

3.8 Nemlineáris egyenletek és egyenletrendszerek

1. Az egyenletet írjuk $x = \frac{1}{3} \cdot \cos x$ alakba, és legyen $g(x) = \frac{1}{3} \cdot \cos x$, valamint $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \cos x - x$

Ekkor a $g(x) = x$ egyenlet gyökét keressük (azaz a g lépés fixpontját).

Mivel $g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, azaz a g leképezés a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumot önmagába képezi le, továbbá

$$g'(x) = -\frac{1}{3} \cdot \sin x \quad , \quad |g'(x)| = \frac{1}{3} \cdot |\sin x| \leq \frac{1}{3},$$

ezért a fixpont-iteráció konvergenciatételének feltételei teljesülnek, tehát bármely $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ kezdőpont esetén az $x_{k+1} = \frac{1}{3} \cdot \cos x_k$ sorozat ($k = 0, 1, 2, \dots$) tart az egyenlet gyökéhez. Az egyenletnek a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban egyetlen gyöke van.

A szükséges lépésszám becsléséhez a következő összefüggést használjuk

$$|x_k - x^*| \leq \frac{q^k}{1 - q} \cdot |g(x_0) - x_0|,$$

ahol x^* az egyenlet $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ -beli gyöke,

$$q = \max_{x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} |g'(x)|.$$

Esetünkben $x_0 = 0$, és ha a k értékét úgy határozzuk meg, hogy

$$\frac{q^k}{1 - q} \cdot |g(x_0) - x_0| < 0,5 \cdot 10^{-3}$$

teljesüljön, akkor a hiba kisebb lesz, mint $0,5 \cdot 10^{-3}$.

Behelyettesítve a fenti egyenlőtlenségbe

$$\frac{\frac{1}{3}^k}{1 - \frac{1}{3}} \cdot \left| \frac{1}{3} - 0 \right| < 0,5 \cdot 10^{-3}$$

amiből

$$k > 6,29,$$

tehát, ha legalább 7 lépést végzünk, a hiba kisebb lesz, mint $0,5 \cdot 10^{-3}$

Az iterációt számítógépen futtatva, az eredményeket táblázatba foglalva (az x_k értéket 6 tizedesjegyre kerekítve):

k	x_k	$f(x_k)$
0	0	0,333333
1	0,333333	-0,018348
2	0,314986	0,001948
3	0,316934	-0,000202
4	0,316732	$2,10 \cdot 10^{-5}$
5	0,316753	$-2,18 \cdot 10^{-6}$
6	0,316751	$2,26 \cdot 10^{-7}$

2. Írjuk át az egyenletet

$$x = \frac{3x^3 + 4}{12}$$

alakba. Ekkor a

$$g(x) = \frac{3x^3 + 4}{12}$$

választással a $g(x) = x$ egyenlet gyökét keressük.

Mivel $g : [0, 1] \rightarrow [\frac{1}{3}, \frac{7}{12}] \subset [0, 1]$, tehát a g leképezés a $[0, 1]$ intervallumot önmagába képezi le, továbbá

$$g'(x) = \frac{9x^2}{12} = \frac{3x^2}{4} \quad , \quad |g'(x)| = \frac{3x^2}{4} \leq \frac{3}{4} < 1,$$

ha $x \in [0, 1]$, így a konvergencia feltételek teljesülnek, tehát az $x_{k+1} = g(x_k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) iteráció konvergens tetszőleges $x_0 \in [0, 1]$ esetén.

Az $\{x_k\}$ sorozat tart az egyenlet egyetlen $[0, 1]$ -beli gyökéhez. Legyen

$$f(x) = \frac{3x^3 + 4}{12} - x$$

Az iterációt számítógépen futtatva, az eredményeket táblázatba foglalva (az x_k értéket 6 tizedesjegyre kerekítve):

k	x_k	$f(x_k)$
0	0	0,333333
1	0,333333	0,009259
2	0,342593	0,000793
3	0,343386	$7,00 \cdot 10^{-5}$
4	0,343456	$6,19 \cdot 10^{-6}$
5	0,343462	$5,48 \cdot 10^{-7}$
6	0,343463	$4,86 \cdot 10^{-8}$

3. Mivel a $h(x) = \ln x$ függvény szigorúan monoton növekvő, a $g(x) = 2 - x$ függvény szigorúan monoton csökkenő, továbbá $h(1) < g(1)$ és $h(2) > g(2)$ ezért az $\ln x = 2 - x$ egyenletnek egyetlen gyöke van, ami az $[1, 2]$ intervallumban található. Az egyenletet $\ln x + 2 - x = 0$ alakba írva alkalmazzuk a Newton-módszert az $x_0 = 1$ pontból indítva az iterációt.

Az $f(x) = \ln x + 2 - x$ jelölést bevezetve $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$, így az iteráció

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\ln x_k + x_k - 2}{\frac{1}{x_k} + 1} \quad k = 0, 1, \dots$$

Az iterációt számítógépen futtatva, az eredményeket táblázatba foglalva (az x_k értéket 6 tizedesjegyre kerekítve):

k	x_k	$f(x_k)$
0	1	-1
1	1,5	-0,094535
2	1,556721	$-6,97 \cdot 10^{-4}$
3	1,557146	$-3,72 \cdot 10^{-8}$

4. f -nek van gyöke $[0, 1]$ -ben, mert $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = e - 4 < 0$ és $f(x)$ folytonos. Vizsgáljuk meg a fixpont-iteráció konvergenciátételének feltételeit: a $g(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}}$ jelölést bevezetve

$$g : [0, 1] \rightarrow \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{e} \right] \subset [0, 1]$$

és $g'(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{x}{2}} < 1$.

Így az $\{x_k\}$ sorozat tetszőleges $x_0 \in [0, 1]$ esetén tart az egyenlet egyetlen $[0, 1]$ -beli gyökéhez.

5. A $\sqrt{5}$ az $f(x) = x^2 - 5$ függvény egyik zérushelye.

Legyen $x_0 = 2$. Mivel $f'(x) = 2x$, a Newton-módszer jelen esetben:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 5}{2x_k} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{5}{x_k} \right) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ekkor

k	x_k	$f(x_k)$
0	2	1
1	2,25	0,0625
2	2,236111	0,000193
3	2,236068	$1,00624 \cdot 10^{-9}$

6. Legyen $h(x) = \sin x$ és $g(x) = e^x$. Ekkor $h(-4) > g(-4)$ és $h(-3) < g(-3)$, ezért az $e^x = \sin x$ egyenletnek a $[-4, -3]$ intervallumban van gyöke. Az egyenletet $e^x - \sin x = 0$ alakba írva alkalmazzuk a Newton módszert az $x_0 = -4$ pontból indítva az iterációt. Az $f(x) = e^x - \sin x$ jelölést bevezetve $f'(x) = e^x - \cos x$, így az iteráció

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e_k^x - \sin x_k}{e_k^x - \cos x_k} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Az iterációt számítógépen futtatva, az eredményeket táblázatba foglalva (az x_k értéket 6 tizedesjegyre kerekítve):

k	x_k	$f(x_k)$
0	-4	-0,738487
1	-2,900995	0,293252
2	-3,186770	-0,003857
3	-3,183062	$5,85 \cdot 10^{-7}$
4	-3,183063	$2,01 \cdot 10^{-9}$

7. Ha $x_0 > 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{\sqrt{x_0}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_0}}} = x_0 - 2 \cdot x_0 = -x_0,$$

ha $x_0 < 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{-\sqrt{x_0}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{-x_0}}} = x_0 + 2 \cdot (-x_0) = -x_0.$$

Az iteráció során felváltva kapjuk az x_0 , illetve $-x_0$ értékeket, tehát a sorozat nem konvergál. A gépi megvalósítás során, a kerekítési hibák miatt, lassan ugyan, de az x_k sorozat tartani fog a gyökhöz.

8. Legyen $f(x) = x^3 - 3x - 2$, ekkor $f'(x) = 3x^2 - 3$. Ezeket felhasználva

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k - 2}{3x_k^2 - 3}, \text{ ahol } k = 0, 1, 2, \dots$$

Az eredményeket táblázatba foglalva:

k	x_k	$f(x_k)$
0	1,5	-3,125
1	2,333333	3,703704
2	2,055556	0,518690
3	2,001949	0,017567
4	2,000003	$2,23 \cdot 10^{-5}$
5	2,000000	0

9. Legyen $f(x) = x^3 - 3x + 2$, ekkor $f'(x) = 3x^2 - 3$. Így

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k + 2}{3x_k^2 - 3}, \text{ ahol } k = 0, 1, 2, \dots$$

Az eredményeket táblázatba foglalva:

k	x_k	$f(x_k)$
0	1,5	0,875
1	1,266667	0,232296
2	1,138562	0,060259
3	1,070777	0,015383
4	1,035792	0,003889
5	1,018001	$9,78 \cdot 10^{-4}$
6	1,009027	$2,45 \cdot 10^{-4}$

Látható, hogy a módszer lassabban konvergál mint az előző feladat esetén.

Az $x_{k+1} = x_k - 2 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $k=0, 1, 2, \dots$ iterációval

k	x_k	$f(x_k)$
0	1,5	0,875
1	1,033333	0,003370
2	1,000182	$9,954191 \cdot 10^{-8}$
3	1,000000	0

a konvergencia felgyorsult. A jelenség magyarázata, hogy az 1 az egyenlet kétszeres gyöke.

10. (a) Ha az iterációt valamely $x_0 \in (-1, 1)$ kezdőpontból indítjuk, akkor $x_k \rightarrow 0$, ha $k \rightarrow \infty$
 (b) Ha $x_0 \in [-1, 0)$, akkor $x_k \rightarrow -1$, ha $k \rightarrow \infty$, míg $x_0 \in (0, 1]$ esetén $x_k \rightarrow 1$, ha $k \rightarrow \infty$.

11. Legyen

$$G(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cos(2x_1 - x_2) - \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} \sin x_1 - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

és $T = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.

Ekkor $G: T \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T \subset \mathbb{R}^2$, és az $x = G(x)$ egyenlet gyökét közelítjük az $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$, $k=0, 1, 2, \dots$ iterációval.

Megvizsgáljuk a konvergencia feltételeit:

$$-1 \leq \frac{1}{4} \cos(2x_1 - x_2) - \frac{3}{4} \leq -\frac{1}{2} \implies G_1(x) \in [-\pi, \pi],$$

$$-1 \leq \frac{1}{3} \sin x_1 - \frac{2}{3} \leq -\frac{1}{3} \implies G_2(x) \in [-\pi, \pi],$$

tehát $G(T) \subset T$.

Ezek után felírjuk a G leképezés Jacobi-mátrixát:

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sin(2x_1 - x_2) & \frac{1}{4} \sin(2x_1 - x_2) \\ \frac{1}{3} \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\|J\|_\infty \leq \frac{3}{4}$, így a $G(x)=x$ egyenletnek pontosan 1 gyöke van T -ben. Minden $x^{(0)} \in T$ kezdővektor esetén az $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$ sorozat tart ehhez a gyökhöz.

12. $T = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 2]$

Legyen

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0,1x_1^2 + 0,1x_2^2 + 0,1x_3^2 \\ 0,1x_1 + 0,1x_2 + 0,1x_3 \\ 0,1x_1x_2x_3 \end{pmatrix}.$$

Látható, hogy a $g(T) \subseteq T$

Ezek után felírjuk a g leképezés Jacobi-mátrixát:

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2x_1 & 0,2x_2 & 0,2x_3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1x_1x_2 & 0,1x_1x_3 & 0,1x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

A J sornormája: $\|J\|_\infty \leq 0,8 < 1$

A konvergencia feltételei teljesülnek, így az iteráció minden $x^{(0)} \in T$ kezdővektor esetén konvergál.