

# Numerikus matematika

May 21, 2016

# Sajátértékek közelítése

Motiváció

wiki

# Sajátértékek közelítése

## Definíció

A továbbiakban mátrixon négyzetes mátrixot értünk. Ha  $\lambda, x_\lambda, x \neq 0$  olyan, hogy

$$Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$$

akkor  $\lambda$ -t  $A$  sajátértékének, a hozzá tartozó  $x_\lambda$ -t  $A$  sajátvektorának nevezzük.

# Sajátértékek közelítése

Cayley-Hamilton

$\lambda$  sajátértéke  $A$ -nak  $\Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$ .

Azaz, egy  $n$ -ed fokú polinom gyökeit kell meghatározni.

# Sajátértékek közelítése

Példa

feladatsor:1a

# Sajátértékek közelítése

## Alaptulajdonságok

1.  $|\lambda| \leq \|A\|$ , ahol  $\|\cdot\|$  vektornorma által indukált;
2.  $\exists A^{-1} \Leftrightarrow 0$  nem sajátértéke  $A$ -nak;
3. ha  $\lambda$  sajátértéke  $A$ -nak, akkor  $\frac{1}{\lambda}$  sajátértéke  $A^{-1}$ -nek;
4. ha  $\lambda$  sajátértéke  $A$ -nak, akkor  $\lambda^n$  sajátértéke  $A^n$ -nek;
5. ha  $\lambda$  sajátértéke  $A$ -nak és  $c \in \mathbb{R}$ , akkor  $\lambda - c$  sajátértéke  $A - cE$ -nek;
6.  $A$  és  $A^T$  sajátértékei megegyeznek.

# Sajátértékek közelítése

Gersgorin

Legyen  $R_i = K(a_{ii}, \sum_{j \neq i} |a_{ij}|)$ .

Ha  $\lambda$  sajátértéke  $A$ -nak, akkor  $\lambda \in \cup_i R_i$ .

# Sajátértékek közelítése

Gersgorin,élesítés

Ha  $i_1, \dots, i_n$  olyan, hogy  $\cup_{j=1}^k R_{i_j} \cap \cup_{j=k+1}^n R_{i_j} = \emptyset$ , akkor

$\cup_{j=1}^k R_{i_j}$  pontosan  $k$  darab sajátértéket tartalmaz.



# Sajátértékek közelítése

Gersgorin,következmény

Az  $A^T$ -hoz tartozó  $\bar{R}_i = K(a_{ii}, \sum_{j \neq i} |a_{ji}|)$  körökről ugyanezeket mondhatjuk.

# Sajátértékek közelítése

Gersgorin,következmény

Ha  $A$  szigorúan domináns főátlójú, akkor invertálható.

# Sajátértékek közelítése

Példa

feladatsor:8

# Sajátértékek közelítése

## Tulajdonságok

1. Ha  $A$   $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sajátértékei különbözőek, akkor a megfelelő  $v_1, \dots, v_n$  vektorok bázist alkotnak.
2. (Rayleigh) Az  $R(\alpha) = \|Ax - \alpha x\|$  mennyiséget az  $\alpha = \frac{x^T Ax}{x^T x}$  minimalizálja.

# Sajátértékek közelítése

## Hatvány-iteráció

Tegyük fel, hogy  $A$  sajátértékei különbözőek:  $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n|$ ,  $\{v_i\}$  a megfelelő sajátvektor-rendszer. Legyen  $x_0$ ,  $\|x_0\| = 1$  olyan vektor, melyre  $x = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ ,  $c_1 \neq 0$ . Ekkor az

$x_k = \frac{Ax_{k-1}}{\|Ax_{k-1}\|}$  sorozatra:

$x_k \rightarrow w_1$ , ahol  $w_1$  egy  $\lambda_1$ -hez tartozó sajátvektor.

# Sajátértékek közelítése

## Hatvány-iteráció

A gyakorlatban az  $x_0$ -ra vonatkozó feltételeket nehéz ellenőrizni, ezért több különböző pontból is futtatjuk az iterációt.

# Sajátértékek közelítése

Hatvány-iteráció, algo

```
 $n > 0, \|x\| = 1$   
while  $n > 0$  do  
     $x = \frac{Ax}{\|Ax\|}$   
     $n = n - 1$   
end while  
 $\lambda = \frac{x^T Ax}{x^T x}$ 
```

# Sajátértékek közelítése

Hatvány-iteráció, megjegyzések

A konvergencia sebessége a  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ -től függ. A módszer csak a domináns sajátvektor-érték közelítésének meghatározására alkalmas.



# Sajátértékek közelítése

Példa

hatit.m

matlab: *eig*

feladatsor:P1

# Sajátértékek közelítése

## Inverz-iteráció

Tegyük fel, hogy létezik  $A^{-1}$  és alkalmazzuk a hatvány-módszert  $A^{-1}$ -re. Megállapíthatjuk, hogy  $x_k \rightarrow w$ , ahol  $w$  a  $\lambda_n$ -hez, a "legkisebb" sajátértékhez tartozó sajátvektor. A gyakorlatban  $A^{-1}$ -et nem számoljuk, helyette a  $Ax_k = x_{k-1}$  egyenletrendszert oldjuk meg.

# Sajátértékek közelítése

Inverz-iteráció, algo

```
 $n > 0, \|x\| = 1$   
while  $n > 0$  do  
     $Ay = x$  megoldása  
     $x = \frac{y}{\|y\|}$   
     $n = n - 1$   
end while  
 $\lambda = \frac{x^T Ax}{x^T x}$ 
```

# Sajátértékek közelítése

Példa

invit.m

feladatsor:P1

matlab: *backslash*

# Sajátértékek közelítése

## Inverz-iteráció,eltolás

A módszer kiterjeszthető tetszőleges  $\lambda_m$  sajátérték meghatározására, ha rendelkezésre áll egy elég jó becslés. Legyen  $A$ -nak  $n$  különböző sajátértéke: ha  $c \in \mathbb{R}$  olyan, hogy  $|\lambda_m - c| = \min_i |\lambda_i - c|$ , akkor az inverz-iterációt  $A - cE$ -re végrehajtva:  $x_k \rightarrow w$ , ahol  $w$  egy a  $\lambda_m$ -hez tartozó sajátvektor.

# Sajátértékek közelítése

Példa

invit\_eltol.m

# Sajátértékek közelítése

## Rayleigh-iteráció

Az eltolásos inverz-iterációt módosíthatjuk úgy hogy nem adjuk meg előre az eltolást, hanem mindig az aktuális  $x_k$  segítségével számoljuk:

# Sajátértékek közelítése

Rayleigh-iteráció, algo

```
 $n > 0, \|x\| = 1$   
 $\lambda = x^T A x$   
while  $n > 0$  do  
     $(A - \lambda E)y = x$  megoldása  
     $x = \frac{y}{\|y\|}$   
     $\lambda = x^T A x$   
     $n = n - 1$   
end while
```



# Sajátértékek közelítése

Rayleigh-iteráció, megjegyzés

Valós, szimmetrikus mátrix esetén konvergens a módszer.

# Sajátértékek közelítése

Példa

invit\_ray.m