_0 = 1,5$  pontból indulva!
9. Közelítse  $x^3 - 3x + 2 = 0$  egyenlet gyökét Newton-módszerrel az  $x_0 = 1,5$  pontból indulva! Ugyanilyen  $x_0$  esetén alkalmazza az

$$x_{k+1} = x_k - 2 \cdot \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

iterációt! Mit tapasztal?

10. Vizsgálja meg a  $x^3 - x = 0$  egyenlet megoldására az

(a)  $x_{k+1} = x_k^3$

(b)  $x_{k+1} = (x_k)^{1/3}$

iterációkat a  $[-1,1]$  intervallumon!

11. Tekintsük a

$$-4x_1 + \cos(2x_1 - x_2) = 3$$

$$-3x_2 + \sin x_1 = 2 \quad x_1, x_2 \in [-\pi, \pi]$$

egyenletrendszert. Mit mondhatunk az egyenletrendszer megoldhatóságáról, illetve az

$$x_1^{(k+1)} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos(2x_1^{(k)} - x_2^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sin x_1^{(k)}$$

( $k=0,1,2,\dots$ ) eljárás konvergenciájáról?

12. Közelítse az

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 1x_1^2 + 0, 1x_2^2 + 0, 1x_3^2 \\ 0, 1x_1 + 0, 1x_2 + 0, 1x_3 \\ 0, 1x_1x_2x_3 + 0, 3 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 2]$ -beli gyökét fixpont-iterációval! Vizsgálja meg az eljárás konvergenciáját!

## 2.9 Közelítő integrálás

1. Közelítsük az alábbi integrálokat összetett trapéz-, ill. Simpson-formulával úgy, hogy a megadott intervallumot  $m$  részintervallumra osztjuk! Becsüljük meg a közelítés hibáját!

(a)  $\int_3^6 \sqrt{x-2} dx, \quad m = 5$

(b)  $\int_1^2 \ln(x^2) dx, \quad m = 5$

(c)  $\int_0^1 e^{x^2-1} dx, \quad m = 5$

(d)  $\int_1^2 x^2 \ln x dx, \quad m = 4$

(e)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx, \quad m = 3$

(f)  $\int_{-1}^0 e^{x^2} dx, \quad m = 3$

2. Közelítsük a fenti integrálokat összetett trapéz-, ill. Simpson-formulával úgy, hogy  $m$ -et abból a feltételből határozzuk meg, hogy a hiba kisebb legyen, mint  $0,5 \cdot 10^{-4}$ !
3. Közelítsük  $\ln(2)$  értékét összetett trapéz-formulával úgy, hogy a hiba kisebb legyen, mint  $0,5 \cdot 10^{-3}$ !
4.  $\int_0^1 f(x)\sqrt{x} dx$  típusú integrálokat szeretnénk közelíteni  $\sum_{i=1}^3 a_i f(x_i)$  alakú kvadraturával, ahol  $x_1 = 0, x_2 = 0,5, x_3 = 1$ . Határozza meg a kvadratura súlyait úgy, hogy a kvadratura pontos legyen minden legfeljebb másodfokú polinom esetén!
5. Az  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  integrál közelítésére az

$$a_0 \cdot f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + a_1 \cdot f(0) + a_2 \cdot f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

kvadraturát szeretnénk használni. Határozza meg az  $a_0, a_1, a_2$  együtthatókat úgy, hogy a kvadratura pontos legyen minden legfeljebb másodfokú polinom esetén! Vizsgálja meg, hogy magasabb fokú polinomok esetén hogy viselkedik a kvadratura!

## 3 MEGOLDÁSOK

### 3.1 Lebegőpontos számok

1. • Legnagyobb ábrázolható lebegőpontos szám:

$$\begin{aligned} M_\infty &:= a^{k_+} \sum_{i=1}^t \frac{a-1}{a^i} = a^{k_+} \cdot \left( \frac{a-1}{a} + \frac{a-1}{a^2} + \dots + \frac{a-1}{a^t} \right) = \\ &= a^{k_+} \cdot (1 - a^{-t}). \end{aligned}$$

- Legkisebb ábrázolható pozitív szám:

$$\varepsilon_0 := a^{k_-} \cdot \left( \frac{1}{a} + 0 + \dots + 0 \right) = a^{k_- - 1}.$$

- Az 1 jobboldali szomszédja:

$$[+|1|1, 0, \dots, 0, 1] = a^1 \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{a^t} \right) = 1 + a^{1-t} = 1 + \varepsilon_1.$$

- Az 1 baloldali szomszédja:

$$\begin{aligned} [+|0| \quad a-1, \quad a-1, \quad \dots, \quad a-1] &= a^0 \cdot \left( \frac{a-1}{a} + \dots + \frac{a-1}{a^t} \right) = \\ &= 1 - a^{-t}. \end{aligned}$$

2. A pozitív lebegőpontos számok alakja:

$$[+ \quad |k| \quad m_1, m_2, \dots, m_t].$$

Itt  $k$  helyére  $(k_+ + |k_-| + 1)$ -féle számot írhatunk,  $m_1$  helyére  $(a-1)$ -féle, míg  $m_2, \dots, m_t$  helyére  $a$ -féle értéket.

Tehát a pozitív lebegőpontos számok száma:

$$(k_+ + |k_-| + 1) \cdot (a-1) \cdot a^{t-1}.$$

3. Lebegőpontos alak:

$$\pm a^k \cdot \left( \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \frac{m_3}{a^3} + \frac{m_4}{a^4} \right).$$

- $\frac{3}{16}$  lebegőpontos alakja:

$$\frac{3}{16} = 2^{-2} \cdot \left( \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \right) = 2^{-2} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right).$$

$$[+ \quad | - 2 | \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0].$$

- $\frac{11}{4}$  lebegőpontos alakja:

$$\frac{11}{4} = 2^2 \cdot \frac{11}{16} = 2^2 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \right).$$

$$[- \quad | 2 | \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1].$$

- 3,25 lebegőpontos alakja:

$$3,25 = 2^2 \cdot \frac{13}{16} = 2^2 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} \right).$$

$$[+ \quad | 2 | \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1].$$

- $\frac{5}{8}$  lebegőpontos alakja:

$$\frac{5}{8} = 2^0 \cdot \frac{5}{8} = 2^0 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} \right).$$

$$[+ \quad | 0 | \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0].$$

- $\frac{15}{128}$  lebegőpontos alakja:

$$\frac{15}{128} = 2^{-3} \cdot \frac{15}{16} = 2^{-3} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \right).$$

$$[+ \quad | - 3 | \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1].$$



4. •  $\frac{1}{3}$

Megkeressük az  $\frac{1}{3}$ -hoz legközelebbi lebegőpontos számot. Azaz megkeressük a nála kisebb lebegőpontos számok közül a legnagyobbat, és a nála nagyobbak közül a legkisebbet. Az így megtalált két lebegőpontos szám közül a keresett számhoz közelebb eső lesz a szabályos kerekítéssel megadott szám. Levágás esetén pedig az előbb megtalált kettő lebegőpontos szám közül a nullához közelebbi lebegőpontos számot ábrázoljuk.

$$\frac{1}{3} = 2^{-1} \cdot \frac{2}{3}.$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} < \frac{2}{3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}.$$

$$\text{azaz: } \frac{30}{48} < \frac{32}{48} < \frac{33}{48}.$$

Lebegőpontos alak szabályos kerekítés esetén:  $[+|-1| \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1]$ .

Lebegőpontos alak levágás esetén:  $[+|-1| \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$ .

•  $\frac{1}{27}$

Az adott számábrázolási jellemzők mellett a legkisebb pozitív ábrázolható szám:  $\varepsilon_0 = \frac{1}{16}$ . Mivel  $\frac{1}{27} < \frac{1}{16}$ , így a gép - függetlenül attól, hogy szabályos kerekítéssel vagy levágással kerekít - az  $\frac{1}{27}$ -hez a 0-t rendeli. Alulcsordulás lép fel.

• e

$$e \approx 2,718.$$

2,718-hoz legközelebbi lebegőpontos számok a  $2,5 < e < 2,75$ .

Szabályos kerekítésnél a 2,75-t kell felírni lebegőpontosan :

$$2,75 = 2 + 0,75 = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 2^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right).$$

Lebegőpontos alak szabályos kerekítés esetén:  $[+|2| \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1]$ .

Levágás esetén a 2,5-t kell felírni lebegőpontosan:

$$2,5 = 2 + 0,5 = 2 + \frac{1}{2} = 2^1 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) = 2^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right).$$

Lebegőpontos alak levágás esetén:  $[+|2| \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$ .

5. A 2. feladat alapján összesen 48 db szám lesz:  $((2 + (-3) + 1) \cdot 1 \cdot 2^3) = 48$ .

$k = 0$  esetén az alábbi számok ábrázolhatóak:  $\frac{8}{16}, \quad \frac{9}{16}, \quad \frac{10}{16}, \quad \dots, \quad \frac{15}{16}$ .

Ezekből a többi karakterisztikához tartozó számokat úgy kapjuk, hogy a kettő alkalmas hatványával szorozzuk az előző számokat.

6. Két szomszédos, k karakterisztikájú szám távolsága:

$$a^k \cdot \frac{1}{a^t} = a^{k-t}.$$

Ha  $k=t$ , akkor ez a távolság 1.

$k = t$  karakterisztika mellett a legnagyobb lebegőpontos szám:  $a^t \cdot (1 - a^{-t}) = a^t - 1$ . Ennek jobboldali szomszédja (a legkisebb  $t + 1$  karakterisztikájú szám):  $a^{t+1} \cdot \frac{1}{a} = a^t$ .  $t + 1$  karakterisztika esetén két szomszédos lebegőpontos szám távolsága  $a$ , így az  $a^t + 1$  nem lebegőpontos.

7. (a)  $x \neq y$  és  $fl(x - y) = 0$

A legkisebb ábrázolható szám:  $\varepsilon_0 := a^{k-1}$ .

A fenti adatoknak megfelelően a legkisebb ábrázolható szám:  $\varepsilon_0 := 2^{-5} = \frac{1}{32}$ .

Olyan lebegőpontos számokat kell keresnünk, melyek távolsága kisebb, mint  $\frac{1}{32}$ .

Lehetséges értékek:  $x = \frac{9}{128}; y = \frac{8}{128}$ .

Vagyis:  $fl(x - y) = \frac{1}{128}$ ,

$$\frac{1}{128} < \frac{1}{32}.$$

Mivel a  $fl(x - y)$  kisebb, mint  $\varepsilon_0$ , ezért  $fl(x - y) = 0$ .

(b)  $fl(x + y) = x$

Lehetséges számok:  $x = 2; y = \frac{1}{32}$ , ugyanis az adott jellemzők mellett a 2 jobboldali szomszédja  $2 + \frac{1}{4}$ , így a  $2 + \frac{1}{32}$ -et a gép 2-re kerekíti, vagyis:  $fl(x + y) = 2$ .

(c)  $x + y \in [-M_\infty, M_\infty]$ , de  $x + y$  nem lebegőpontos szám!

Lehetséges számok:  $x = 2; y = \frac{1}{16}$ , mert ezek összege nem lebegőpontos szám.

8.  $\det(A) = 1 - s$ .

A legrosszabb esetet kell megkeresni. Ebben a helyzetben ez az, amikor az  $1 - s$  a legkisebb, azaz az 1 baloldali szomszédját kell megkeresni.

Az 1 baloldali szomszédja:  $1 - a^{-t}$ .

Tehát  $\frac{1}{\det A}$  akkor a legnagyobb, ha  $s = 1 - a^{-t}$ , vagyis  $1 - s = a^{-t}$ .

$$\frac{1}{\det A} = \frac{1}{1 - s} = \frac{1}{a^{-t}} = a^t = a^{t+1} \cdot \frac{1}{a} < a^{k+} \cdot \left( \frac{a-1}{a} + \dots + \frac{a-1}{a^t} \right) = M_\infty$$

tehát nincs túlcsordulás.

P1. A feladat Matlab programkódja:

```
e = 1;
while(1 + e) > 1
e = e/2;
end
2 * e
```

A feladat megoldása:  $\varepsilon_1 = 2,220446049250313e - 016$ .  
 $\varepsilon_1$  értékét a Matlab beépített konstansként is ismeri (eps).

P2. A fenti algoritmus MATLAB-ban megírva:

```
x = 100;
for i = 1 : 60
x = sqrt(x);
end
for i = 1 : 60
x = x^2;
end
```

Azt fogja végül kiírni, hogy  $x = 1$ . Ennek oka, hogy  $a > 1$  esetén  $\sqrt[n]{a}$  tart 1-hez, ha  $n \rightarrow \infty$ . Ha a gyökvonások eredményeit kiíratjuk, akkor látható, hogy  $i = 55$  esetén a gyökvonás eredményét a gép pontosan 1-nek látja.  
Néhány részeredmény kiírva:

$i$	x
5	1,154781984689458
10	1,004507364254463
20	1,000004391842173
30	1,0000000004288899
40	1,0000000000004188
50	1,0000000000000004

P3.

$$\left(\frac{1}{10x^2} + 1\right)x^2 - x^2 = 0, 1$$

Az azonosság Matlab-ban megírva a következőképpen néz ki:

```
k = 0;
for x = 1 : 100
if((((1/x^2)/10 + 1) * x^2 - x^2) == 0, 1)
k = k + 1;
end
end
```

A fenti MATLAB programot lefuttatva azt tapasztaljuk, hogy  $k$  értéke 0. Azaz a MATLAB szerint az egyenlőség egyetlen  $x$ -re sem teljesül. Ennek oka, hogy a 0,1 nem lebegőpontos szám.

P4. A feladat Matlab-ban megírva:

```
x = 1;
for i = 1 : 60
    (exp(x) - 1)/x
    x = x/2;
end
```

A ciklust 53-ig futtatva a hányados értékére 1-et ad eredményül, de 54-ig futtatva a hányados értéke már 0. Ennek oka, hogy  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ . Így egy idő múlva a gép  $e^x$  értékét 1-nek látja, ekkor a hányados értéke is 0.

P5. A feladat Matlab-ban megírva:

```
x = 1/3;
for i = 1 : 40
    x = 4 * x - 1;
end
```

Ha a ciklust 40-szer futtatjuk le az eredmény: 22369621. Ennek oka, hogy az  $\frac{1}{3}$  nem lebegőpontos szám (lásd 4.feladat). Így a kerekítési hibák a ciklus minden lépésében halmozódnak. Néhány részeredmény 15 tizedesjegyre kerekítve:

$i$	eredmény
2	0,333333333333333
3	0,333333333333332
10	0,333333333313931
20	0,333312988281250
26	0,250000000000000
27	0
28	-1
30	-21
35	-21845
40	-22369621

### 3.2 Normák, kondíciós számok

1. A bizonyítandó állítás ekvivalens azzal, hogy:

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

Az második egyenlőtlenség igazolása a háromszögegyenlőtlenség segítségével:

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

ezt átrendezve:

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Az első egyenlőtlenség az  $x$  és  $y$  szerepének felcserélésével adódik.

2. Sornorma:

$$\|A\|_{\infty} = \max \{|-1| + |2|, |3| + |-2|\} = 5$$

Oszlopnorma:

$$\|A\|_1 = \max \{|-1| + |3|, |2| + |-2|\} = 4$$

Spektrálnorma:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$$

Karakterisztikus polinom:

$$\begin{vmatrix} 10 - \lambda & -8 \\ -8 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = (10 - \lambda)(8 - \lambda) - 64 = \lambda^2 - 18\lambda + 16$$

Az  $A^T A$  sajátértékei:

$$\lambda^2 - 18\lambda + 16 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 64}}{2}, \text{ így}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\frac{18 + \sqrt{18^2 - 64}}{2}} \approx 4,1306$$

3. (a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 9 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = 19, \quad \|A\|_{\infty} = 16.$$

Az  $\|\cdot\|_1$  mátrixnorma esetén az alkalmas  $x$  vektort úgy kaphatjuk, hogy keresünk egy olyan  $j_0$  indexet, melyre

$$\sum_{i=1}^n |a_{ij_0}| = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

(azaz ahol az egy oszlopban álló mátrixelemek abszolútértékeinek összege maximális), és  $x$ -nek azt a vektort választjuk, melynek  $j_0$ -adik koordinátája 1, a többi 0. Jelen esetben a 3. oszlopban a legnagyobb a számok abszolútértékének összege,

$$\text{így } x = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrizzük, hogy ezzel az  $x$  vektorral valóban teljesül-e az egyenlőség!

$$\|x\|_1 = 1, \quad Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \|Ax\|_1 = 19 = \|A\|_1 \cdot \|x\|_1.$$

A  $\|\cdot\|_\infty$  mátrixnorma esetén keresnünk kell egy olyan  $i_0$  indexet, melyre

$$\sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

(azaz ahol az egy sorban álló elemek abszolútértékének összege maximális), és  $x$  legyen az a vektor, melynek  $j$ -edik koordinátája:  $x_j = \text{sgn}(a_{i_0 j})$ ,  $j = 1, \dots, n$ . A fenti mátrix esetén  $i_0 = 2$  (a második sorban a legnagyobb az elemek ab-

$$\text{szolútértékének az összege), így } x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrizzük, hogy ezzel az  $x$  vektorral valóban teljesül-e az egyenlőség!

$$\|x\|_\infty = 1, \quad Ax = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \|Ax\|_\infty = 16 = \|A\|_\infty \cdot \|x\|_\infty.$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = 10, \quad \|A\|_\infty = 10$$

$$\text{Az a) részben leírtak alapján } j_0 = 3, \text{ így } x = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ekkor } \|x\|_1 = 1, \quad Ax = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \|Ax\|_1 = 10 = \|A\|_1 \cdot \|x\|_1.$$

$$\text{Az a) részben leírtak alapján } i_0 = 3, \text{ azaz } x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ekkor } \|x\|_\infty = 1, \quad Ax = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \|Ax\|_\infty = 10 = \|A\|_\infty \cdot \|x\|_\infty.$$

4.

$$\|E\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ex\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$$

5.

$$\|AB\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|(AB)x\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\|A(Bx)\|}{\|x\|} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\|A\| \cdot \|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \cdot \max_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \cdot \|B\|$$

6. Az egységmátrix normája:  $\|E_n\|_F = \sqrt{n} \neq 1$ , így nem teljesül a 4. feladatban szereplő tulajdonság, azaz a Frobenius norma nem származtatható semmilyen vektornormából.

7. Belátjuk, hogy a norma definíciójában megkövetelt 4 tulajdonság teljesül.

1.  $\|A\| \geq 0$  minden  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  esetén.

Ez a tulajdonság teljesül, hiszen abszolútértékek maximuma mindig nemnegatív.

2.  $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

Ha  $A = 0$ , akkor  $a_{ij} = 0 \forall i, j$ -re, így  $\|A\| = 0$

Ha  $\|A\| = 0$ , akkor

$$\max_{i,j} |a_{ij}| = 0$$

azaz  $|a_{ij}| = 0 \forall i, j$ -re, így  $A = 0$ .

3.  $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  esetén

$$\|\lambda A\| = \max_{i,j} |\lambda a_{ij}| = \max_{i,j} |\lambda| \cdot |a_{ij}| = |\lambda| \cdot \max_{i,j} |a_{ij}| = |\lambda| \cdot \|A\|.$$

4.  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  esetén

$$\|A + B\| = \max_{i,j} |a_{ij} + b_{ij}| \leq \max_{i,j} (|a_{ij}| + |b_{ij}|) \leq \max_{i,j} |a_{ij}| + \max_{i,j} |b_{ij}| = \|A\| + \|B\|.$$

Tehát a függvény tényleg normát definiál  $\mathbb{R}^{n \times n}$ -en.

Megmutatjuk, hogy ez a norma nem származtatható semmilyen vektornormából.

Legyen  $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , ekkor  $AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,

így  $\|A\| = \|B\| = 1$ , míg  $\|AB\| = 2$ , azaz az indukált normák 5. feladatban bizonyított tulajdonsága nem teljesül.

8. Ha  $v \neq 0$  a  $\lambda$ -hoz tartozó sajátvektor, akkor  $Av = \lambda v$ , azaz

$$\begin{aligned} |\lambda| \cdot \|v\| &= \|\lambda v\| = \|Av\| \leq \|A\| \cdot \|v\| \\ |\lambda| \cdot \|v\| &\leq \|A\| \cdot \|v\| \end{aligned}$$

ezt az egyenlőtlenséget  $\|v\| \neq 0$ -val osztva kapjuk az állítást.

9. (a)  $\det(A) = -10 \Leftarrow$  a determináns nem nulla, tehát a mátrix invertálható

$$A^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_{\infty} = 6, \|A^{-1}\|_{\infty} = \frac{5}{10}, \text{ így}$$

$$\text{cond}_{\infty}(A) = \|A\|_{\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{\infty} = 3.$$

2×2-es mátrix esetén a  $\text{cond}_{\infty}(A)$ -t az alábbi képlet segítségével is meghatározhatjuk:

$$\text{cond}_{\infty}(A) = \frac{\|A\|_{\infty} \cdot \|A\|_1}{|\det(A)|}.$$

(b)  $\det(A) = 2a + 1 \Rightarrow$  ha  $a = -\frac{1}{2}$  akkor  $A$  nem invertálható, egyébként igen.

Mivel  $a$  ismeretlen, ezért több eset áll fenn:

1. eset: ha  $3 \geq 1 + |a|$ , azaz  $2 \geq |a|$ , akkor  $\|A\|_{\infty} = 3$ . Ekkor  $\|A\|_1 = 3$ , és így

$$\text{cond}_{\infty}(A) = \frac{\|A\|_{\infty} \cdot \|A\|_1}{|\det(A)|} = \frac{9}{|2a + 1|}.$$

2. eset: ha  $3 < 1 + |a|$ , azaz  $2 < |a|$ , akkor  $\|A\|_{\infty} = 1 + |a|$ , és  $\|A\|_1 = 1 + |a|$ , azaz

$$\text{cond}_{\infty}(A) = \frac{\|A\|_{\infty} \cdot \|A\|_1}{|\det(A)|} = \frac{(1 + |a|)^2}{|2a + 1|}.$$

(c)  $\det(A) = 8 \Leftarrow$  a determináns nem nulla, tehát a mátrix invertálható

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -7 & -13 & 8 \\ 9 & 11 & -8 \\ 10 & 14 & -8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\frac{7}{8} & \frac{9}{8} & \frac{10}{8} \\ -\frac{13}{8} & \frac{11}{8} & \frac{14}{8} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_{\infty} = 9, \|A^{-1}\|_{\infty} = \frac{38}{8}$$

$$\text{cond}_{\infty}(A) = \|A\|_{\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{\infty} = \frac{342}{8} = 42\frac{3}{4}$$

10. Az első esetben  $x_1 = 2, x_2 = 0$ , a második esetben  $x_1 = 1, x_2 = 1$ , tehát a jobboldalon egy  $10^{-4}$  nagyságrendű változás a megoldásban 1 nagyságrendű változást okozott.



11. Először belátjuk, hogy ha a reguláris  $A$  mátrixnak  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sajátértéke, akkor  $A^{-1}$ -nek  $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$  sajátértéke.  
Legyen  $\lambda$  az  $A$  sajátértéke,  $v \neq 0$  a hozzá tartozó sajátvektor. Ekkor

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v, \\ A^{-1} \cdot A \cdot v &= \lambda \cdot A^{-1} \cdot v. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy egy reguláris mátrixnak a 0 nem sajátértéke az előző egyenlőtlenséget oszthatjuk  $\lambda$ -val:  $\frac{1}{\lambda} \cdot v = A^{-1} \cdot v$ .

Így látható, hogy  $A^{-1}$ -nek  $\frac{1}{\lambda}$  sajátértéke.

Visszatérve a feladatban megfogalmazott állítás bizonyítására, a 8. feladat állítása szerint  $|\lambda_{\max}| \leq \|A\|$ , illetve az előbb belátott lemma alapján  $\frac{1}{|\lambda_{\min}|} \leq \|A^{-1}\|$ . Így

$$\frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A).$$

12. Könnyen ellenőrizhető, hogy  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Rátérve a második egyenletrendszer megoldására:

$$(x + \delta x) = A^{-1} \cdot (b + \delta b)$$

$$\det(A) = -0,0001, \quad A^{-1} = -\frac{1}{0,0001} \begin{pmatrix} 0,98 & -0,99 \\ -0,99 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9800 & 9900 \\ 9900 & -10000 \end{pmatrix}$$

$$(x + \delta x) = \begin{pmatrix} -9800 & 9900 \\ 9900 & -10000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,98 \\ 1,98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 198 \\ -198 \end{pmatrix}.$$

Így

$$\delta x = \begin{pmatrix} 197 \\ -199 \end{pmatrix}, \text{ azaz}$$

$$\frac{\|\delta x\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \frac{199}{1} = 199,$$

$$\frac{\|\delta b\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}} = \frac{0,01}{1,99} \approx 0,005. \text{ Látható, hogy a megoldás relatív hibája 4 nagyságrenddel}$$

nagyobb a relatív jobboldali hibájánál.

Ennek oka, hogy:

$$\text{cond}_{\infty}(A) = \|A\|_{\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{\infty} = 1,99 \cdot 19900 = 39601.$$

- 13.

$$\|A\|_{\infty} = \left| \frac{1+s^2}{s} \right| + \left| \frac{1-s^2}{s} \right| = \frac{1+s^2}{s} + \frac{1-s^2}{s} = \frac{2}{s}.$$

$$\det(A) = \frac{1}{s^2} \left( (1+s^2)^2 - (1-s^2)^2 \right) = 4, \text{ így}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4s} \begin{pmatrix} 1+s^2 & s^2-1 \\ s^2-1 & 1+s^2 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = \left| \frac{1+s^2}{4s} \right| + \left| \frac{s^2-1}{4s} \right| = \frac{1+s^2}{4s} + \frac{1-s^2}{4s} = \frac{1}{2s}, \text{ így } \text{cond}_{\infty}(A) = \frac{1}{s^2}.$$

Látható, hogy amíg a determináns értéke  $s$ -től függetlenül állandó, addig a kondíciós szám függ az  $s$  értékétől. Ha  $s$  közel van 0-hoz, akkor ez tetszőlegesen nagy lehet.

14. Használjuk ki, hogy az előző feladatban meghatároztuk  $A^{-1}$ -et!

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b = \frac{1}{4s} \begin{pmatrix} 1+s^2 & s^2-1 \\ s^2-1 & 1+s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4s} \begin{pmatrix} 2s^2 \\ 2s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s}{2} \\ \frac{s}{2} \end{pmatrix}.$$

Hibával terhelt jobboldal esetén

$$\begin{aligned} A(x + \delta x) &= b + \delta b \\ Ax + A\delta x &= b + \delta b \\ A\delta x &= \delta b \\ \delta x &= A^{-1}\delta b \end{aligned}$$

Így

$$\delta x = \frac{1}{4s} \begin{pmatrix} 1+s^2 & s^2-1 \\ s^2-1 & 1+s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix} = \frac{1}{4s} \begin{pmatrix} (1+s^2)\varepsilon - (s^2-1)\varepsilon \\ (s^2-1)\varepsilon - (1+s^2)\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{2s} \\ \frac{-\varepsilon}{2s} \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\|\delta x\|_{\infty} = \frac{\varepsilon}{2s}, \quad \|x\|_{\infty} = \frac{s}{2}, \quad \text{a megoldás relatív hibája:}$$

$$\frac{\|\delta x\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \frac{\varepsilon}{s^2}$$

Észrevehetjük, hogy a jobboldal relatív hibája:  $\frac{\|\delta b\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}} = \varepsilon$ , továbbá  $\text{cond}_{\infty}(A) = \frac{1}{s^2}$ , így

$$\frac{\|\delta x\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \frac{\varepsilon}{s^2} = \text{cond}_{\infty}(A) \cdot \frac{\|\delta b\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}}.$$

Ez azt jelenti, hogy ekkor a

$$\frac{\|\delta x\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \leq \text{cond}_{\infty}(A) \cdot \frac{\|\delta b\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}}$$

egyenlőtlenség éles.

15.

$$\text{cond}(cA) = \|cA\| \|(cA)^{-1}\|$$

Mivel  $(c \cdot A)^{-1} = \frac{1}{c} \cdot A^{-1}$ , így

$$\text{cond}(cA) = |c| \cdot \|A\| \cdot \frac{1}{|c|} \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A),$$

azaz egy mátrix kondíciószáma nem változik ha egy 0-tól különböző számmal szorozzuk a mátrixot.

Ugyanakkor  $\det(cA) = c^n \cdot \det(A)$ , így látható, hogy a kondíciószám nem függ a mátrix determinánsától.

### 3.3 Lineáris egyenletrendszerek megoldása, mátrixok felbontása

1. Amilyen elemi átalakításokkal kapjuk az  $A$  mátrixból az  $E$ -t, ugyanolyan elemi átalakításokkal kapjuk az  $E$ -ből az  $A$  mátrix inverzét.

Az  $A$  mátrix inverze:

$$\begin{aligned}
 (A|E) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\
 &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array} \right) \sim \\
 &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array} \right),
 \end{aligned}$$

tehát az  $A$  mátrix inverze:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

A  $B$  mátrix inverze:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{8} & \frac{9}{8} & \frac{5}{4} \\ -\frac{13}{8} & \frac{11}{8} & \frac{7}{4} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

A  $C$  mátrix inverze:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{11}{20} & \frac{3}{20} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{20} & -\frac{1}{20} \end{pmatrix}$$

A  $D$  mátrix inverze:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

2. Az  $A$  mátrix LU felbontása:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A determinánsok szorzástételét felhasználva  $\det(A) = \det(L)\det(U) = \det(U) = 4$

Mivel  $A=LU$ , ezért az  $Ax=b$  egyenletrendszert  $LUx=b$  alakban is felírhatjuk. Bevezetve az  $y:=Ux$  jelölést, előbb az

$Ly=b$  majd az

$Ux=y$  egyenletrendszert kell megoldanunk.

1.  $Ly=b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$y_1=3, y_2=4, y_3=-2$$

2.  $Ux=y$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

megoldásvektor:

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

A  $B$  mátrix LU felbontása:

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ -2 & -7 & 3 \\ 2 & 12 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 10 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A determinánsok szorzástételét felhasználva  $\det(B) = \det(L)\det(U) = \det(U) = 1 \cdot 0 = 0$  azaz a  $B$  mátrix szinguláris.

1. Az  $Ly=b$  egyenletrendszer megoldása:

$$y_1 = -2, y_2 = 7, y_3 = 0$$

2.  $Ux=y$

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az  $Ux=y$  lineáris egyenletrendszer 3. egyenletét minden  $x \in \mathbb{R}^3$  vektor teljesíti, így az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Legyen  $x_3=t$ , ahol  $t \in \mathbb{R}$  tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned} -5x_2 + 2t &= 7 \implies x_2 = \frac{7-2t}{-5} \\ -4x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -2 \implies x_1 = \frac{19+t}{10} \end{aligned}$$

megoldásvektor:

$$\begin{pmatrix} \frac{19+t}{10} \\ \frac{7-2t}{-5} \\ t \end{pmatrix}.$$

A  $C$  mátrix LU felbontása:

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 1 \\ 9 & 5 & -4 & 1 \\ -6 & -9 & 16 & 17 \\ 3 & 4 & -8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 12 & 15 \\ 0 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\det(C) = -6$$

1. Az  $Ly=b$  egyenletrendszer megoldása:

$$y_1 = -13, y_2 = 3, y_3 = -14, y_4 = -2$$

2. Az  $Ux=y$  egyenletrendszert megoldva a megoldás:

$$x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = -2, x_4 = 2.$$

A  $D$  mátrix LU felbontása:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -4 & -5 & -3 \\ -2 & -5 & a-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & a-6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}$$

$$\det(D) = -2a-6$$

$$1. Ly=b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5-2a \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 4, y_2 = 5, y_3 = -2(a+3)$$

$$2. Ux=y$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2(a+3) \end{pmatrix}$$

megoldásvektor  $a \neq -3$  esetén:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ha azonban  $a=-3$ , akkor az egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ennek végtelen sok megoldása van, ugyanis az  $Ux=y$  lineáris egyenletrendszer 3. egyenletét minden  $x \in \mathbb{R}^3$  vektor teljesíti. Legyen  $x_3=t$ , ahol  $t \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

Ekkor

$$-x_2 - 3t = 5 \implies x_2 = -5 - 3t$$

$$2x_1 + 2x_2 = 4 \implies x_1 = 7 + 3t$$

megoldásvektor:

$$\begin{pmatrix} 7+3t \\ -5-3t \\ t \end{pmatrix}.$$

Az  $E$  mátrix LU felbontása:

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\det(E)=12$$

1. Az  $Ly=b$  egyenletrendszer megoldása:

$$y_1 = 0, y_2 = -8, y_3 = -4$$

2. Az  $Ux=y$  egyenletrendszert megoldva a megoldásvektor:

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Az  $F$  mátrix LU felbontása:

$$\begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\det(F)=0$$

1.  $Ly=b$  egyenletrendszer megoldása:

$$y_1 = -2, y_2=1, y_3=2$$

2.  $Ux=y$  egyenletrendszer

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ami ellentmondásos.

A  $G$  mátrix LU felbontása:



$$\begin{aligned}
G &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \\ -4 & 8 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\det(G) = 48$$

1. Az  $Ly=b$  egyenletrendszer megoldása:

$$y_1=5, y_2=6, y_3=5, y_4=6$$

2. Az  $Ux=y$  egyenletrendszer megoldása:

$$x_1 = -2, x_2 = -1, x_3=2, x_4 = 3$$

A  $H$  mátrix LU felbontása:

$$\begin{aligned}
H &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -6 & -5 & 3 \\ -4 & 18 & 3 & 2 \\ -3 & 8 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 10 & -13 & 14 \\ 0 & 2 & -5 & 7 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\det(H)=12$$

1. Az  $Ly=b$  egyenletrendszer megoldása:

$$y_1 = 21, y_2 = 1, y_3 = 4, y_4 = -6$$

2. Az  $Ux=y$  egyenletrendszer megoldása:

$$x_1 = -3, x_2 = 4, x_3 = 1, x_4 = -2$$

Az  $I$  mátrix LU felbontása:

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & -5 & 6 & -3 \\ -4 & 5 & 8 & -5 \\ 2 & 6 & -22 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & -18 & 13 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\det(I)=48$$

1. Az  $Ly=b$  egyenletrendszer megoldása:

$$y_1=14, y_2 = -8, y_3=4, y_4 = -6$$

2. Az  $Ux=y$  egyenletrendszer megoldása:

$$x_1 = -1, x_2 = 4, x_3 = 0, x_4 = -2$$

3. Mivel  $a_{11} = 0$ , ezért sorcserét kell végre hajtani. A

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

permutációs mátrixszal balról szorozva egy mátrixot, annak első és második sora felcserélődik. Így

$$A = P_1 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & -28 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

és erre a legutóbbi mátrixra már végrehajtható az LU felbontás első lépése.

$$A = P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 14 & -28 & -7 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 14 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -63 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

A legutolsó mátrixban a főelem ( az  $a_{33}$  elem) 0, így újra sorcserére van szükség. A

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixszal

$$A = P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 14 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} P_2 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -63 \end{pmatrix} =: P_1 \tilde{L} P_2 U$$

Mivel

$$\tilde{L} P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 14 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 14 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: P_2 L$$

ezért

$$A = P_1 P_2 L U =: PLU$$

ahol

$$P = P_1 P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Az determinánsok szorzástételét felhasználva  $\det(A) = \det(P) \det(L) \det(U) = 315$

B mátrix PLU felbontása:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

$$\det(B)=-33$$

C mátrix PLU felbontása:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -24 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -24 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{3} \end{pmatrix}$$

$$\det(C)=-13$$

D mátrix PLU felbontása:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(D)=-25$$

E mátrix PLU felbontása:

$$E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(E)=0$$

F mátrix PLU felbontása:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{7} & \frac{11}{28} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(F)=0$$

4. balról szorozva

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & \dots & d_1 a_{1n} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & \dots & d_2 a_{2n} \\ \vdots & & & \\ d_n a_{n1} & d_n a_{n2} & \dots & d_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

jobbról szorozva

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_2 a_{12} & \dots & d_n a_{1n} \\ d_1 a_{21} & d_2 a_{22} & \dots & d_n a_{2n} \\ \vdots & & & \\ d_1 a_{n1} & d_2 a_{n2} & \dots & d_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

5. Az  $A$  mátrix  $LDL^T$  felbontása:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 4 & -8 & 2 \\ -8 & 12 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Az  $B$  mátrix  $LDL^T$  felbontása:

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -7 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Az  $C$  mátrix  $LDL^T$  felbontása:

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 11 & -2 \\ 2 & -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A D mátrix  $LDL^T$  felbontása:

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 7 \\ -2 & -2 & 1 & -8 \\ -1 & 7 & -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 5 & -6 \\ 0 & 6 & -6 & 7 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -11 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

6. Az  $A$  mátrix Cholesky-felbontása:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \\ -6 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

A determinánsok szorzástételét felhasználva  $\det(A)=\det(L)\det(U)=\det(U)=36$

A  $B$  mátrix Cholesky-felbontása:

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{pmatrix} 3 & -9 & 9 \\ -9 & 29 & -31 \\ 9 & -31 & 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 & 9 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 & 9 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -3\sqrt{3} & \sqrt{2} & 0 \\ 3\sqrt{3} & -2\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -3\sqrt{3} & 3\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\det(B)=12$$

A  $C$  mátrix Cholesky-felbontása:

$$\begin{aligned}
 C &= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -4 & 9 & -13 \\ 6 & -13 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 3\sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\det(C)=4$$

A  $D$  mátrix Cholesky-felbontása:

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{pmatrix} 9 & -3 & 9 \\ -3 & 17 & -7 \\ 9 & -7 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -3 & 9 \\ 0 & 16 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -3 & 9 \\ 0 & 16 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\det(D)=0$$



Az  $E$  mátrix Cholesky-felbontása:

$$\begin{aligned}
 E &= \begin{pmatrix} 16 & -8 & 12 & -4 \\ -8 & 13 & -3 & 2 \\ 12 & -3 & 14 & -11 \\ -4 & 2 & -11 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & -8 & 12 & -4 \\ 0 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 20 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & -8 & 12 & -4 \\ 0 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 20 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & -8 & 12 & -4 \\ 0 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\det(E)=2304$$

Az  $F$  mátrix Cholesky-felbontása:

$$\begin{aligned}
 F &= \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & a^2 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & a^2 + 9 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\det(F)=4a^2$$

P1. Számítógéppel (dupla pontosságú számítás mellett) kiszámolva az első egyenletrendszer megoldására a következőt kapjuk:  $x_1 = 0, x_2 = 1$ . Ugyanakkor a második egyenletrendszer esetén  $x_1 = 1, x_2 = 1$  adódik.

Azt látjuk tehát, hogy két matematikailag ekvivalens egyenletrendszer esetén lényegesen különböző megoldásokat kaptunk a gépi megoldás során. Egyik megoldás sem pontos, de látható, hogy a második megoldás közelebb van a valódi megoldáshoz. A jelenség magyarázata az, hogy a kerekítési hibákból adódó pontatlanságok nagy hibákat okozhatnak osztás során, ha a nevező abszolút értékben kicsi. Az előző esetben pontosan ez a helyzet (hiszen a megoldás során az  $a_{11} = 10^{-17}$  elemmel osztunk). Az ilyen hibák elkerülése érdekében használjuk a főelemválasztást.

### 3.4 Legkisebb négyzetek módszere

1. (a)

A modell:  $F(t)=a+bt$ , a mérési adatok száma  $m=4$ . A modell paramétereit az

$$\begin{pmatrix} m & \sum_{i=1}^m t_i \\ \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m f_i \\ \sum_{i=1}^m t_i f_i \end{pmatrix}$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk. Behelyettesítve a megadott értékeket:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{13}{6} \end{pmatrix}.$$

A mátrix determinánsa 20, így a lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható (ez már az adatokból is leolvasható, mivel legalább 2 különböző  $t_i$  érték adott).

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{13}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{12} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Így az illesztett modell:  $F(t)=-\frac{5}{12}+\frac{1}{2}t$ .

(b)

A modell:  $F(t)=a+bt$  a mérések száma  $m=5$ . Mivel a  $t_i$  értékek között van legalább 2 különböző, ezért a feladat egyértelműen megoldható.

A megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

A mátrix determinánsa 64, így

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{1}{64} \begin{pmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{32} \\ -\frac{33}{128} \end{pmatrix}$$

az illesztett modell:  $F(t)=-\frac{13}{32}-\frac{33}{128}t$ .

(c)

A modell továbbra is:  $F(t)=a+bt$  de a mérések száma 6 így az  $m=6$ . Mivel itt is van

legalább 2 különböző  $t_i$  érték így a feladat egyértelműen megoldható.  
A megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} 6 & \frac{21}{2} \\ \frac{21}{2} & \frac{91}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ \frac{203}{8} \end{pmatrix}.$$

A mátrix determinánsa  $\frac{105}{4}$  így

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{4}{105} \begin{pmatrix} \frac{91}{4} & -\frac{21}{2} \\ -\frac{21}{2} & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ \frac{203}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

az illesztett modell:  $F(t) = \frac{1}{4} + t$ .

(d)

A megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 4 \end{pmatrix}.$$

A mátrix determinánsa 50, így

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{10} \\ -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

az illesztett modell:  $F(t) = \frac{13}{10} - \frac{3}{10}t$ .

2. (a)

A modell amivel közelítünk az  $F(t) = c_1 + c_2t + c_3t^2$  alakú. Az ismeretlen  $c_1, c_2, c_3$  paramétereket az  $A^T A = A^T f$  Gaus- féle normálegyenlet megoldásával kapjuk, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \\ 1 & t_4 & t_4^2 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}.$$

Ebből

$$A^T A = \begin{pmatrix} m & \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 \\ \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 & \sum_{i=1}^m t_i^3 \\ \sum_{i=1}^m t_i^2 & \sum_{i=1}^m t_i^3 & \sum_{i=1}^m t_i^4 \end{pmatrix}; \quad A^T f = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m f_i \\ \sum_{i=1}^m t_i \cdot f_i \\ \sum_{i=1}^m t_i^2 \cdot f_i \end{pmatrix}$$

az adatokat behelyettesítve:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

Ennek megoldása:  $c_1 = \frac{37}{40}$ ,  $c_2 = \frac{51}{40}$ ,  $c_3 = -\frac{25}{40}$

így az illesztett modell:  $F(t) = \frac{37}{40} + \frac{51}{40}t - \frac{25}{40}t^2$ .

(b)

A modell amivel közelítünk az  $F(t) = c_1 + c_2t + c_3t^2$  alakú. Az ismeretlen  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  paramétereket a

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 9 \\ 7 & 9 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

egyenlet megoldásával kapjuk.

Ennek megoldása:  $c_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $c_2 = -\frac{3}{4}$ ,  $c_3 = \frac{3}{4}$

így az illesztett modell:  $F(t) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}t + \frac{3}{4}t^2$ .

3. Mivel az alappontok között csak 2 különböző érték szerepel elsőfokú polinommal érdemes közelíteni (magasabb fokszámú polinom esetén a megoldandó lineáris egyenletrendszer szinguláris lesz, a feladatnak végtelen sok megoldása lesz).

A modell :  $F(t) = a + bt$ , a mérési adatok száma pedig  $m=5$ . A modell paramétereit az

$$\begin{pmatrix} m & \sum_{i=1}^m t_i \\ \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m f_i \\ \sum_{i=1}^m t_i f_i \end{pmatrix}$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk. Behelyettesítve a megadott értékeket:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.1 \\ 1.2 \end{pmatrix}.$$

A mátrix determinánsa 54, így a lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.1 \\ 1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{61}{60} \\ \frac{1}{60} \end{pmatrix}.$$

Így az illesztett modell:  $F(t) = \frac{61}{60} + \frac{1}{60}t$ .

4. Itt is a Gauss-féle normálegyenletet kell megoldani ami a következő  $A^T A x = A^T f$   
Az  $A$  matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\pi t_1) & \sin(\pi t_1) \\ 1 & \cos(\pi t_2) & \sin(\pi t_2) \\ 1 & \cos(\pi t_3) & \sin(\pi t_3) \\ 1 & \cos(\pi t_4) & \sin(\pi t_4) \\ 1 & \cos(\pi t_5) & \sin(\pi t_5) \\ 1 & \cos(\pi t_6) & \sin(\pi t_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kiszámoljuk az  $A^T A$  és  $A^T f$  mátrixokat:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{4} \\ \frac{19}{4} \\ -3 \end{pmatrix}.$$

az adatokat behelyettesítve:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{4} \\ \frac{19}{4} \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ennek megoldása:  $c_1 = -\frac{277}{32}$ ,  $c_2 = \frac{181}{96}$ ,  $c_3 = -\frac{67}{96}$

Így az illesztett modell:  $F(t) = -\frac{277}{32} + \frac{181}{96} \cos(\pi t_1) - \frac{67}{96} \sin(\pi t_1)$ .

Ha a második táblázat adatait közelítjük:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Mivel  $\det(A^T A) = 0$ , ezért a lineáris egyenletrendszer megoldása nem egyértelmű. Ez már abból is látható, hogy az  $A$  mátrix oszlopvektorai nem lineárisan függetlenek.

5. A modell:  $F(t) = a + bt$ , a mérési adatok száma  $m=10$ .

Az illesztett model:  $F(t) = 1.52654036 + 0.49132304 t$

6. A modell:  $F(t) = a + \frac{b}{t}$ , a mérési adatok száma  $m=10$ .

Az illesztett model:  $F(t) = 1.98808127 + \frac{3.02737220}{t}$

7. A modell:  $F(t) = a + b \cdot \cos(\pi t) + c \cdot \sin(\pi t)$ , a mérési adatok száma  $m=13$ .

Az illesztett model:  $F(t) = 1.19946872 + 0.71225610 \cos(\pi t) + 0.97947590 \sin(\pi t)$

### 3.5 Sajátérték feladatok

1. (a)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

A sajátértékek meghatározásához írjuk fel az  $A$  mátrix karakterisztikus polinomját!

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 3 \\ -4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda) \cdot (5 - \lambda) - (-12) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1.$$

A  $\lambda = 2$  sajátértékhez tartozó sajátvektort az

$$(A - 2 \cdot E)v = 0$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk.

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

így

$$v = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \end{pmatrix}.$$

A  $\lambda = 1$  sajátértékhez tartozó sajátvektort az

$$(A - 1 \cdot E)v = 0$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk.

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

így

$$v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$



(b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A mátrix karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Ennek gyökei:

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4}{2}, \quad \lambda = 2.$$

A mátrixnak egy kétszeres multiplicitású valós sajátértéke van.

A  $\lambda = 2$  sajátértékhez tartozó sajátvektort az

$$(A - 2 \cdot E)v = 0$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

így

$$v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

Ennek gyökei

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i, \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm i$$

A mátrix sajátértékei komplexek.

A  $\lambda = 1 + i$  sajátértékhez tartozó sajátvektort az

$$(A - (1 + i) \cdot E)v = 0$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk.

$$\begin{pmatrix} -2 - i & -5 \\ 1 & 2 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

így

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{5}(i+2) \end{pmatrix}.$$

A  $\lambda = 1 - i$  sajátértékhez tartozó sajátvektort az

$$(A - (1 - i) \cdot E)v = 0$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk.

$$\begin{pmatrix} -2+i & -5 \\ 1 & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

így

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{5}(2-i) \end{pmatrix}.$$

2. Induljunk ki az  $Av = \lambda v$  egyenletből, majd vegyük mindkét oldal normáját!

$$\|A\| \cdot \|v\| \geq \|Av\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$$

Ebből  $v \neq 0$  miatt következik, hogy

$$\|A\| \geq |\lambda|.$$

3. Ha  $A$ -nak a 0 sajátértéke, akkor  $\det(A - 0E) = 0$ , tehát  $\det(A) = 0$ , azaz  $A$  szinguláris. Ha  $A$  szinguláris akkor  $\det(A) = 0$ , azaz a  $\lambda = 0$  megoldja a  $\det(A - \lambda E) = 0$  egyenletet, tehát  $A$ -nak a 0 sajátértéke.

4. Legyen  $v \neq 0$  a  $\lambda$  sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v.$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát balról  $A^{-1}$ -gyel:

$$v = \lambda \cdot A^{-1} \cdot v.$$

Az  $A$  mátrix reguláris, így  $\lambda \neq 0$ .

$$\frac{1}{\lambda} \cdot v = A^{-1} \cdot v,$$

azaz az  $A^{-1}$  mátrixnak  $\frac{1}{\lambda}$  sajátértéke, a hozzá tartozó sajátvektor  $v$ .

5. Legyen  $v \neq 0$  a  $\lambda$  sajátértékhez tartozó sajátvektor.

$$\begin{aligned} A \cdot v &= \lambda \cdot v & / \cdot A \\ A^2 \cdot v &= \lambda \cdot A \cdot v \\ A^2 \cdot v &= \lambda \cdot (\lambda \cdot v) \\ A^2 \cdot v &= \lambda^2 \cdot v, \end{aligned}$$

azaz  $\lambda^2$  az  $A^2$  mátrix sajátértéke, a hozzátartozó sajátvektor  $v$ .

6. Legyen  $v \neq 0$  az  $A$  mátrix  $\lambda$  sajátértékéhez tartozó sajátvektor.

$$\begin{aligned} A \cdot v &= \lambda \cdot v & / - cE \cdot v \\ (A - cE) \cdot v &= (\lambda - c) \cdot v, \end{aligned}$$

tehát  $\lambda - c$  sajátértéke az  $A - cE$  mátrixnak,  $v$  pedig a  $\lambda - c$  sajátértékhez tartozó sajátvektor.

7. Ha egy mátrix domináns főátlójú, akkor a főátlóban álló elemek nagyobbak, mint a velük egy sorban lévő elemek abszolútértékeinek összegei.

Ez alapján a Gersgorin körök uniójában nincs benne a 0, tehát az nem sajátértéke a mátrixnak, így a mátrix reguláris.

8. (a) A mátrix sajátértékei a

4 középpontú és 4 sugarú,

−3 középpontú és 2 sugarú,

−7 középpontú és 1 sugarú körök uniójában helyezkednek el.

A 0 beleesik a 4 középpontú körbe, így lehet, hogy a mátrix nem invertálható.

A körök nem metszik egymást, így minden körben pontosan 1 darab sajátérték található, amelyek valósak.

(b) A mátrix sajátértékei a

4 középpontú és 3 sugarú,

3 középpontú és 2 sugarú,

7 középpontú és 3 sugarú körök uniójában helyezkednek el.

A 0 nem tartozik egyik körhöz sem, tehát a mátrix invertálható. Mind három kör metszi egymást, így a 3 sajátérték ezek uniójában bárhol lehet. Mivel a mátrix szimmetrikus, így sajátértékei biztosan valósak, a Gersgorin körök elhelyezkedéséből következően pedig pozitívak. A mátrix így pozitív definit.

- (c) A mátrix sajátértékei a  
 4 középpontú és 5 sugarú,  
 −5 középpontú és 2 sugarú,  
 −11 középpontú és 2 sugarú körök uniójában helyezkednek el.

A 0 beleesik a 4 középpontú körbe, így lehet, hogy a mátrix nem invertálható.  
 A körök nem metszik egymást, így minden körben pontosan 1 darab sajátérték található, amelyek valósak.

9. A mátrix sajátértékei a  
 8 középpontú és 6 sugarú,  
 5 középpontú és 3 sugarú,  
 −3 középpontú és 2 sugarú,  
 7 középpontú és 4 sugarú,  
 −4 középpontú és 3 sugarú körök uniójában helyezkednek el.

A 0 nem tartozik egyik körhöz sem, tehát  $A$  mátrix reguláris. A −3 és −4 középpontú körök uniójában 2, a 8 az 5 és a 7 középpontú körök uniójában pedig 3 darab sajátérték található.

10. Ha adott az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix és a  $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$  vektor, akkor a  $J(\lambda) = \|A \cdot v - \lambda \cdot v\|_2^2$  függvény minimumhelye

$$\lambda = \frac{\langle Av, v \rangle}{\langle v, v \rangle}.$$

Ezt a hányadost nevezzük Rayleigh hányadosnak.

Esetünkben:

$$\lambda = \frac{\langle Av, v \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{(-3) \cdot (-13) + 7 \cdot 27 + 2 \cdot 6 + 5 \cdot 20 + 1 \cdot 4}{(-3)^2 + 7^2 + 2^2 + 5^2 + 1^2} = \frac{43}{11},$$

így  $\lambda = \frac{43}{11}$  esetén lesz minimális az  $Av - \lambda v$  euklideszi normája.

$$11. \quad v = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad Av = \begin{pmatrix} -15 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix},$$

$$\lambda = \frac{\langle Av, v \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{(-5) \cdot (-15) + 4 \cdot 12}{(-5)^2 + 4^2} = 3,$$

így a minimumhely  $\lambda = 3$ .

$$A - 3E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\det(A - 3E) = 0$ , tehát a 3 sajátértéke az  $A$  mátrixnak.

12. (a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \epsilon = 0.01.$$

Az  $y^{(0)}$ -t tetszőlegesen választjuk ki, innentől kezdve ez érvényes az alábbi feladatokra is!

$$y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Ay^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda^0 = \frac{\langle Ay^{(0)}, y^{(0)} \rangle}{\langle y^{(0)}, y^{(0)} \rangle} = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{1^2 + 0^2} = 2$$

$$y^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Ay^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \lambda^1 = \frac{\langle Ay^{(1)}, y^{(1)} \rangle}{\langle y^{(1)}, y^{(1)} \rangle} = \frac{10}{5} = 2$$

Mivel a sajátérték két egymást követő közelítőértéke megegyezik, az iterációt abbahagyjuk. Könnyen ellenőrizhető, hogy annak ellenére, hogy az iteráció leállási feltétele teljesül (tetszőleges  $\epsilon$  esetén),  $\lambda = 2$  nem sajátértéke a mátrixnak. A jelenség oka, hogy a mátrix sajátértékei komplexek ( $2 \pm i$ ).

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \epsilon = 0,001.$$

Az  $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  vektorból indítva az iterációt

K	$\lambda^K$
1	4,428571
2	4,565836
3	4,708517
4	4,820636
5	4,892743
6	4,936241
7	4,962060
8	4,977372
9	4,986477
10	4,991906

$K = 10$  esetén teljesül a leállási feltétel.

A  $\lambda^{(10)}$ -hez tartozó sajátvektor közelítés:

$$y^{(10)} = \begin{pmatrix} 0,005678 \\ 0,707095 \\ 0,707095 \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\|Ay^{(10)} - \lambda^{(10)} \cdot y^{(10)}\|_2^2 \leq \epsilon,$$

ezért az iteráció sikeres.

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \epsilon = 0,001.$$

Az  $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  vektorból indítva az iterációt

K	$\lambda^K$
1	3,333333
2	3,411765
3	3,414141

$K = 3$  esetén teljesül a leállási feltétel.

A  $\lambda^{(3)}$ -hoz tartozó sajátvektor közelítés:

$$y^{(3)} = \begin{pmatrix} -0,497468 \\ 0,710669 \\ -0,497468 \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\|Ay^{(3)} - \lambda^3 \cdot y^{(3)}\|_2^2 \leq \epsilon,$$

ezért az iteráció sikeres.

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \epsilon = 0,001.$$

Az  $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  vektorból indítva az iterációt

K	$\lambda^K$
1	-0,714286
2	-1,647059
3	-0,767123
.	.
.	.
.	.
.	.
17	2,997504
18	3,001397

$K = 18$  esetén teljesül a leállási feltétel.

A  $\lambda^{(18)}$ -hoz tartozó sajátvektor közelítés:

$$y^{(18)} = \begin{pmatrix} 0,580383 \\ 0,577778 \\ 0,573871 \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\|Ay^{(18)} - \lambda^{18} \cdot y^{(18)}\|_2^2 \leq \epsilon,$$

ezért az iteráció sikeres.

(e)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \epsilon = 0,001.$$

Az  $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  vektorból indítva az iterációt

K	$\lambda^K$
1	3,666666
2	3,976744
3	3,998536
4	3,999908

$K = 4$  esetén teljesül a leállási feltétel.

A  $\lambda^{(4)}$ -hez tartozó sajátvektor közelítés:

$$y^{(4)} = \begin{pmatrix} -0,575086 \\ 0,581852 \\ -0,575086 \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\|Ay^{(4)} - \lambda^4 \cdot y^{(4)}\|_2^2 \leq \epsilon,$$

ezért az iteráció sikeres.

(f)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon = 0,001.$$

Az  $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  vektorból indítva az iterációt

K	$\lambda^K$
1	3,777777
2	4,060606
3	3,956204
4	4,018622
5	3,989857
6	4,004856
7	3,997516
8	4,001229

$K = 8$  esetén teljesül a leállási feltétel.

A  $\lambda^{(8)}$ -hoz tartozó sajátvektor közelítés:

$$y^{(8)} = \begin{pmatrix} 0,161621 \\ 0,973528 \\ 0,161621 \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\|Ay^{(8)} - \lambda^8 \cdot y^{(8)}\|_2^2 \leq \epsilon,$$

ezért az iteráció sikeres.

(g)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \epsilon = 0,001.$$

$$\text{Az } y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vektorból indítva az iterációt}$$

K	$\lambda^K$
1	5
2	5,193370
3	5,151964
4	5,092132
5	5,049725
6	5,024130
7	5,009953
8	5,002709
9	4,999389

$K = 9$  esetén teljesül a leállási feltétel.

A  $\lambda^{(9)}$ -hez tartozó sajátvektor közelítés:

$$y^{(9)} = \begin{pmatrix} 0,156041 \\ -0,486969 \\ -0,322878 \\ -0,796406 \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\|Ay^{(9)} - \lambda^9 \cdot y^{(9)}\|_2^2 \leq \epsilon,$$

nem teljesül ezért az iteráció sikertelen. Az iteráció más kezdővektorokból indítva sem lesz sikeres, aminek az az oka, hogy a mátrix sajátértékei komplexek.



(h)

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -2 & -2 \\ 15 & 1 & 7 \\ 21 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \epsilon = 0,001.$$

Az  $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  vektorból indítva az iterációt

K	$\lambda^K$
1	-7,428571
2	-4,204082
3	-5,840173
4	-5,916457
5	-5,592783
6	-5,681270
7	-5,710750
8	-5,686712
9	-5,688746

$K = 9$  esetén teljesül a leállási feltétel.

A  $\lambda^{(9)}$ -hez tartozó sajátvektor közelítés:

$$y^{(9)} = \begin{pmatrix} -0,464045 \\ 0,122739 \\ 0,877267 \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\|Ay^{(9)} - \lambda^9 \cdot y^{(9)}\|_2^2 \leq \epsilon,$$

ezért az iteráció sikeres.

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \epsilon = 0,001.$$

Az  $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  vektorból indítva az iterációt

K	$\lambda^K$
1	-2
2	-2

Mivel a sajátérték két egymás követő közelítőértéke megegyezik, az iterációt abbahagyjuk.

Mivel  $\lambda = -2$  esetén az  $A \cdot v = \lambda \cdot v$  egyenlet teljesül, ezért  $\lambda$  sajátértéke a mátrixnak.

### 3.6 Lagrange interpoláció

1. (a)  $(-3, -6), (-2, -17), (-1, -8), (1, -2), (2, 19)$

Készítsük el az osztott differenciák táblázatát:

-3	-6				
		$\frac{(-17)-(-6)}{(-2)-(-3)} = -11$			
-2	-17		$\frac{9-(-11)}{(-1)-(-3)} = 10$		
		$\frac{(-8)-(-17)}{(-1)-(-2)} = 9$		$\frac{(-2)-10}{1-(-3)} = -3$	
-1	-8		$\frac{3-9}{1-(-2)} = -2$		$\frac{2-(-3)}{2-(-3)} = 1$
		$\frac{(-2)-(-8)}{1-(-1)} = 3$		$\frac{6-(-2)}{2-(-2)} = 2$	
1	-2		$\frac{21-3}{2-(-1)} = 6$		
		$\frac{19-(-2)}{2-1} = 21$			
2	19				

Az illesztett polinom:

$$N_4(x) = -6 - 11 \cdot (x+3) + 10 \cdot (x+3) \cdot (x+2) - 3 \cdot (x+3) \cdot (x+2) \cdot (x+1) + (x+3) \cdot (x+2) \cdot (x+1) \cdot (x-1) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 3.$$

- (b)  $(-3, -31), (-2, -8), (1, 1), (2, 22)$

A differenciátáblázat:

-3	-31			
		23		
-2	-8		-5	
		3	$\frac{19}{10}$	
1	1		$\frac{9}{2}$	
		21		
2	22			

Az illesztett polinom:

$$N_3(x) = -31 + 23 \cdot (x+3) - 5 \cdot (x+3) \cdot (x+2) + \frac{19}{10} \cdot (x+3) \cdot (x+2) \cdot (x-1) = \frac{19}{10}x^3 + \frac{153}{5}x^2 + \frac{1169}{10}x + \frac{478}{5} = -\frac{17}{5} - \frac{1}{10}x + \frac{13}{5}x^2 + \frac{19}{10}x^3.$$

(c)  $(-2, -13), (-1, -4), (1, 2)$

A differenciátáblázat:

-2	-13		
		9	
-1	-4		-2
		3	
1	2		

Az illesztett polinom:

$$N_2(x) = -13 + 9 \cdot (x+2) - 2 \cdot (x+2) \cdot (x+1) = -2x^2 + 3x + 1.$$

(d)  $(-2, -5), (-1, 3), (0, 1), (2, 15)$

A differenciátáblázat:

-2	-5		
		8	
-1	3		-5
		-2	2
0	1		3
		7	
2	15		

Az illesztett polinom:

$$N_3(x) = -5 + 8 \cdot (x+2) - 5 \cdot (x+2) \cdot (x+1) + 2 \cdot (x+2) \cdot (x+1) \cdot x = 2x^3 + x^2 - 3x + 1.$$

(e)  $(-1, 4), (1, 2), (2, 10), (3, 40)$

A differenciátáblázat:

-1	4		
		-1	
1	2		3
		8	2
2	10		11
		30	
3	40		

Az illesztett polinom:

$$N_3(x) = 4 - 1 \cdot (x+1) + 3 \cdot (x+1) \cdot (x-1) + 2 \cdot (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-2) = 2x^3 - x^2 - 3x + 4.$$

(f)  $(-2, 38), (-1, 5), (1, -1), (2, -10), (3, -7)$

A differenciátáblázat:

-2	38				
		-33			
-1	5		10		
		-3		-3	
1	-1		-2		1
		-9		2	
2	-10		6		
		3			
3	-7				

Az illesztett polinom:

$$N_4(x) = 38 - 33 \cdot (x + 2) + 10 \cdot (x + 2) \cdot (x + 1) - 3 \cdot (x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) + (x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2).$$

2. A differenciátáblázat:

-2	-6				
		5			
0	4		-4		
		-7		1	
1	-3		0		
		-7			
2	-10				

Az első 4 pontra illeszkedő polinom:

$$\begin{aligned} N_3(x) &= -6 + 5 \cdot (x + 2) - 4 \cdot (x + 2) \cdot x + (x + 2) \cdot x \cdot (x - 1) = \\ &= x^3 - 3x^2 - 5x + 4. \end{aligned}$$

Ha azt a minimális fokszámú polinomot keressük, amely az előző pontokon kívül áthalad a  $(-1, 2)$  ponton is, akkor az előző táblázatunkat kiegészítjük az új adattal, és kiszámítjuk az utolsó "ferde" sort:

$$\begin{array}{ccccccc}
-2 & -6 & & & & & \\
& & 5 & & & & \\
0 & 4 & & -4 & & & \\
& & -7 & & 1 & & \\
1 & -3 & & 0 & & \frac{1}{2} & \\
& & -7 & & \frac{3}{2} & & \\
& & & -\frac{3}{2} & & & \\
2 & -10 & & & & & \\
& & -4 & & & & \\
-1 & 2 & & & & & 
\end{array}$$

Az 5 pontra illeszkedő polinom:

$$\begin{aligned}
N_4(x) &= N_3(x) + \frac{1}{2} \cdot (x+2) \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-2) = \\
&= \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 - 3x + 4.
\end{aligned}$$

3. Számítsuk ki a függvény értékét az  $x_1, x_2, x_3$  pontokban:

$$f(x_1) = 0; f(x_2) = 1; f(x_3) = 0.$$

Az adataink tehát:  $(-1, 0), (0, 1), (1, 0)$ .

A differenciátáblázat:

$$\begin{array}{cccc}
-1 & 0 & & \\
& & 1 & \\
0 & 1 & & -1 \\
& & -1 & \\
1 & 0 & & 
\end{array}$$

Az illesztett másodfokú polinom:

$$N_2(x) = 0 + 1 \cdot (x+1) - 1 \cdot (x+1) \cdot x = x + 1 - x^2 - x = 1 - x^2.$$

4. Egy másodfokú polinomot egyértelműen meghatároz 3 különböző helyen vett helyettesítési értéke. Ha a táblázatban szereplő értékek pontosak lennének, akkor bármelyik 3 adat ugyanazt a polinomot határozná meg. Először illesszünk az első 3 adatra polinomot:

$$\begin{array}{cccc}
-2 & 15 & & \\
& & -6 & \\
-1 & 9 & & 1 \\
& & -4 & \\
0 & 5 & & 
\end{array}$$

A differenciátáblázatból felírva az interpolációs polinomot

$$N_2(x) = 5 - 4 \cdot x + 1 \cdot x \cdot (x + 1) = x^2 - 3x + 5$$

adódik. Számítsuk ki milyen értékeket vesz fel az  $N_2$  polinom az 1, 2, 3 pontokban!  $N_2(1) = 3; N_2(2) = 3; N_2(3) = 5$ . Látható, hogy az  $x = 3$  és  $x = 5$  helyeken felvett érték megegyezik a táblázatban adott értékekkel, azaz az  $N_2$  polinom a (2, 2) pont kivételével minden pontra illeszkedik. Ebből következik, hogy az  $x = 2$  helyen megadott helyettesítési érték hibás, a helyes érték 3.

A  $p$  polinom:

$$p(x) = N_2(x) = x^2 - 3x + 5.$$

5. Ha az  $f$  függvény  $(n + 1)$ -szer folytonosan differenciálható és  $L_n(x)$  az  $(x_i, f(x_i)), i = 0, 1, \dots, n$  adatokra épülő Lagrange-polinom, akkor az interpoláció maximális hibája:

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\omega_{n+1}(x)|,$$

ahol  $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ ,  
 $M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{n+1}(x)|$ .

A maximális hiba megadáshoz először kiszámoljuk a függvény harmadik deriváltját:  
 $f'''(x) = -e^{-x}$ .

A harmadik derivált abszolútértékének maximuma az alappontok által kifeszített intervallumon:  $M_3 = 1$ .

$$\omega_3(x) = (x + 1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot x = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

A  $[-1, 0]$  intervallumban az  $\omega_3(x)$  függvénynek  $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ -nál van maximuma, a maximum értéke  $\frac{\sqrt{3}}{36}$ . Így

$$|f(x) - L_2(x)| \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{36} \approx 8,02 \cdot 10^{-3}.$$

6. Általános esetben az interpoláció maximális hibája

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\omega_{n+1}(x)|, \text{ azaz } n = 1 \text{ esetén}$$

$$|f(x) - L_1(x)| \leq \frac{M_2}{2!} \cdot |\omega_2(x)| \text{ adódik.}$$

$$\omega_2(x) = (x - a)(x - b),$$

azaz  $\omega_2(x)$  egy olyan másodfokú polinom, melynek zérushelyei  $a$  és  $b$ , a főegyütthatója pedig pozitív.

Ebből következik, hogy  $\omega_2(x)$  minimumhelye a gyökök számtani közepe:  $x = \frac{a+b}{2}$ . Felhasználva, hogy  $x \in [a, b]$  esetén

$$\begin{aligned} |\omega_2(x)| &\leq \left| \omega_2 \cdot \left( \frac{a+b}{2} \right) \right| = \left| \left( \frac{a+b}{2} - a \right) \cdot \left( \frac{a+b}{2} - b \right) \right| = \\ &= \left| \left( \frac{a+b-2a}{2} \right) \cdot \left( \frac{a+b-2b}{2} \right) \right| = \\ &= \left| \frac{b-a}{2} \cdot \frac{a-b}{2} \right| = \left| \frac{(b-a)^2}{4} \right| = \frac{(b-a)^2}{4} \end{aligned}$$

teljesül, az

$$\begin{aligned} |f(x) - L_1(x)| &\leq \frac{M_2}{2!} \cdot |\omega_2(x)| \leq \frac{M_2}{2} \cdot \frac{(b-a)^2}{4} = \\ &= \frac{M_2}{8} \cdot (b-a)^2 = \frac{M_2}{8} \cdot h^2 \end{aligned}$$

összefüggést kapjuk, ami a bizonyítandó állítás.

7. Szakaszonként lineáris interpoláció esetén a hiba a következő módon becsülhető (ld. 6. feladat):

$$|f(x) - L_1(x)| \leq \frac{M_2}{8} \cdot h^2.$$

Ha  $h$  értékét úgy határozzuk meg, hogy

$$\frac{M_2}{8} \cdot h^2 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$$

teljesüljön, akkor a hiba a megadott korlát alatt marad. Mivel  $f''(x) = -\cos(x)$ , ezért  $M_2 = \max_{x \in [0, \pi]} |f''(x)| = \max_{x \in [0, \pi]} |-\cos(x)| = 1$ .

Tehát

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \cdot h^2 &< \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \\ h^2 &< 4 \cdot 10^{-4} \\ h &< 2 \cdot 10^{-2} = 0,02. \end{aligned}$$

Ha az egyes részintervallumok hossza legfeljebb 0,02, akkor a hiba a megadott korlát alatt marad.

### 3.7 Hermite interpoláció, spline-interpoláció

1. (a) A differenciátáblázat:

-1	4						
		9					
-1	4		$\frac{1-9}{1-(-1)} = -4$				
		$\frac{6-4}{1-(-1)} = 1$		$\frac{8-(-4)}{1-(-1)} = 6$			
1	6		$\frac{17-1}{1-(-1)} = 8$		$\frac{21-6}{2-(-1)} = 5$		
		17		$\frac{71-8}{2-(-1)} = 21$		$\frac{11-5}{2-(-1)} = 2$	
1	6		$\frac{88-17}{2-1} = 71$		$\frac{54-21}{2-(-1)} = 11$		
		$\frac{94-6}{2-1} = 88$		$\frac{125-71}{2-1} = 54$			
2	94		$\frac{213-88}{2-1} = 125$				
		213					
2	94						

Az illesztett polinom:

$$H(x) = 4 + 9 \cdot (x+1) - 4 \cdot (x+1)^2 + 6 \cdot (x+1)^2(x-1) + 5 \cdot (x+1)^2(x-1)^2 + 2 \cdot (x+1)^2(x-1)^2(x-2) = 2x^5 + x^4 + 2x^3 - 3x + 4.$$

(b) A differenciátáblázat:

-2	13						
		-31					
-2	13		21				
		-10		3			
-1	3		24		-47		
		14		-44		$\frac{64}{3}$	
-1	3		-20		17		-9
		14		7		$-\frac{17}{3}$	
-1	3		-6		0		
		2		7			
1	7		8				
		18					
1	7						

Az illesztett polinom:

$$\begin{aligned} H(x) &= 13 - 31 \cdot (x+2) + 21 \cdot (x+2)^2 + 3 \cdot (x+2)^2(x+1) - 47 \cdot (x+2)^2(x+1)^2 + \\ &+ \frac{64}{3} \cdot (x+2)^2(x+1)^3 - 9 \cdot (x+2)^2(x+1)^3(x-1) = \\ &= -9x^6 - \frac{98}{3}x^5 - \frac{17}{3}x^4 + \frac{217}{3}x^3 + \frac{55}{3}x^2 - \frac{365}{3}x + 21x(x+2) - \frac{185}{3}. \end{aligned}$$



(c) A differenciátáblázat:

-1	4						
		5					
-1	4		-3				
		-1		4			
1	2		5		2		
		9		8		5	
1	2		21		17		1
		9		59		8	
1	2		80		41		
		89		100			
2	91		180				
		269					
2	91						

Az illesztett polinom:

$$\begin{aligned}
 H(x) &= 4 + 5 \cdot (x+1) - 3 \cdot (x+1)^2 + 4 \cdot (x+1)^2(x-1) + 2 \cdot (x+1)^2(x-1)^2 + \\
 &\quad + 5 \cdot (x+1)^2(x-1)^3 + (x+1)^2(x-1)^3(x-2) = \\
 &= x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 4x^2 - 3x + 1.
 \end{aligned}$$

(d) A differenciátáblázat:

-1	-1						
		2					
-1	-1		0				
		2		0			
1	3		0		2		
		2		6		1	
1	3		18		5		
		20		21			
2	23		39				
		59					
2	23						

Az illesztett polinom:

$$H(x) = -1 + 2 \cdot (x+1) + 2 \cdot (x+1)^2(x-1)^2 + (x+1)^2(x-1)^2(x-2).$$

(e) A differenciátáblázat:

-2	-10					
		-20				
-2	-10		28			
		8		-26		
-1	-2		2		16	
		10		-10		-4
-1	-2		-8		4	1
		10		2		-1
-1	-2		-4		1	
		2		4		
1	2		4			
		10				
1	2					

Az illesztett polinom:

$$H(x) = -10 - 20 \cdot (x+2) + 28 \cdot (x+2)^2 - 26 \cdot (x+2)^2(x+1) + \\ + 16 \cdot (x+2)^2(x+1)^2 - 4 \cdot (x+2)^2(x+1)^3 + (x+2)^2(x+1)^3(x-1).$$

2. Az  $x_0, f(x_0), f'(x_0)$  adatokból elkészített differenciátáblázat:

$x_0$	$f(x_0)$	
		$f'(x_0)$
$x_0$	$f(x_0)$	

Az  $f$  függvény  $x_0$ -beli érintőjének egyenlete a következő:

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

3. Helyettesítsük be a fenti függvénybe az  $x = 0$ -t. Azaz  $f(0) = \cos(0) - (0)^2 - 3 \cdot (0)$ , az eredmény  $f(0) = 1$ . A függvény első deriváltja:  $f'(x) = -\sin x - 2x - 3$ . Azaz  $f'(0) = -\sin(0) - 2 \cdot (0) - 3$ , az eredmény  $f'(0) = -3$ . Így

$$\frac{x_0}{f(x_0)} \parallel \frac{0}{1},$$

$$\frac{f'(x_0)}{f'(x_0)} \parallel -3,$$

amiből a differenciátáblázat:

0	1	
		-3
0	1	

Felírva az interpolációs polinomot a fenti függvény  $x = 0$  pontbeli érintőjének egyenletét kapjuk, ami:  $y(x) = 1 - 3x$ .

4. A differenciátáblázat:

$x_0$	$f(x_0)$						
		$f'(x_0)$					
$x_0$	$f(x_0)$		$\frac{f''(x_0)}{2}$				
		$f'(x_0)$		$\frac{f'''(x_0)}{3!}$			
$x_0$	$f(x_0)$		$\frac{f''(x_0)}{2}$		$\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}$		
		$f'(x_0)$		$\frac{f'''(x_0)}{3!}$		$\ddots$	
$x_0$	$f(x_0)$		$\frac{f''(x_0)}{2}$		$\vdots$		$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
		$f'(x_0)$		$\vdots$			
$x_0$	$f(x_0)$		$\vdots$		$\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}$		
		$\vdots$		$\frac{f'''(x_0)}{3!}$			
$\vdots$	$\vdots$		$\frac{f''(x_0)}{2}$				
$x_0$	$f(x_0)$	$f'(x_0)$					

Az illesztett polinom:

$$H(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n,$$

ami pontosan az  $f$  függvény  $x_0$  körüli  $n$ -ed fokú Taylor-polinomja.

5. Az adatok táblázatban:

$x_i$	$-1$	$1$	$3$
$H(x_i)$	$4$	$6$	$12$
$H'(x_i)$	$-3$	$13$	$9$

A  $H_1$  polinomot úgy határozzuk meg, hogy illeszkedjen az alábbi adatokra:

$x_i$	$-1$	$1$
$H_1(x_i)$	$4$	$6$
$H'_1(x_i)$	$-3$	$13$

A differenciátáblázat:

$$\begin{array}{cccc}
 -1 & 4 & & \\
 & & -3 & \\
 -1 & 4 & & 2 \\
 & & 1 & 2 \\
 1 & 6 & & 6 \\
 & & 13 & \\
 1 & 6 & & 
 \end{array}$$

Az illesztett polinom a differenciátáblázat alsó éléből felírva:  
 $H_1(x) = 6 + 13 \cdot (x - 1) + 6 \cdot (x - 1)^2 + 2 \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 1).$

A  $H$  szakaszonként harmadfokú polinom folytonosan differenciálható lesz, ha  $H_2$ -t úgy határozzuk meg, hogy illeszkedjen a következő adatokra:

$x_i$	1	3
$H_2(x_i)$	6	12
$H_2'(x_i)$	13	9

A differenciátáblázat:

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 6 & & \\
 & & 13 & \\
 1 & 6 & & -5 \\
 & & 3 & 4 \\
 3 & 12 & & 3 \\
 & & 9 & \\
 3 & 12 & & 
 \end{array}$$

Az illesztett polinom:

$$H_2(x) = 6 + 13 \cdot (x - 1) - 5 \cdot (x - 1)^2 + 4 \cdot (x - 1)^2 \cdot (x - 3).$$

$$6. \quad \begin{array}{c|c|c|c}
 x_i & -1 & 1 & 3 \\
 \hline
 H(x_i) & 4 & 6 & 12 \\
 \hline
 H'(x_i) & -3 & \alpha & 9
 \end{array}$$

Ebből az első polinom:

$x_i$	-1	1
$H(x_i)$	4	6
$H'(x_i)$	-3	$\alpha$

A differenciátáblázat:

$$\begin{array}{cccc}
 -1 & 4 & & \\
 & & -3 & \\
 -1 & 4 & & 2 \\
 & & 1 & \frac{\alpha - 5}{4} \\
 1 & 6 & & \frac{\alpha - 1}{2} \\
 & & \alpha & \\
 1 & 6 & & 
 \end{array}$$

Az illesztett polinom:

$$H_1(x) = 6 + \alpha \cdot (x - 1) + \frac{\alpha - 1}{2} \cdot (x - 1)^2 + \frac{\alpha - 5}{4} \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 1).$$

A második polinom:

$x_i$	$\parallel$	1	3
$H(x_i)$	$\parallel$	6	12
$H'(x_i)$	$\parallel$	$\alpha$	9

A differenciátáblázat:

1	6		
		$\alpha$	
1	6	$\frac{3 - \alpha}{2}$	
		3	$\frac{3 + \alpha}{4}$
3	12	3	
		9	
3	12		

Az illesztett polinom:

$$H_2(x) = 6 + \alpha \cdot (x - 1) + \frac{3 - \alpha}{2} \cdot (x - 1)^2 + \frac{3 + \alpha}{4} \cdot (x - 1)^2 \cdot (x - 3).$$

Látható, hogy a feladat tetszőleges  $\alpha \in \Re$  esetén megoldható.

7.  $H$  kétszer folytonosan differenciálható, ha kétszer differenciálható és a második deriváltja folytonos.

$$H_1''(1) = \frac{\alpha - 1}{2} \cdot 2 + \frac{\alpha - 5}{4} \cdot 2 \cdot 2 = 2\alpha - 6$$

$$H_2''(1) = \frac{3 - \alpha}{2} \cdot 2 + \frac{3 + \alpha}{4} \cdot 2 \cdot (-2) = 3 - \alpha - 3 - \alpha = -2\alpha$$

Ebből a kétszer folytonosan differenciálhatóság feltétele a  $2\alpha - 6 = -2\alpha$  egyenlet teljesülése, aminek megoldásaként  $\alpha = \frac{3}{2}$  adódik.

Így a keresett polinomot megkapjuk, ha az előző feladatban  $\alpha$  helyére  $\frac{3}{2}$ -et helyettesítünk.

$$H(x) = \begin{cases} 6 + \frac{3}{2}(x - 1) + \frac{1}{4}(x - 1)^2 - \frac{7}{8}(x - 1)^2(x + 1), & \text{ha } x \in [-1, 1] \\ 6 + \frac{3}{2}(x - 1) + \frac{3}{4}(x - 1)^2 + \frac{9}{8}(x - 1)^2(x + 1), & \text{ha } x \in (1, 3]. \end{cases}$$

### 3.8 Nemlineáris egyenletek és egyenletrendszerek

1. Az egyenletet írjuk  $x = \frac{1}{3} \cdot \cos x$  alakba, és legyen  $g(x) = \frac{1}{3} \cdot \cos x$ , valamint  $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \cos x - x$

Ekkor a  $g(x) = x$  egyenlet gyökét keressük (azaz a  $g$  lépés fixpontját).

Mivel  $g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , azaz a  $g$  leképezés a  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  intervallumot önmagába képezi le, továbbá

$$g'(x) = -\frac{1}{3} \cdot \sin x \quad , \quad |g'(x)| = \frac{1}{3} \cdot |\sin x| \leq \frac{1}{3},$$

ezért a fixpont-iteráció konvergenciatételének feltételei teljesülnek, tehát bármely  $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  kezdőpont esetén az  $x_{k+1} = \frac{1}{3} \cdot \cos x_k$  sorozat ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) tart az egyenlet gyökéhez. Az egyenletnek a  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  intervallumban egyetlen gyöke van.

A szükséges lépésszám becsléséhez a következő összefüggést használjuk

$$|x_k - x^*| \leq \frac{q^k}{1 - q} \cdot |g(x_0) - x_0|,$$

ahol  $x^*$  az egyenlet  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ -beli gyöke,

$$q = \max_{x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} |g'(x)|.$$

Esetünkben  $x_0 = 0$ , és ha a  $k$  értékét úgy határozzuk meg, hogy

$$\frac{q^k}{1 - q} \cdot |g(x_0) - x_0| < 0,5 \cdot 10^{-3}$$

teljesüljön, akkor a hiba kisebb lesz, mint  $0,5 \cdot 10^{-3}$ .

Behelyettesítve a fenti egyenlőtlenségbe

$$\frac{\frac{1}{3}^k}{1 - \frac{1}{3}} \cdot \left| \frac{1}{3} - 0 \right| < 0,5 \cdot 10^{-3}$$

amiből

$$k > 6,29,$$

tehát, ha legalább 7 lépést végzünk, a hiba kisebb lesz, mint  $0,5 \cdot 10^{-3}$

Az iterációt számítógépen futtatva, az eredményeket táblázatba foglalva (az  $x_k$  értéket 6 tizedesjegyre kerekítve):

$k$	$x_k$	$f(x_k)$
0	0	0,333333
1	0,333333	-0,018348
2	0,314986	0,001948
3	0,316934	-0,000202
4	0,316732	$2,10 \cdot 10^{-5}$
5	0,316753	$-2,18 \cdot 10^{-6}$
6	0,316751	$2,26 \cdot 10^{-7}$

2. Írjuk át az egyenletet

$$x = \frac{3x^3 + 4}{12}$$

alakba. Ekkor a

$$g(x) = \frac{3x^3 + 4}{12}$$

választással a  $g(x) = x$  egyenlet gyökét keressük.

Mivel  $g : [0, 1] \rightarrow [\frac{1}{3}, \frac{7}{12}] \subset [0, 1]$ , tehát a  $g$  leképezés a  $[0, 1]$  intervallumot önmagába képezi le, továbbá

$$g'(x) = \frac{9x^2}{12} = \frac{3x^2}{4} \quad , \quad |g'(x)| = \frac{3x^2}{4} \leq \frac{3}{4} < 1,$$

ha  $x \in [0, 1]$ , így a konvergencia feltételek teljesülnek, tehát az  $x_{k+1} = g(x_k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) iteráció konvergens tetszőleges  $x_0 \in [0, 1]$  esetén.

Az  $\{x_k\}$  sorozat tart az egyenlet egyetlen  $[0, 1]$ -beli gyökéhez. Legyen

$$f(x) = \frac{3x^3 + 4}{12} - x$$

Az iterációt számítógépen futtatva, az eredményeket táblázatba foglalva (az  $x_k$  értéket 6 tizedesjegyre kerekítve):

$k$	$x_k$	$f(x_k)$
0	0	0,333333
1	0,333333	0,009259
2	0,342593	0,000793
3	0,343386	$7,00 \cdot 10^{-5}$
4	0,343456	$6,19 \cdot 10^{-6}$
5	0,343462	$5,48 \cdot 10^{-7}$
6	0,343463	$4,86 \cdot 10^{-8}$

3. Mivel a  $h(x) = \ln x$  függvény szigorúan monoton növekvő, a  $g(x) = 2 - x$  függvény szigorúan monoton csökkenő, továbbá  $h(1) < g(1)$  és  $h(2) > g(2)$  ezért az  $\ln x = 2 - x$  egyenletnek egyetlen gyöke van, ami az  $[1, 2]$  intervallumban található. Az egyenletet  $\ln x + 2 - x = 0$  alakba írva alkalmazzuk a Newton-módszert az  $x_0 = 1$  pontból indítva az iterációt.

Az  $f(x) = \ln x + 2 - x$  jelölést bevezetve  $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$ , így az iteráció

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\ln x_k + x_k - 2}{\frac{1}{x_k} + 1} \quad k = 0, 1, \dots$$

Az iterációt számítógépen futtatva, az eredményeket táblázatba foglalva (az  $x_k$  értéket 6 tizedesjegyre kerekítve):

$k$	$x_k$	$f(x_k)$
0	1	-1
1	1,5	-0,094535
2	1,556721	$-6,97 \cdot 10^{-4}$
3	1,557146	$-3,72 \cdot 10^{-8}$

4.  $f$ -nek van gyöke  $[0, 1]$ -ben, mert  $f(0) = 1 > 0$ ,  $f(1) = e - 4 < 0$  és  $f(x)$  folytonos. Vizsgáljuk meg a fixpont-iteráció konvergenciatételének feltételeit: a  $g(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}}$  jelölést bevezetve

$$g : [0, 1] \rightarrow \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{e} \right] \subset [0, 1]$$

és  $g'(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{x}{2}} < 1$ .

Így az  $\{x_k\}$  sorozat tetszőleges  $x_0 \in [0, 1]$  esetén tart az egyenlet egyetlen  $[0, 1]$ -beli gyökéhez.

5. A  $\sqrt{5}$  az  $f(x) = x^2 - 5$  függvény egyik zérushelye. Legyen  $x_0 = 2$ . Mivel  $f'(x) = 2x$ , a Newton-módszer jelen esetben:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 5}{2x_k} = \frac{1}{2} \left( x_k + \frac{5}{x_k} \right) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ekkor

$k$	$x_k$	$f(x_k)$
0	2	1
1	2,25	0,0625
2	2,236111	0,000193
3	2,236068	$1,00624 \cdot 10^{-9}$

6. Legyen  $h(x) = \sin x$  és  $g(x) = e^x$ . Ekkor  $h(-4) > g(-4)$  és  $h(-3) < g(-3)$ , ezért az  $e^x = \sin x$  egyenletnek a  $[-4, -3]$  intervallumban van gyöke. Az egyenletet  $e^x - \sin x = 0$  alakba írva alkalmazzuk a Newton módszert az  $x_0 = -4$  pontból indítva az iterációt. Az  $f(x) = e^x - \sin x$  jelölést bevezetve  $f'(x) = e^x - \cos x$ , így az iteráció

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e_k^x - \sin x_k}{e_k^x - \cos x_k} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Az iterációt számítógépen futtatva, az eredményeket táblázatba foglalva (az  $x_k$  értéket 6 tizedesjegyre kerekítve):

$k$	$x_k$	$f(x_k)$
0	-4	-0,738487
1	-2,900995	0,293252
2	-3,186770	-0,003857
3	-3,183062	$5,85 \cdot 10^{-7}$
4	-3,183063	$2,01 \cdot 10^{-9}$



7. Ha  $x_0 > 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{\sqrt{x_0}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_0}}} = x_0 - 2 \cdot x_0 = -x_0,$$

ha  $x_0 < 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{-\sqrt{x_0}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{-x_0}}} = x_0 + 2 \cdot (-x_0) = -x_0.$$

Az iteráció során felváltva kapjuk az  $x_0$ , illetve  $-x_0$  értékeket, tehát a sorozat nem konvergál. A gépi megvalósítás során, a kerekítési hibák miatt, lassan ugyan, de az  $x_k$  sorozat tartani fog a gyökhöz.

8. Legyen  $f(x) = x^3 - 3x - 2$ , ekkor  $f'(x) = 3x^2 - 3$ . Ezeket felhasználva

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k - 2}{3x_k^2 - 3}, \text{ ahol } k = 0, 1, 2, \dots$$

Az eredményeket táblázatba foglalva:

k	$x_k$	$f(x_k)$
0	1,5	-3,125
1	2,333333	3,703704
2	2,055556	0,518690
3	2,001949	0,017567
4	2,000003	$2,23 \cdot 10^{-5}$
5	2,000000	0

9. Legyen  $f(x) = x^3 - 3x + 2$ , ekkor  $f'(x) = 3x^2 - 3$ . Így

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k + 2}{3x_k^2 - 3}, \text{ ahol } k = 0, 1, 2, \dots$$

Az eredményeket táblázatba foglalva:

k	$x_k$	$f(x_k)$
0	1,5	0,875
1	1,266667	0,232296
2	1,138562	0,060259
3	1,070777	0,015383
4	1,035792	0,003889
5	1,018001	$9,78 \cdot 10^{-4}$
6	1,009027	$2,45 \cdot 10^{-4}$

Látható, hogy a módszer lassabban konvergál mint az előző feladat esetén.

Az  $x_{k+1} = x_k - 2 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  iterációval

k	$x_k$	$f(x_k)$
0	1,5	0,875
1	1,033333	0,003370
2	1,000182	$9,954191 \cdot 10^{-8}$
3	1,000000	0

a konvergencia felgyorsult. A jelenség magyarázata, hogy az 1 az egyenlet kétszeres gyöke.

10. (a) Ha az iterációt valamely  $x_0 \in (-1, 1)$  kezdőpontból indítjuk, akkor  $x_k \rightarrow 0$ , ha  $k \rightarrow \infty$   
 (b) Ha  $x_0 \in [-1, 0)$ , akkor  $x_k \rightarrow -1$ , ha  $k \rightarrow \infty$ , míg  $x_0 \in (0, 1]$  esetén  $x_k \rightarrow 1$ , ha  $k \rightarrow \infty$ .

11. Legyen

$$G(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cos(2x_1 - x_2) - \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} \sin x_1 - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

és  $T = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ .

Ekkor  $G: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T \subset \mathbb{R}^2$ , és az  $x = G(x)$  egyenlet gyökét közelítjük az  $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  iterációval.

Megvizsgáljuk a konvergencia feltételeit:

$$-1 \leq \frac{1}{4} \cos(2x_1 - x_2) - \frac{3}{4} \leq -\frac{1}{2} \implies G_1(x) \in [-\pi, \pi],$$

$$-1 \leq \frac{1}{3} \sin x_1 - \frac{2}{3} \leq -\frac{1}{3} \implies G_2(x) \in [-\pi, \pi],$$

tehát  $G(T) \subset T$ .

Ezek után felírjuk a  $G$  leképezés Jacobi-mátrixát:

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sin(2x_1 - x_2) & \frac{1}{4} \sin(2x_1 - x_2) \\ \frac{1}{3} \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\|J\|_\infty \leq \frac{3}{4}$ , így a  $G(x)=x$  egyenletnek pontosan 1 gyöke van  $T$ -ben. Minden  $x^{(0)} \in T$  kezdővektor esetén az  $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$  sorozat tart ehhez a gyökhöz.

12.  $T = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 2]$

Legyen

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0,1x_1^2 + 0,1x_2^2 + 0,1x_3^2 \\ 0,1x_1 + 0,1x_2 + 0,1x_3 \\ 0,1x_1x_2x_3 \end{pmatrix}.$$

Látható, hogy a  $g(T) \subseteq T$

Ezek után felírjuk a  $g$  leképezés Jacobi-mátrixát:

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2x_1 & 0,2x_2 & 0,2x_3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1x_1x_2 & 0,1x_1x_3 & 0,1x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

A  $J$  sornormája:  $\|J\|_\infty \leq 0,8 < 1$

A konvergencia feltételei teljesülnek, így az iteráció minden  $x^{(0)} \in T$  kezdővektor esetén konvergál.

### 3.9 Közelítő integrálás

1. (a)  $\int_3^6 \sqrt{x-2} dx, \quad m = 5$

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{6-3}{5} = 0,6.$$

Az alapintervallumot  $[3, 6]$ -ot 5 egyenlő részre osztjuk.

Az alappontok a következők:

$$x_0 = 3 \quad x_1 = 3,6 \quad x_2 = 4,2 \quad x_3 = 4,8 \quad x_4 = 5,4 \quad x_5 = 6.$$

Összetett trapéz formula:

Az

$$I_{mx2} = h \left( \frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{m-1}) + \frac{f(x_m)}{2} \right)$$

képletbe az adatokat behelyettesítve, és az eredményt 6 tizedesjegyre kerekítve

$$I_{5x2} = 4,659228.$$

A hiba becslése:

az

$$|I(f) - I_{mx2}(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12m^2} M_2$$

becslést használjuk, ahol

$$M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Az  $f(x) = \sqrt{x-2} = (x-2)^{\frac{1}{2}}$  függvény első és második deriváltja,

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x-2)^{-\frac{3}{2}},$$

amiből  $M_2 = \frac{1}{4}$ , így

$$|I(f) - I_{5x2}(f)| \leq \frac{(6-3)^3}{12 \cdot 5^2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{400} = 2,25 \cdot 10^{-2}.$$

Összetett Simpson formula:

Az

$$I_{mx3} = \frac{h}{6} \left( f(x_0) + 4f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + 2f(x_1) + 4f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \dots + \right. \\ \left. + 4f\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}\right) + f(x_m) \right)$$

képletbe az adatokat behelyettesítve, és az eredményt 6 tizedesjegyre kerekítve  
 $I_{5x3} = 4,666652$ .

A hiba becslése:

az

$$|I(f) - I_{mx3}(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880m^4} M_4$$

becslést használjuk, ahol

$$M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

A függvény harmadik és negyedik deriváltja:

$$f'''(x) = \frac{3}{8} \cdot (x-2)^{-\frac{5}{2}},$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16} \cdot (x-2)^{-\frac{7}{2}},$$

tehát  $M_4 = \frac{15}{16}$ , így

$$|I(f) - I_{5x3}(f)| \leq \frac{(6-3)^5}{2880 \cdot 5^4} \cdot \frac{15}{16} = \frac{81}{640000} = 1,2656 \cdot 10^{-4}.$$

(b)  $\int_1^2 \ln(x^2) dx, \quad m = 5$

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5}$$

Az alapintervallumot  $([1,2]-t)$  5 egyenlő részre osztjuk.

Az alappontok a következők:

$$x_0 = 1 \quad x_1 = 1,2 \quad x_2 = 1,4 \quad x_3 = 1,6 \quad x_4 = 1,8 \quad x_5 = 2.$$

Összetett trapéz formula:

$$I_{5x2}(f) = \frac{1}{5} \cdot (0 + \ln(1,2^2) + \ln(1,4^2) + \ln(1,6^2) + \ln(1,8^2) + \frac{\ln 4}{2}) = 0,769263.$$

A hiba becslése:

Az  $f(x) = \ln(x^2) = 2 \cdot \ln(x)$  függvény első és második deriváltja:

$$f'(x) = \frac{2}{x},$$

$$f''(x) = -\frac{2}{x^2},$$

amit felhasználva  $M_2 = 2$ , így

$$|I(f) - I_{5x2}(f)| \leq \frac{(2-1)^3}{12 \cdot 5^2} \cdot 2 = \frac{1}{150} = 6,6667 \cdot 10^{-3}.$$

Összetett Simpson formula:

$$\begin{aligned} I_{5x3}(f) = & \frac{1}{30} \cdot (0 + 4 \cdot \ln(1,1^2) + 2 \cdot \ln(1,2^2) + 4 \cdot \ln(1,3^2) + 2 \cdot \ln(1,4^2) + \\ & + 4 \cdot \ln(1,5^2) + 2 \cdot \ln(1,6^2) + 4 \cdot \ln(1,7^2) + 2 \cdot \ln(1,8^2) + \\ & + 4 \cdot \ln(1,9^2) + \ln 4) = 0,772587. \end{aligned}$$

A hiba becslése:

A függvény harmadik és negyedik deriváltja:

$$f'''(x) = \frac{4}{x^3},$$

$$f''''(x) = -\frac{12}{x^4},$$

tehát  $M_4 = 12$ , így

$$|I(f) - I_{5x3}(f)| \leq \frac{(2-1)^5}{2880 \cdot 5^4} \cdot 12 = \frac{1}{150000} = 6,6667 \cdot 10^{-6}.$$

(c)  $\int_0^1 e^{x^2-1} dx, \quad m = 5$

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5}$$

Az alapintervallumot  $([0, 1]$ -et) 5 egyenlő részre osztjuk.

Az alappontok a következők:

$$x_0 = 0 \quad x_1 = 0,2 \quad x_2 = 0,4 \quad x_3 = 0,6 \quad x_4 = 0,8 \quad x_5 = 1.$$

Összetett trapéz formula:

$$I_{5x2}(f) = \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{e^{-1}}{2} + e^{-0,96} + e^{-0,84} + e^{-0,64} + e^{-0,36} + \frac{1}{2} \right) = 0,544702.$$

A hiba becslésére:

Az  $f(x) = e^{x^2-1}$  függvény első és második deriváltját használjuk:

$$f'(x) = e^{x^2-1} \cdot 2x,$$

$$f''(x) = e^{x^2-1} \cdot (4x^2 + 2),$$

amiből  $M_2 = 6$ , így

$$|I(f) - I_{5x2}(f)| \leq \frac{(1-0)^3}{12 \cdot 5^2} \cdot 6 = \frac{1}{50} = 2 \cdot 10^{-2}.$$

Összetett Simpson formula:

$$\begin{aligned} I_{5x3}(f) &= \frac{1}{30} \cdot (e^{-1} + 4 \cdot e^{-0,99} + 2 \cdot e^{-0,96} + 4 \cdot e^{-0,91} + 2 \cdot e^{-0,84} + \\ &\quad + 4 \cdot e^{-0,75} + 2 \cdot e^{-0,64} + 4 \cdot e^{-0,51} + 2 \cdot e^{-0,36} + 4 \cdot e^{-0,19} + 1) = \\ &= 0,538090. \end{aligned}$$

A hiba becslése:

A függvény harmadik és negyedik deriváltja:

$$f'''(x) = e^{x^2-1} \cdot 2x \cdot (4x^2 + 2) + e^{x^2-1} \cdot 8x = e^{x^2-1} \cdot (8x^3 + 12x),$$

$$f''''(x) = e^{x^2-1} \cdot 2x \cdot (8x^3 + 12x) + e^{x^2-1} \cdot (24x^2 + 12) = e^{x^2-1} \cdot (16x^4 + 48x^2 + 12),$$

amit felhasználva  $M_4 = 76$ , így

$$|I(f) - I_{5 \times 3}(f)| \leq \frac{(1-0)^5}{2880 \cdot 5^4} \cdot 76 = \frac{19}{450000} = 4,2222 \cdot 10^{-5}.$$

(d)  $\int_1^2 x^2 \ln x dx, \quad m = 4$

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{2-1}{4} = 0,25$$

Az alapintervallumot  $([1, 2]-t)$  4 egyenlő részre osztjuk.

Az alappontok a következők:

$$x_0 = 1 \quad x_1 = 1,25 \quad x_2 = 1,5 \quad x_3 = 1,75 \quad x_4 = 2.$$

Összetett trapéz formula:

$$I_{4 \times 2}(f) = 0,25 \cdot (0 + (1,25^2 \cdot \ln 1,25) + (1,5^2 \cdot \ln 1,5) + (1,75^2 \cdot \ln 1,75) + \frac{2^2 \cdot \ln 2}{2}) = 1,090269.$$

A hiba becslésére:

Az  $f(x) = x^2 \ln x$  függvény első és második deriváltját felhasználva:

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x,$$

$$f''(x) = 2 \cdot \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2 \cdot \ln x + 3,$$

amiből  $M_2 = 2 \cdot \ln 2 + 3$ , így

$$|I(f) - I_{4 \times 2}(f)| \leq \frac{(2-1)^3}{12 \cdot 4^2} \cdot (2 \cdot \ln 2 + 3) = 2,2845 \cdot 10^{-2}.$$

Összetett Simpson formula:

$$I_{4 \times 3}(f) = 1,070613.$$

A hiba becslése:

A függvény harmadik és negyedik deriváltja:

$$f'''(x) = \frac{2}{x},$$

$$f''''(x) = -\frac{2}{x^2},$$

tehát  $M_4 = 2$ , így

$$|I(f) - I_{4 \times 3}(f)| \leq \frac{(2-1)^5}{2880 \cdot 4^4} \cdot 2 = \frac{1}{368640} = 2,7127 \cdot 10^{-6}.$$

(e)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx, \quad m = 3$

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{\frac{\pi}{4}}{3} = \frac{\pi}{12}$$

Az alapintervallumot  $([0, \frac{\pi}{4}]$ -et) 3 egyenlő részre osztjuk.

Az alappontok a következők:

$$x_0 = 0 \quad x_1 = \frac{\pi}{12} \quad x_2 = \frac{\pi}{6} \quad x_3 = \frac{\pi}{4}.$$

Összetett trapéz formula:

$$I_{3x2}(f) = -0,0921.$$

A hiba becslésére:

Az  $f(x) = \ln(\cos x)$  függvény első és második deriváltját használjuk,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\tan x,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x},$$

tehát  $M_2 = 2$ , így

$$|I(f) - I_{3x2}(f)| \leq \frac{(\frac{\pi}{4})^3}{12 \cdot 3^2} \cdot 2 = 8,9717 \cdot 10^{-3}.$$

Összetett Simpson formula:

$$I_{3x3}(f) = -0,0864.$$

A hiba becslése:

A függvény harmadik és negyedik deriváltja:

$$f'''(x) = 2 \cdot \cos^{-3} x \cdot (-\sin x) = -2 \cdot \cos^{-3} x \cdot \sin x,$$

$$\begin{aligned} f''''(x) &= 6 \cdot \cos^{-4} x \cdot (-\sin x) \cdot \sin x - 2 \cdot \cos^{-3} x \cdot \cos x = \\ &= -6 \cdot \cos^{-4} x \cdot \sin^2 x - 2 \cdot \cos^{-2} x = -\frac{6 \sin^2 x}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x} = \\ &= -\frac{6 \sin^2 x + 2}{\cos^4 x} = -\frac{6 - 4 \cos^2 x}{\cos^4 x} \end{aligned}$$

tehát  $M_4 = 16$ , így

$$|I(f) - I_{3x3}(f)| \leq \frac{(\frac{\pi}{4})^5}{2880 \cdot 3^4} \cdot 16 = 2,0497 \cdot 10^{-5}.$$

(f)  $\int_{-1}^0 e^{x^2} dx, \quad m = 3$

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{0+1}{3} = \frac{1}{3}$$

Az alapintervallumot  $([-1, 0]$ -t) 3 egyenlő részre osztjuk.

Az alappontok a következők:



$$x_0 = -1 \quad x_1 = -\frac{2}{3} \quad x_2 = -\frac{1}{3} \quad x_3 = 0.$$

Összetett trapéz formula:  $I_{3x2}(f) = 1,512094$ .

A hiba becslése:

Az  $f(x) = e^{x^2}$  függvény első és második deriváltját kiszámolva,

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x,$$

$$f''(x) = e^{x^2} \cdot 2x \cdot 2x + e^{x^2} \cdot 2 = e^{x^2} \cdot (4x^2 + 2),$$

amit felhasználva  $M_2 = 6 \cdot e$ , így

$$|I(f) - I_{3x2}(f)| \leq \frac{(0+1)^3}{12 \cdot 3^2} \cdot (6 \cdot e) = 0,151016.$$

Összetett Simpson formula:

$$I_{3x3}(f) = 1,462873.$$

A hiba becslése:

A függvény harmadik és negyedik deriváltja:

$$f'''(x) = e^{x^2} \cdot 2x \cdot (4x^2 + 2) + e^{x^2} \cdot 8x = e^{x^2} \cdot (8x^3 + 12x),$$

$$f^{(4)}(x) = e^{x^2} \cdot 2x \cdot (8x^3 + 12x) + e^{x^2} \cdot (24x^2 + 12) = e^{x^2} \cdot (16x^4 + 48x^2 + 12),$$

tehát  $M_4 = 76 \cdot e$ , így

$$|I(f) - I_{3x3}(f)| \leq \frac{(0+1)^5}{2880 \cdot 3^4} \cdot (76 \cdot e) = 8,8559 \cdot 10^{-4}.$$

2. Összetett trapéz képlet esetén a hiba becslése:

$$|I(f) - I_{mx2}(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12m^2} M_2, \text{ ahol } M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Míg összetett Simpson formula esetén a hiba becslése:

$$|I(f) - I_{mx3}(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880m^4} M_4, \text{ ahol } M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

A megoldás során felhasználjuk, hogy az  $M_2$  és  $M_4$  értékeket már az 1. feladatnál kiszámoltuk.

$$(a) \int_3^6 \sqrt{x-2} dx$$

Ha a trapéz formula esetén az  $m$  értékét úgy határozzuk meg, hogy

$$\frac{(b-a)^3}{12m^2} M_2 < 0,5 \cdot 10^{-4}$$

teljesüljön, akkor a hiba a megadott korlát alatt marad.

$$\begin{aligned}\frac{(6-3)^3}{12 \cdot m^2} \cdot \frac{1}{4} &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ \frac{9}{8} \cdot 10^4 &< m^2 \\ 106,066 &< m.\end{aligned}$$

Ha  $m$ -et legalább 107-nek választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint  $0,5 \cdot 10^{-4}$ .

Ha a Simpson képlet esetén az  $m$  értékét úgy határozzuk meg, hogy

$$\frac{(b-a)^5}{2880m^4} M_4 < 0,5 \cdot 10^{-4}$$

teljesüljön, akkor a hiba a megadott korlát alatt marad.

$$\begin{aligned}\frac{(6-3)^5}{2880 \cdot m^4} \cdot \frac{15}{16} &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ \frac{3^5 \cdot 15}{2880 \cdot 8} \cdot 10^4 &< m^4 \\ 6,3067 &< m.\end{aligned}$$

Ha  $m$ -et legalább 7-nek választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint  $0,5 \cdot 10^{-4}$ .

(b)  $\int_1^2 \ln(x^2) dx$

Trapéz képlet esetén:

$$\begin{aligned}\frac{(2-1)^3}{12 \cdot m^2} \cdot 2 &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ \frac{1}{3} \cdot 10^4 &< m^2 \\ 57,735 &< m.\end{aligned}$$

Ha  $m$ -et legalább 58-nak választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint  $0,5 \cdot 10^{-4}$ .

Simpson képlet esetén:

$$\begin{aligned}\frac{(2-1)^5}{2880 \cdot m^4} \cdot 12 &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ \frac{1}{120} \cdot 10^4 &< m^4 \\ 3,0214 &< m.\end{aligned}$$

Ha  $m$ -et legalább 4-nek választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint  $0,5 \cdot 10^{-4}$ .

(c)  $\int_0^1 e^{x^2-1} dx$

Trapéz képlet esetén:

$$\begin{aligned}\frac{(1-0)^3}{12 \cdot m^2} \cdot 6 &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ 10^4 &< m^2 \\ 100 &< m.\end{aligned}$$

Ha  $m$ -et legalább 101-nek választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint  $0,5 \cdot 10^{-4}$ .

Simpson képlet esetén:

$$\begin{aligned}\frac{(1-0)^5}{2880 \cdot m^4} \cdot 76 &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ \frac{19}{360} \cdot 10^4 &< m^4 \\ 4,7931 &< m.\end{aligned}$$

Ha  $m$ -et legalább 5-nek választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint  $0,5 \cdot 10^{-4}$ .

(d)  $\int_1^2 x^2 \ln x dx$

Trapéz képlet esetén:

$$\begin{aligned}\frac{(2-1)^3}{12 \cdot m^2} \cdot (2 \cdot \ln 2 + 3) &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ \frac{2 \cdot \ln 2 + 3}{6} \cdot 10^4 &< m^2 \\ 85,5019 &< m.\end{aligned}$$

Ha  $m$ -et legalább 86-nak választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint  $0,5 \cdot 10^{-4}$ .

Simpson képlet esetén:

$$\begin{aligned}\frac{(2-1)^5}{2880 \cdot m^4} \cdot 2 &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ \frac{1}{720} \cdot 10^4 &< m^4 \\ 1,9305 &< m.\end{aligned}$$

Ha  $m$ -et legalább 2-nek választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint  $0,5 \cdot 10^{-4}$ .

(e)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$

Trapéz képlet esetén:

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{12 \cdot m^2} \cdot 2 &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{3} \cdot 10^4 &< m^2 \\ 40,1859 &< m.\end{aligned}$$

Ha  $m$ -et legalább 41-nek választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint  $0,5 \cdot 10^{-4}$ .

Simpson képlet esetén:

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^5}{2880 \cdot m^4} \cdot 16 &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^5}{90} \cdot 10^4 &< m^4 \\ 2,4005 &< m.\end{aligned}$$

Ha  $m$ -et legalább 3-nak választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint  $0,5 \cdot 10^{-4}$ .

(f)  $\int_{-1}^0 e^{x^2} dx$

Trapéz képlet esetén:

$$\begin{aligned}\frac{(0+1)^3}{12 \cdot m^2} \cdot (6 \cdot e) &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ e \cdot 10^4 &< m^2 \\ 164,8721 &< m.\end{aligned}$$

Ha  $m$ -et legalább 165-nek választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint  $0,5 \cdot 10^{-4}$ .

Simpson képlet esetén:

$$\begin{aligned}\frac{(0+1)^5}{2880 \cdot m^4} \cdot (76 \cdot e) &< 0,5 \cdot 10^{-4} \\ \frac{19}{360} \cdot e \cdot 10^4 &< m^4 \\ 6,1544 &< m.\end{aligned}$$

Ha  $m$ -et legalább 7-nek választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint  $0,5 \cdot 10^{-4}$ .

3.  $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$ ,  
így az  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$  integrál közelítését kell elvégeznünk.

Mivel  $f''(x) = \frac{2}{x^3}$  és  $M_2 = 2$ , ezért ha az  $m$  értékét úgy választjuk, hogy

$$\frac{(2-1)^3}{12 \cdot m^2} \cdot 2 < 0,5 \cdot 10^{-3}$$

teljesüljön, akkor a hiba kisebb lesz, mint  $0,5 \cdot 10^{-3}$ .

Az előbbi egyenlőtlenséget átrendezve

$$\frac{1}{3} \cdot 10^3 < m^2, \text{ amiből} \\ 18,2574 < m.$$

Ha  $m$ -et legalább 19-nek választjuk, akkor a hiba biztosan kisebb lesz, mint  $0,5 \cdot 10^{-3}$ .  
Ekkor  $I_{19 \times 2} = 0,693320$ .

4. A közelítést  $a_1 \cdot f(x_1) + a_2 \cdot f(x_2) + a_3 \cdot f(x_3)$  alakú kvadratúrával keressük.

A kvadratúra alappontjai:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0.5, \quad x_3 = 1.$$

Ha az integrálközelítő formula együtthatóit úgy határozzuk meg, hogy az pontos legyen az  $f(x) \equiv 1, f(x) = x, f(x) = x^2$  függvények esetén, akkor a formula pontos lesz minden legfeljebb másodfokú polinom esetén.

•Legyen  $f(x) \equiv 1$

$$\text{Egyrészt } \int_0^1 1 \cdot \sqrt{x} dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3},$$

$$\text{másrészt } a_1 \cdot f(x_1) + a_2 \cdot f(x_2) + a_3 \cdot f(x_3) = a_1 + a_2 + a_3.$$

Így az  $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{2}{3}$  egyenletnek kell teljesülnie.

•Legyen  $f(x) = x$

$$\text{Egyrészt } \int_0^1 x \cdot \sqrt{x} dx = \frac{2}{5},$$

$$\text{illetve } a_1 \cdot f(x_1) + a_2 \cdot f(x_2) + a_3 \cdot f(x_3) = 0 \cdot a_1 + \frac{1}{2} \cdot a_2 + 1 \cdot a_3.$$

Így az  $\frac{1}{2} \cdot a_2 + a_3 = \frac{2}{5}$  egyenletnek kell teljesülnie.

•Legyen  $f(x) = x^2$

$$\text{Egyrészt } \int_0^1 x^2 \cdot \sqrt{x} dx = \frac{2}{7},$$

$$\text{illetve } a_1 \cdot f(x_1) + a_2 \cdot f(x_2) + a_3 \cdot f(x_3) = 0 \cdot a_1 + \frac{1}{4} \cdot a_2 + 1 \cdot a_3.$$

Így az  $\frac{1}{4} \cdot a_2 + a_3 = \frac{2}{7}$  egyenletnek kell teljesülnie.

Az

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \cdot a_2 + a_3 &= \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} \cdot a_2 + a_3 &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása  $a_1 = \frac{4}{105}, a_2 = \frac{16}{35}, a_3 = \frac{6}{35}$ .

5.  $\int_{-1}^1 f(x)dx$

A kvadratúra alappontjai:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Hasonlóan eljárva mint az előző feladatnál:

• legyen  $f(x) \equiv 1$

$$\int_{-1}^1 1dx = 2,$$

az  $a_0 + a_1 + a_2 = 2$  egyenletnek kell teljesülnie.

• legyen  $f(x) = x$

$$\int_{-1}^1 xdx = 0,$$

az  $-\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot a_0 + \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot a_2 = 0$ , azaz  $-a_0 + a_2 = 0$  egyenletnek kell teljesülnie.

• legyen  $f(x) = x^2$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3},$$

az  $\frac{3}{5} \cdot a_0 + \frac{3}{5} \cdot a_2 = \frac{2}{3}$  egyenletnek kell teljesülnie.

Az

$$a_0 + a_1 + a_2 = 2$$

$$-a_0 + a_2 = 0$$

$$\frac{3}{5} \cdot a_0 + \frac{3}{5} \cdot a_2 = \frac{2}{3}$$

egyenletrendszer megoldva kapjuk, hogy a kvadratúra súlyai

$$a_0 = \frac{5}{9} \quad , \quad a_1 = \frac{8}{9} \quad , \quad a_2 = \frac{5}{9}.$$

Vizsgáljuk meg, hogy a kvadratúra pontos-e a legfeljebb harmadfokú polinomok esetén!

Ha  $f(x) = x^3$ , akkor

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = 0, \text{ továbbá}$$

$$\begin{aligned} a_0 \cdot f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + a_1 \cdot f(0) + a_2 \cdot f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) &= \\ &= \frac{5}{9} \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 + \frac{8}{9} \cdot 0^3 + \frac{5}{9} \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 = 0, \end{aligned}$$

tehát a legfeljebb harmadfokú polinom esetén is pontos a képlet.

Vizsgáljuk meg, hogy a kvadratúra pontos-e a legfeljebb negyedfokú polinomok esetén!

Ha  $f(x) = x^4$ , akkor

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{2}{5}, \text{ továbbá}$$

$$\begin{aligned}
& a_0 \cdot f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + a_1 \cdot f(0) + a_2 \cdot f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \\
& = \frac{5}{9} \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4 + \frac{8}{9} \cdot 0^4 + \frac{5}{9} \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4 = \frac{2}{5},
\end{aligned}$$

tehát a legfeljebb negyedfokú polinom esetén is pontos a képlet.

Vizsgáljuk meg, hogy a kvadratura pontos-e a legfeljebb ötödfokú polinomok esetén!

Ha  $f(x) = x^5$ , akkor

$\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ , továbbá

$$\begin{aligned}
& a_0 \cdot f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + a_1 \cdot f(0) + a_2 \cdot f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \\
& = \frac{5}{9} \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^5 + \frac{8}{9} \cdot 0^5 + \frac{5}{9} \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^5 = 0,
\end{aligned}$$

tehát a legfeljebb ötödfokú polinom esetén is pontos a képlet.

Vizsgáljuk meg, hogy a kvadratura pontos-e a legfeljebb hatodfokú polinomok esetén!

Ha  $f(x) = x^6$ , akkor

$\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{2}{7}$ , továbbá

$$\begin{aligned}
& a_0 \cdot f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + a_1 \cdot f(0) + a_2 \cdot f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \\
& = \frac{5}{9} \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^6 + \frac{8}{9} \cdot 0^6 + \frac{5}{9} \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^6 = \frac{6}{25},
\end{aligned}$$

tehát a legfeljebb hatodfokú polinom esetén már nem pontos a képlet.

## 4 BEFEJEZÉS

A feladatgyűjteményben szereplő témakörök az alábbi felosztásban kerültek kidolgozásra:

Potyók Nikolett: Lebegőpontos számok; Lagrange interpoláció; Hermite interpoláció, spline-interpoláció; Közelítő integrálás.

Jobbágy Dávid: Lineáris egyenletrendszerek megoldása, mátrixok felbontása; Legkisebb négyzetek módszere; Nemlineáris egyenletek, egyenletrendszerek.

Lehóczky Bence: Normák, kondíciós számok; Sajátérték feladatok; Nemlineáris egyenletek, egyenletrendszerek.

A feladatgyűjteményben találhatóak mind táblás mind géptermi feladatok. A számítógéppel megoldott feladatokhoz a MATLAB programrendszert használtuk. Ez a rendszer nagy segítséget jelentett a megoldásaink egyszerű és gyors ellenőrzésében.

Kívánunk mindenkinek jó gyakorlást, és eredményes felkészülést.



## 5 KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton szeretnénk megragadni az alkalmat arra, hogy köszönetünket és tiszteletünket fejezzük ki Dr. Baran Ágnes témavezetőnek, és Kézi Csaba Gábor konzulensnek, akik a szakdolgozatunk elkészítéséhez nagyban hozzájárultak.

Valamint szeretnénk kifejezni köszönetünket családtagjainknak, akik szeretetükkel és segítségükkel mindvégig támaszt nyújtottak egyetemi tanulmányaink során és szakdolgozatunk elkészítésének teljes ideje alatt.

## 6 IRODALOMJEGYZÉK

- Galántai Aurél, Jenei András, Numerikus módszerek, Miskolci Egyetemi Kiadó, 2006
- Golub, van Loan: Matrix computations, The Johns Hopkins University press, 1996
- Lénárd Margit, Sztrik János, Numerikus analízis feladatgyűjtemény, KLTE, 1992
- Nicholas J. Higham, Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, Siam, 2002
- Stoyan Gisbert, Matlab, Typotex, 2008
- Stoyan Gisbert, Numerikus matematika mérnököknek és programozóknak, Typotex, 2007
- Stoyan Gisbert, Takó Galina, Numerikus módszerek 1., Typotex, 2002