

NUMMAT

1. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSA

Megjegyzés: A továbbiakban mátrixon négyzetes mátrixot értünk.

Fogalom: Felső-háromszög alakú mátrixok.

Módszer(FHM): Felső-háromszög alakú egyenletrendszerek megoldása $a_{ii} \neq 0$ esetén:

$$(1) \quad x_k = \left(b_k - \sum_{i=k+1}^n a_{ki} x_i \right) / a_{kk} \quad k = n \dots 1$$

Megjegyzés: Az (FHM) műveletigénye $n + 2(0 + 1 + \dots + (n - 1)) = n^2$.

Példa:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14$$

$$x_2 + 2x_3 = 8$$

$$3x_3 = 9$$

Fogalom: Alsó-háromszög alakú mátrixok.

Módszer(AHM): Alsó-háromszög alakú egyenletrendszer megoldása $a_{ii} \neq 0$ esetén:

$$(2) \quad x_k = \left(b_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} x_i \right) / a_{kk} \quad k = 1 \dots n$$

Megjegyzés: Az (AHM) műveletigénye $n + 2(0 + 1 + \dots + (n - 1)) = n^2$.

Példa:

$$x_1 = 1$$

$$2x_1 + x_2 = 4$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14$$

Fogalom: Felső-háromszög alakra hozás.

Módszer: Gauss-elimináció (GE):

```
U = A
gond=nincs
for i = 1...n do
    if 0 == uii then
        gond=van
        break
    end if
    for j = (i + 1)...n do
        lji = uji/uii
        uj = uj - ljiui
    end for
end for
```

Megjegyzés: Az (GE) műveletigénye $(n - 1) + 2((n - 1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2) \leq 2n^3/3$.

Példa:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -4x_1 - 3x_2 - 3x_3 &= -12 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Fogalom: Szigorúan domináns főátlójú mátrixok.

$$(3) \quad |a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad i = 1 \dots n$$

Állítás: Szigorúan domináns főátlójú mátrixokra a (GE) *gond* nélkül fut le.

Fogalom: LU felbontás, *k*-indexű Froebenius mátrix.

Állítás: Ha a (GE) hiba nélkül fut le akkor $A = LU$, ahol $l_{ii} = 1 \quad i = 1 \dots n$.

Megjegyzés: Nagy vonalakban: *L*-ben azt adminisztráljuk hogy milyen műveletet végzünk, az *U*-ban pedig elvégezzük azt.

Módszer: Az $Ax = LUx = b$ egyenletrendszer megoldása: $Ly = b, Ux = y$ megoldása ilyen sorrendben.

Példa:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -4 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(mo.: $(3, 2, -2)^T$)

Példa:

Van-e az A mátrixnak LU felbontása?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(mo.:nincs)

Megjegyzés: A felbontások egyik célja: rögzített A esetén *sokféle* b -re hatékonyan oldhassuk meg a $Ax = b$ egyenletrendszert.

Fogalom: PLU felbontás, pivot elem, permutációs mátrix.

Állítás: Minden mátrixnak létezik PLU felbontása (ami általában *nem* egyértelmű).

Megjegyzés: A P a végrehajtott sorcseréket adminisztrálja, explicit nem számoljuk

Módszer: Gauss-elimináció főelemkiválasztással (GE-FK):

$\pi = (1, 2, \dots, n)$

legyen L és U egy-egy mutató A -ra

for $i = 1 \dots n$ **do**

legyen j olyan hogy: $|u_{ji}| \geq \max(|u_{ii}|, |u_{i+1,i}|, \dots, |u_{ni}|)$

$cserere(u_i, u_j)$

$cserere(\pi(i), \pi(j))$

for $j = (i + 1) \dots n$ **do**

$l_{ji} = u_{ji} / u_{ii}$

$u_{jk} = u_{jk} - l_{ji} u_{ik} \quad k = (i + 1) \dots n$

end for

end for

Megjegyzés: Az LU -nál látott műveletigény aritmetikai része változatlan, szokás még az összehasonlítások számát is figyelembe venni: $(n-1) + \dots + 1 = n(n-1)/2 < n^2$.

Módszer: $Ax = PLUx = b$ helyett a $P^{-1}Ax = LUx = P^{-1}b$ -t kell megoldani. A konstrukcióból látható, hogy: $(P^{-1}b)(i) = b(\pi(i))$, azaz a π -beli cseréket b -elemein kell végrehajtani, majd az LU -nál látott módon megoldani az egyenletrendszert.

Példa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Oldjuk meg az $Ax = b$ egyenletrendszert (mo.: $x = (1, 2, -2, -1)^T$).

Fogalom:

- k -ad rendű sarokmátrix: $(A_k)_{ij} = A_{ij}$, $1 \leq i, j \leq k$.
- diagonális mátrix és tulajdonságai (DA (sor), AD (oszlop), D^{-1} (létezés))
- pozitív definit mátrix: $x^T Ax > 0$ $x \neq 0$.

Állítás: Ha A_k nem-szinguláris $k = 1 \dots (n-1)$ -re, akkor $A = LU$ és a faktorizáció egyértelmű.

Állítás: Ha $A = A^T$ és A_k nem-szinguláris $k = 1 \dots n$ -re, akkor $A = LDL^T$ és a faktorizáció egyértelmű.

Állítás: Ha $A = A^T$ és pozitív definit akkor $A = MM^T$.

Módszer(Szimmetrikus LU (Crout)):

legyen L egy mutató U -ra

for $i = 1 \dots n$ **do**

for $j = i \dots n$ **do**

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$$

$$l_{ji} = u_{ij} / u_{ii} \text{ ha } i \neq j$$

end for

end for

Példa:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ -4 & 13 & -17 \\ 8 & -17 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fogalom:

- norma definíciója (4 tulajdonság)
- fordított háromszög-egyenlőtlenség
- nevezetes normák $(1, 2, \infty)$.
- indukált mátrixnorma
- saját pár: $\lambda, x \ (x \neq 0) : Ax = \lambda x$.

Állítás:

- $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$
- $|\lambda| \leq \|A\|$ ha λ sajátértéke A -nak
- $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ oszlop-abszolútérték-összegek maximuma
- $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ sor-abszolútérték-összegek maximuma
- $\|A\|_2 = \sqrt{\max\{|\lambda| : \lambda \text{ sajátértéke } A^T A\text{-nak}\}}$

Fogalom: A reguláris mátrix kondíciószáma: $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

Megjegyzés: $\text{cond}(A) \geq 1$.

Állítás: (egyenletrendszer jobboldala hibás) Legyen A reguláris mátrix. Tfh: $Ax = b$ és $A(x + \delta x) = b + \delta b$. Ekkor

- $\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta b\|$
- $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$

Példa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1+t^2 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1+t^2 & -t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$$

Példa: Baran Ágnes feladatsora

2. LEGKISEBB NÉGYZETEK MÓDSZERE

Megjegyzés: Lineáris regresszió feladata amikor adott (t_i, f_i) $i = 1, \dots, m$ pontok esetén keressük azt az $f(t) = at + b$ egyenest, melyre: $S(a, b) = \sum_i (f(t_i) - f_i)^2$ minimális. Ilyen egyenes mindig létezik, a kérdés: hogyan határozzuk meg? Vizsgáljuk meg a szélsőérték létezéséhez szükséges feltételeket:

$$\begin{aligned}\frac{\delta S(a, b)}{\delta a} &= 0 \quad \frac{\delta S(a, b)}{\delta b} = 0 \\ \frac{\delta S(a, b)}{\delta a} &= 2 \sum_i (at_i + b - f_i)t_i = 0 \\ \frac{\delta S(a, b)}{\delta b} &= 2 \sum_i (at_i + b - f_i) = 0\end{aligned}$$

Ez egy kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer, oldjuk meg:

$$\begin{aligned}\sum_i (at_i + b - f_i)t_i &= a \sum_i t_i^2 + b \sum_i t_i - \sum_i f_i t_i = 0 \\ \sum_i (at_i + b - f_i) &= a \sum_i t_i + mb - \sum_i f_i = 0\end{aligned}$$

Átlagjelöléssel:

$$\begin{aligned}at^2 + b\bar{t} - \bar{f}\bar{t} &= 0 \\ a\bar{t} + b - \bar{f} &= 0\end{aligned}$$

Az másodikból kifejezve b -t és az elsőbe helyettesítve:

$$at^2 + (\bar{f} - a\bar{t})\bar{t} - \bar{f}\bar{t} = 0$$

Amiből:

$$a = \frac{\bar{f}\bar{t} - \bar{f}\bar{t}}{\bar{t}^2 - \bar{t}^2} \quad b = \bar{f} - a\bar{t}$$

Figyeljük meg hogy csak abban az esetben van gond, ha $\bar{t}^2 - \bar{t}^2 = 0$. Ez mit jelent ?

Példa: A $(0, 1), (-1, 10), (1, -2), (2, -23)$ pontokra "illesszünk" egyenest a fenti módszerrel.

Megjegyzés: A regresszió általánosabb formája: Legyen adott (t_i, f_i) $i = 1, \dots, m$ és φ_i $i = 1, \dots, n$ egy függvényrendszer. Keressük azt az $f = \sum_i x_i \varphi_i$ függvényt, melyre

$$S(x_1, \dots, x_n) = \sum_i (f(t_i) - f_i)^2 = \sum_i ((\sum_j x_j \varphi_j)(t_i) - f_i)^2 \quad \text{minimális.}$$

Állítás:(Gauss-féle normálegyenlet (GN))

Legyen $A_{ij} = a_{ij} = \varphi_j(t_i)$, azaz: $A = \begin{pmatrix} \varphi_1(t_1) & \dots & \varphi_n(t_1) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_1(t_m) & \dots & \varphi_n(t_m) \end{pmatrix}$

Ekkor, ha $A^T A$ nem-szinguláris akkor legkisebb négyzetek feladatának megoldása: az

$$A^T A x = A^T f$$

lineáris egyenletrendszer (egyértelmű) megoldása.

Megjegyzés: Ha $A^T A$ szinguláris akkor A oszlopai lineárisan függők, a φ_i rendszer felesleges elemet is tartalmaz, a modellt egyszerűsíteni kell. A normálegyenletet általában LDL^T -felbontással oldjuk meg, d_{ii} -re figyelve, vagyis ha az i index-nél következik be a szingularitás, akkor φ_i -t elhagyjuk a modelltől.

Példa: Baran Ágnes feladatsora

3. INTERPOLÁCIÓ

Megjegyzés: A polinomiális interpoláció alapfeladata: Legyen adott (t_i, f_i) $i = 0, \dots, (n-1)$ és $t_i \neq t_j$ ha $i \neq j$. Keressük azt a minimális fokszámú f polinomot, melyre $f(t_i) = f_i$ $i = 0..(n-1)$. Vagyis keresett polinom "átmegy" a pontokon, nem elég az hogy "elég közel" van hozzájuk.

Állítás: A fenti feltételekkel: Egyértelműen létezik egy legfeljebb $n - 1$ -fokú interpolációs polinom

Létezés: p_i legyen olyan, hogy $p_i(t_j) = \delta_{ij}$. Ekkor $p = \sum_i f_i p_i$ jó. Egyértelműség: egy legfeljebb $n - 1$ -fokú polinomnak legfeljebb $n - 1$ gyöke van.

Módszer: Egy $O(n^2)$ megvalósítás

$$L(t) = \prod_i (t - t_i), \quad n^2 \text{ művelet}$$

$$p_i(t) = \frac{L(t)}{(t - t_i)} \quad n^2 \text{ művelet}$$

$$\alpha_i = p_i(t_i) \quad n^2 \text{ művelet}$$

$$p = \sum_i f_i p_i \quad n^2 \text{ művelet}$$

Megjegyzés: Egy másik hozzáállás $p(t) = a_0 + (t - t_0)a_1 + \dots + (t - t_0)\dots(t - t_{n-2})a_{n-2}$ alakban keresi a polinomot. felírva a $p(t_i) = f_i$ összefüggéseket, a háromszög-alakú egyenletrendszereknél látott módon $O(n^2)$ művelettel kiszámolható az a_0, \dots, a_{n-2} .

Példa: Illesszünk a $(-1, 3), (0, 2), (2, 7)$ pontokra egy polinomot.

Példa: Baran Ágnes feladatsora

E-mail address: `noszaly.csaba@gmail.com`