

## Lagrange interpoláció

**1.** Határozzuk meg az alábbi pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

- (a)  $(-3, -6), (-2, -17), (-1, -8), (1, -2), (2, 19),$
- (b)  $(-3, -31), (-2, -8), (1, 1), (2, 22),$
- (c)  $(-2, -13), (-1, -4), (1, 2),$
- (d)  $(-2, -5), (-1, 3), (0, 1), (2, 15),$
- (e)  $(-1, 4), (1, 2), (2, 10), (3, 40),$
- (f)  $(-2, 38), (-1, 5), (1, -1), (2, -10), (3, -7),$
- (g)  $(-2, -33), (-1, -2), (1, 6), (2, 7), (3, -18),$
- (h)  $(-3, -209), (-2, -43), (-1, -1), (1, -1), (2, -19).$

**2.** Határozzuk meg a  $(-2, -6), (0, 4), (1, -3), (2, -10)$  pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot! Határozzuk meg azt a minimális fokszámú polinomot, amely az előző pontokon kívül áthalad a  $(-1, 2)$  ponton is!

**3.** Közelítsük az  $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$  függvényt a  $[-1, 1]$  intervallumon másodfokú polinommal a  $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$  pontokra támaszkodva! Becsüljük meg a közelítés hibáját!

**4.** Az alábbi táblázatban egy másodfokú  $p$  polinom helyettesítési értékei láthatóak, melyek közül pontosan egy hibás. Határozza meg a hibás értéket, helyettesítse a helyes értékkel és adja meg a  $p$  polinomot!

$x_i$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$
$p_i$	$15$	$9$	$5$	$3$	$2$	$5$

**5.** Igazoljuk, hogy ha  $f$  kétszer folytonosan differenciálható, akkor lineáris interpoláció esetén az interpoláció hibájára

$$|f(x) - L_1(x)| \leq \frac{M_2}{8}h^2, \quad a \leq x \leq b$$

teljesül, ahol  $a$  és  $b$  a két alappont,  $h = b - a$  és  $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ .

**6.** Milyen sűrűn kell megadni az  $f(x) = \cos(x)$  függvény értékeit az  $[0, \pi]$  intervallumon, hogy szakaszonként lineárisan interpolálva a hiba kisebb legyen mint  $0.5 \cdot 10^{-4}$ ?

**7.** Horner-algoritmus segítségével határozzuk meg  $p(x^*)$  értékét!

- a)  $p(x) = 2x^5 - 3x^4 - x^3 + 5x - 2$ , és  $x^* = -2$ ,
- b)  $p(x) = -x^6 + 4x^5 - 2x^4 + x^2 + 3x - 4$ , és  $x^* = 2$ .

## Hermite interpoláció, spline-interpoláció

**1.** Határozzuk meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

(a) 

$x_i$	-1	1	2
$f(x_i)$	4	6	94
$f'(x_i)$	9	17	213

(b) 

$x_i$	-2	-1	1
$f(x_i)$	13	3	7
$f'(x_i)$	-31	14	18
$f''(x_i)$		-40	

(c) 

$x_i$	-1	1	2
$f(x_i)$	4	2	91
$f'(x_i)$	5	9	269
$f''(x_i)$		42	

(d) 

$x_i$	-1	1	2
$f(x_i)$	-1	3	23
$f'(x_i)$	2	2	59

(e) 

$x_i$	-2	-1	1
$f(x_i)$	-10	-2	2
$f'(x_i)$	-20	10	10
$f''(x_i)$		-16	

(f) 

$x_i$	-1	1	2
$f(x_i)$	7	-1	-35
$f'(x_i)$	-20	-4	-98

(g) 

$x_i$	-2	-1	1
$f(x_i)$	45	0	6
$f'(x_i)$	-190	5	29
$f''(x_i)$		2	

**2.** Legyen az  $f$  valós függvény differenciálható az  $x_0$  pontban. Hermite-interpoláció segítségével írjuk fel az  $f$  függvény  $x_0$ -beli érintőjének egyenletét!

**3.** Írjuk fel az  $f(x) = \cos x - x^2 - 3x$  függvény  $x = 0$  pontbeli érintőjének egyenletét!

**4.** Írjuk fel az  $x_0, f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$  adatokra illeszkedő Hermite-polinomot!

**5.** Határozzuk meg azt a folytonosan differenciálható, szakaszonként harmadfokú

$$H(x) = \begin{cases} H_1(x), & \text{ha } x \in [-1, 1] \\ H_2(x), & \text{ha } x \in (1, 3] \end{cases}$$

polinomot, melyre  $H(-1) = 4, H(1) = 6, H(3) = 12, H'(-1) = -3, H'(1) = 13, H'(3) = 9$  teljesül!

**6.** Határozzuk meg azt a folytonosan differenciálható, szakaszonként harmadfokú

$$H(x) = \begin{cases} H_1(x), & \text{ha } x \in [-1, 1] \\ H_2(x), & \text{ha } x \in (1, 3] \end{cases}$$

polinomot, melyre  $H(-1) = 4, H(1) = 6, H(3) = 12, H'(-1) = -3, H'(1) = \alpha, H'(3) = 9$  teljesül, ahol  $\alpha \in \mathbb{R}$ !

**7.** Az előző feladatban határozzuk meg  $\alpha$  értékét úgy, hogy  $H(x)$  kétszer folytonosan differenciálható legyen!

8. Határozzuk meg az alábbi adatokhoz tartozó harmadfokú spline-t!

$x_i$	-2	-1	0	1	2	3
$S$	4	1	7	4	12	9
$S'$	15					8

**P1.** Írjon egy programot, amely adott  $n$ ,  $a_n, \dots, a_0$  és  $x^*$  bemenő értékek esetén Horner-algoritmus segítségével kiszámítja  $p(x^*)$ -ot, ahol

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

**P2.** Írjon egy programot, amely adott  $n$ ,  $b_0, \dots, b_n$  és  $x^*$  bemenő értékek esetén általánosított Horner-algoritmus segítségével kiszámítja  $L_n(x^*)$ -ot, ahol

$$L_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

**P3.** Írjon egy programot, amely adott  $n$ ,  $x_0, \dots, x_n$ ,  $f_0, \dots, f_n$  esetén kiszámítja a Lagrange-polinom Newton-alakjához szükséges osztott differenciákat!