

Numerikus matematika

April 30, 2016

Legkisebb négyzetek módszere

Lineáris regresszió feladata amikor adott $(t_i, f_i) \quad i = 1, \dots, m$ pontok esetén keressük azt az $f(t) = at + b$ egyenest, melyre:
 $S(a, b) = \sum_i (f(t_i) - f_i)^2$ minimális.

Legkisebb négyzetek módszere

Ilyen egyenes mindig létezik, a kérdés: hogyan határozzuk meg?
Vizsgáljuk meg a szélsőérték létezéséhez szükséges feltételeket:

Legkisebb négyzetek módszere

$$\frac{\delta S(a,b)}{\delta a} = 0 \quad \frac{\delta S(a,b)}{\delta b} = 0$$

$$\frac{\delta S(a,b)}{\delta a} = 2 \sum_i (at_i + b - f_i)t_i = 0$$

$$\frac{\delta S(a,b)}{\delta b} = 2 \sum_i (at_i + b - f_i) = 0$$

Ez egy kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer, oldjuk meg:

$$\sum_i (at_i + b - f_i)t_i = a \sum_i t_i^2 + b \sum_i t_i - \sum_i f_i t_i = 0$$

$$\sum_i (at_i + b - f_i) = a \sum t_i + mb - \sum_i f_i = 0$$

Legkisebb négyzetek módszere

Átlagjelöléssel:

$$a\bar{t}^2 + b\bar{t} - \bar{f}t = 0$$

$$a\bar{t} + b - \bar{f} = 0$$

Az másodikból kifejezve b -t és az elsőbe helyettesítve:

$$a\bar{t}^2 + (\bar{f} - a\bar{t})\bar{t} - \bar{f}t = 0$$

Legkisebb négyzetek módszere

Amiből:

$$a = \frac{\overline{ft} - \overline{f}\overline{t}}{\overline{t^2} - \overline{t}^2} \quad b = \overline{f} - a\overline{t}$$

Figyeljük meg hogy csak abban az esetben van gond, ha $\overline{t^2} - \overline{t}^2 = 0$. Ez mit jelent ?

Legkisebb négyzetek módszere

Példa: A $(0, 1)$, $(-1, 10)$, $(1, -2)$, $(2, -23)$ pontokra "illesszünk" egyenest a fenti módszerrel.

Legkisebb négyzetek módszere

Megjegyzés: A regresszió általánosabb formája: Legyen adott (t_i, f_i) $i = 1, \dots, m$ és φ_i $i = 1, \dots, n$ egy függvényrendszer. Keressük azt az $f = \sum_i x_i \varphi_i$ függvényt, melyre

$$S(x_1, \dots, x_n) = \sum_i (f(t_i) - f_i)^2 = \sum_i ((\sum_j x_j \varphi_j)(t_i) - f_i)^2 \quad \text{minimális.}$$

Legkisebb négyzetek módszere

Állítás:(Gauss-féle normálegyenlet (GN))

Legyen $A_{ij} = (a_{ij}) = \varphi_j(t_i)$, azaz:

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_1(t_1) & \dots & \varphi_n(t_1) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_1(t_m) & \dots & \varphi_n(t_m) \end{pmatrix}$$

Legkisebb négyzetek módszere

Ekkor, ha $A^T A$ nem-szinguláris akkor legkisebb négyzetek feladatának megoldása: az

$$A^T A x = A^T f$$

lineáris egyenletrendszer (egyértelmű) megoldása.

Legkisebb négyzetek módszere

Megjegyzés: Ha $A^T A$ szinguláris akkor A oszlopai lineárisan függőek, a φ_i rendszer felesleges elemet is tartalmaz, a modellt egyszerűsíteni kell. A normálegyenletet általában LDL^T -felbontással oldjuk meg, d_{ii} -re figyelve, vagyis ha az i index-nél következik be a szingularitás, akkor φ_i -t elhagyjuk a modellből.

Legkisebb négyzetek módszere

Példa: A

$$(-1, -1), (0, 1), (1, 1.5), (2, 1)$$

pontokhoz határozzuk meg a legjobban közelítő másodfokú polinomot, a fenti módszerrel.

Legkisebb négyzetek módszere

További példák: `http:`

`//www.inf.unideb.hu/valseg/dolgozok/szagnes/nmGI4.pdf`