

Numerikus, IK205

April 20, 2013

Interpoláció

Az alapfeladat: Legyen adott $(t_i, f_i) \quad i = 1, \dots, n$. Keressük azt a minimális fokszámú p polinomot, melyre $p(t_i) = f_i \quad i = 1..n$.

Vagyis keresett polinom "átmegy" a pontokon, nem elég az hogy "elég közel" van hozzájuk.

Interpoláció

Alaptétel

Ha $(t_i, f_i) \ i = 1, \dots, n$ ($t_i \neq t_j$), akkor egyértelműen létezik egy legfeljebb $n - 1$ -fokú interpolációs polinom

Interpoláció

Alaptétel

Létezés: Legyen

$$p_i(t) = \frac{\prod_{j \neq i} (t - t_j)}{\prod_{j \neq i} (t_i - t_j)}. \quad (1)$$

Ekkor $p = \sum_i f_i p_i$ megfelelő.

Interpoláció

Alaptétel

Egyértelműség: Egy legfeljebb $n - 1$ -fokú polinomnak legfeljebb $n - 1$ gyöke van. A p fenti alakja módszert is ad az interpolációs polinom számolására.

Interpoláció

Megjegyzés

A p polinomot a $(t_i, f_i)_{i=1}^n$ pontokra illeszkedő *Lagrange* polinomnak is nevezik.

Interpoláció

Módszer (L1)

Egy $O(n^2)$ megvalósítás vázlata:

1. $L(t) = \prod_i (t - t_i)$
2. $p_i(t) = \frac{L(t)}{(t-t_i)}$
3. $\alpha_i = p_i(t_i)$, $p_i(t) = p_i(t)/\alpha_i$
4. $p = \sum_i f_i p_i$

Ez összesen $O(n^2)$ alatt megvalósítható.

Interpoláció

Módszer (L2)

Osztott differenciákra épülő módszer. Legyen

$$p(t) = a_0 + a_1(t - t_1) + \dots + a_m(t - t_1)\dots(t - t_m) \text{ és } x \in \mathbb{R}.$$

Tekintsük az alábbi módszert:

Interpoláció

Módszer (L2)

$$f_i^{(0)} = f_i \quad i = 1 \dots m$$

for $k = 1 \dots m$ **do**

for $i = 1 \dots (m - k)$ **do**

$$f_i^{(k)} = \frac{f_i^{(k-1)} - f_{i+1}^{(k-1)}}{t_i - t_{i+k}}$$

end for

end for

Interpoláció

Módszer (L2)

Ekkor: $f_1^{(0)} = a_0$, $f_1^{(1)} = a_1$, ..., $f_1^{(m)} = a_m$ teljesül.

Interpoláció

Horner

Polinommal való interpoláció esetén gyakran van szükség helyettesítési értékek kiszámolására, ennek legnépszerűbb formája az ún. Horner módszer.

Interpoláció

Horner (HM1)

Horner-módszer polinom kiértékelésére. Legyen

$p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m$ és $x \in \mathbb{R}$. Ekkor a következő módszer

$p(x)$ -et adja eredményül:

Interpoláció

Horner (HM1)

$$px = a_m$$

for $i = (m - 1) \dots 0$ **do**

$$px = px * x + a_i$$

end for

Interpoláció

Példa

Legyen $p(t) = -1 + t - 2t^2 + t^3 - 3t^4 + 2t^5$. Határozzuk meg $p(-1)$ -et Horner módszerrel.

Interpoláció

Horner (HM2)

Horner-módszer polinom kiértékelésére. Legyen

$p(t) = a_0 + a_1(t - t_1) + \dots + a_m(t - t_1)\dots(t - t_m)$ és $x \in \mathbb{R}$. Ekkor a következő módszer $p(x)$ -et adja eredményül:

Interpoláció

Horner (HM2)

$$p_x = a_m$$

for $i = m \dots 1$ **do**

$$p_x = p_x * (x - t_i) + a_{i-1}$$

end for

Interpoláció

Példa

Illesszünk a $(-1, 3)$, $(0, 2)$, $(2, 7)$, $(3, 1)$ pontokra egy polinomot az (L2) módszerrel és határozzuk meg $p(1)$ -et.

Interpoláció

Matlab

horn1.m + horn2.m

Interpoláció

Lineáris interpoláció

$$p(t) = f_1 + \frac{f_1 - f_2}{t_1 - t_2} t.$$

Interpoláció

Kvadratikus interpoláció ekvidisztáns pontokra

$$t_1 < t_2 < t_3, \quad h = t_2 - t_1 = t_3 - t_2$$

$$p(t) = f_1 + \frac{f_2 - f_1}{h}(t - t_1) + \frac{f_1 - 2f_2 + f_3}{2h^2}(t - t_1)(t - t_2)$$

Interpoláció

Hiba

Fontos tudni, hogy (legrosszabb esetben) mekkora hibát követünk el, ha egy f függvényt a t_1, \dots, t_n pontokra épülő interpolációs polinommal "helyettesítünk".

Interpoláció

Hibaformula

Legyen f egy n -szer folytonosan differenciálható függvény és p az $(t_i, f(t_i))_{i=1}^n$ pontokra illeszkedő Lagrange polinom és $(a, b) = (\min(t_1, \dots, t_n), \max(t_1, \dots, t_n))$. Ekkor:

Interpoláció

Hibaformula

$$|f(t) - p(t)| \leq \frac{M_n}{n!} \max_{u \in [a,b]} |\omega(u)|$$

Ahol $M_n = \max_{u \in [a,b]} |f^{(n)}(u)|$ és $\omega(u) = \prod_{i=1}^n (u - t_i)$. (Rolle tétele.)

Interpoláció

Hibaformula

$$|f(t) - p(t)| \leq \frac{M_n}{n!} |b - a|^n$$

$$|u - t_i| \leq |b - a| \text{ miatt.}$$

Interpoláció

Hibaformula

Az $n = 2, 3$ esetekben nem nehéz a durva becslésnél jobbat találni.

Interpoláció

Lineáris hibaformula

$$|f(t) - p(t)| \leq \frac{M_n}{8} |b - a|^2$$

Interpoláció

Lineáris hibaformula

A $h = b - a$ jelöléssel $u = t_1 + th$ $t \in [0, 1]$, ezt beírva ω -ba:

$|\omega(u)| = h^2|t(t-1)| = h^2t(1-t) \leq \frac{h^2}{4}$, ahol az utolsó lépésben a számtani-mértani egyenlőtlenséget használtuk.

Interpoláció

Kvadratus hibaformula

Legyen p az $a, \frac{a+b}{2}, b$ pontokra épülő Lagrange-polinom. Ekkor:

$$|f(t) - p(t)| \leq M_n \frac{1}{72\sqrt{3}} |b - a|^3$$

Interpoláció

Kvadratus hibaformula

Legyen $c = \frac{a+b}{2}$, $h = c - a$, $u = c + th$ $t \in [-1, 1]$.

$$\omega(u) = (u-a)(u-c)(u-b) = h^3(t+1)t(t-1) \rightarrow |\omega(u)| \leq \frac{2h^3}{3\sqrt{3}}.$$

Interpoláció

Példa

kvadlag.m + error.m

Interpoláció

Hermite

Ha nem csak a függvényértékeket ismerjük az alppontokban, hanem néhány derivált értéket is, akkor is elvégezhető az interpoláció.

Interpoláció

Hermite

Legyen $t_1 < \dots < t_n$. Tegyük fel, hogy adottak a:

$$t_1, f_1^{(0)}, \dots, f_1^{(m_1)},$$

...

$$t_n, f_n^{(0)}, \dots, f_n^{(m_n)}$$

értékek. Ekkor:

Interpoláció

Hermite alaptétel

Egyértelműen létezik egy legfeljebb $m - 1$ fokú polinom, ahol $m = \sum_{i=1}^n (1 + m_i)$, melyre teljesül:

$$p^{(j)}(t_i) = f^{(j)}(t_i),$$

$$i = 1 \dots n, \quad j = 0 \dots m_i\text{-re.}$$

Interpoláció

Hermite algoritmus

Csak a numerikus meghatározással foglalkozunk. Ez hasonló a sima Lagrange polinom osztott-differenciás meghatározásánál látottakkal a következő kiegészítéssel: az alappontokat növekvőleg rendezzük, a t_i -t $1 + m_i$ multiplicitással felírjuk.

Interpoláció

Hermite algoritmus

Ekkor az $f^{(0)}$ -ak felírása után, a számolások ugyanúgy végzendők mint a sima Lagrange-nál, kivéve, ha 0-val osztanánk: ekkor erre a helyre az adatok közül a megfelelő $\frac{f_i^{(j)}}{j!}$ -t tesszük.

Interpoláció

Módszer (H)

$$(g_i^{(0)} = f_i^{(0)})_{i=1}^m, \quad u = (t_1, t_1, \dots, t_1, t_2, \dots, t_2, \dots, t_n, \dots, t_n)$$

for $k = 1 \dots m$ **do**

for $i = 1 \dots (m - k)$ **do**

 ha $u_i = u_{i+k}$ akkor: $g_i^{(k)} = \frac{f_j^{(k)}}{k!}$, ahol $u_i = t_j$,

 egyébként: $g_i^{(k)} = \frac{f_i^{(k-1)} - f_{i+1}^{(k-1)}}{u_i - u_{i+k}}$.

end for

end for

Interpoláció

Feladatok

katt ide

Lagrange/2., 3., 7.

Hermite/1c, 2, 3, 4

Integrálás

Bevezető

Vannak függvények - például a e^{-x^2} - melyek központi szerepet játszanak a legkülönbözőbb tudományterületeken, de nem tudjuk a határozott integráljukat kiszámítani. Nem azért, mert ügyetlenek vagyunk, hanem mert *elemien* nem integrálhatók. Ez indokolta közelítő eljárások kidolgozását határozott integrálok számítására. Bővebben lásd itt.

Integrálás

Bevezető

Adott f függvény esetén olyan $I(f, n, a, t) = \sum_{i=1}^n a_i f(t_i)$ formulákat találni melyekben az ismeretlen a_i -k könnyen számolhatók és $|\int_a^b f(t)dt - I(f, n, a, t)|$ "elég" kicsi. Az $I(f, n, a, t)$ -ket szokás *kvadratura* képletnek is nevezni.

Integrálás

Trapézformula

A legegyszerűbb ha az f függvényt az $[a, b]$ -n lineárisan interpoláljuk, és az integrált az egyenes integráljával közelítjük.

Integrálás

Trapézformula

Az:

$$\int_a^b f(a) + \frac{f(a)-f(b)}{a-b}(t-a)dt$$

integrált számoljuk ki, ami egy trapéz területe:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

Ez az egyszerű trapézformula.

Integrálás

Trapézformula hiba

$$A \ T(f, a, b) = T(f) = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

jelölést bevezetve adódik a:

$$| \int_a^b f(t)dt - T(f) | \leq \frac{M_2}{2}(b-a)^3$$

becslés.

Integrálás

Trapézformula hiba

Látható, hogy a trapézformula legfeljebb *elsőfokú* függvényekre pontos.

Integrálás

Összetett trapézformula

Ha egy függvény integrálját közelítjük $[a, b]$ -n, gyakran az integrálási tartományt m *egyforma* részre bontjuk

$$a = x_1 < \dots < x_{m+1} = b$$

és a kapott $[x_i, x_{i+1}]$ részeken valamilyen egyszerű kvadratúrát használva felépítünk belőlük egy ún. összetett formulát:

Integrálás

Összetett trapézformula

$$T(f, m) = \sum_{i=1}^m T(f, x_i, x_{i+1}) =$$

$$h \left(\frac{f(x_1)}{2} + f(x_2) + \dots + f(x_m) + \frac{f(x_{m+1})}{2} \right)$$

ahol $h = \frac{b-a}{m}$.

Integrálás

Összetett trapézformula hiba

A $h = \frac{b-a}{m}$ jelöléssel érvényes a:

$$\left| \int_a^b f(t) dt - T(f, m) \right| \leq \frac{M_2}{2} (b-a) h^2$$

becslés.

Integrálás

Összetett trapézformula hiba

Egy ilyen hibaformula gyakorlati haszna, hogy megbecsülhetjük segítségével, azt hogy szakaszonkénti integrálással hány részre kell legalább osztani az $[a, b]$ -t egy adott hibahatár eléréséhez.

Integrálás

Simpson-formula

Pontosabb eredményre számíthatunk, ha lineáris helyett kvadratikus interpolációt veszünk alapul.

Integrálás

Simpson-formula

Jelölje $S(f, a, b)$ az $(a, f(a)), (\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2})), (b, f(b))$ pontokra illesztett polinom integrálját $[a, b]$ -n. Elemi számolással adódik a:

$$S(f, a, b) = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$$

formula.

Integrálás

Simpson-formula hiba

A trapézformulához hasonlóan kapható becslés itt is, de ha feltesszük az $f^{(4)}$ folytonosságát, akkor többet is mondhatunk:

Integrálás

Simpson-formula hiba

$$\left| \int_a^b f(t) dt - S(f, a, b) \right| \leq M_4 \frac{(b-a)^5}{2880},$$

$$\text{ahol } M_4 = \max_{u \in [a, b]} |f^{(4)}(u)|.$$

Integrálás

Összetett Simpson-formula

Ha m egyenlő részre osztjuk az $[a, b]$ -t és a részeken alkalmazzuk az elemi formulát, $h = \frac{b-a}{m}$ jelöléssel megkapjuk a

$$S(f, m) = \sum_{i=1}^m S(f, x_i, x_{i+1}) =$$

$$\frac{h}{6} \left(f(x_1) + 4f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + 2f(x_2) + \dots + 4f\left(\frac{x_m+x_{m+1}}{2}\right) + f(x_{m+1}) \right)$$

összetett formulát.

Integrálás

Összetett Simpson-formula hiba

Az elemi formulára adott becslést alkalmazva kapjuk a:

$$\left| \int_a^b f(t) dt - S(f, m) \right| \leq M_4(b-a) \frac{h^4}{2880},$$

becslést, ahol $M_4 = \max_{u \in [a,b]} |f^{(4)}(u)|$.

Integrálás

Matlab

myfun.m + trapez.m

Integrálás

Adaptív módszerek

A gyakorlatban a formulákban szereplő M_n meghatározása nehéz lehet, nélkülük viszont nem tudunk becslést adni arra, hogy adott pontosság eléréséhez hány részre kell felosztani az $[a, b]$ -t. Ennek a problémának a megoldására *adaptív, alkalmazkodó* módszereket dolgoztak ki.

Integrálás

Adaptív módszerek

Egy adaptív trapézmódszer megvalósításért katt ide.

Integrálás

Feladatok

katt ide

1, 2, 3, 4