

3.4 Legkisebb négyzetek módszere

1. (a)

A modell: $F(t)=a+bt$, a mérési adatok száma $m=4$. A modell paramétereit az

$$\begin{pmatrix} m & \sum_{i=1}^m t_i \\ \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m f_i \\ \sum_{i=1}^m t_i f_i \end{pmatrix}$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk. Behelyettesítve a megadott értékeket:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{13}{6} \end{pmatrix}.$$

A mátrix determinánsa 20, így a lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható (ez már az adatokból is leolvasható, mivel legalább 2 különböző t_i érték adott).

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{13}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{12} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Így az illesztett modell: $F(t)=-\frac{5}{12}+\frac{1}{2}t$.

(b)

A modell: $F(t)=a+bt$ a mérések száma $m=5$. Mivel a t_i értékek között van legalább 2 különböző, ezért a feladat egyértelműen megoldható.

A megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

A mátrix determinánsa 64, így

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{1}{64} \begin{pmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{32} \\ -\frac{33}{128} \end{pmatrix}$$

az illesztett modell: $F(t)=-\frac{13}{32}-\frac{33}{128}t$.

(c)

A modell továbbra is: $F(t)=a+bt$ de a mérések száma 6 így az $m=6$. Mivel itt is van

legalább 2 különböző t_i érték így a feladat egyértelműen megoldható.
A megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} 6 & \frac{21}{2} \\ \frac{21}{2} & \frac{91}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ \frac{203}{8} \end{pmatrix}.$$

A mátrix determinánsa $\frac{105}{4}$ így

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{4}{105} \begin{pmatrix} \frac{91}{4} & -\frac{21}{2} \\ -\frac{21}{2} & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ \frac{203}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

az illesztett modell: $F(t) = \frac{1}{4} + t$.

(d)

A megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 4 \end{pmatrix}.$$

A mátrix determinánsa 50, így

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{10} \\ -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

az illesztett modell: $F(t) = \frac{13}{10} - \frac{3}{10}t$.

2. (a)

A modell amivel közelítünk az $F(t) = c_1 + c_2t + c_3t^2$ alakú. Az ismeretlen c_1, c_2, c_3 paramétereket az $A^T A = A^T f$ Gaus- féle normálegyenlet megoldásával kapjuk, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \\ 1 & t_4 & t_4^2 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}.$$

Ebből

$$A^T A = \begin{pmatrix} m & \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 \\ \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 & \sum_{i=1}^m t_i^3 \\ \sum_{i=1}^m t_i^2 & \sum_{i=1}^m t_i^3 & \sum_{i=1}^m t_i^4 \end{pmatrix}; \quad A^T f = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m f_i \\ \sum_{i=1}^m t_i \cdot f_i \\ \sum_{i=1}^m t_i^2 \cdot f_i \end{pmatrix}$$

az adatokat behelyettesítve:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

Ennek megoldása: $c_1 = \frac{37}{40}$, $c_2 = \frac{51}{40}$, $c_3 = -\frac{25}{40}$

így az illesztett modell: $F(t) = \frac{37}{40} + \frac{51}{40}t - \frac{25}{40}t^2$.

(b)

A modell amivel közelítünk az $F(t) = c_1 + c_2t + c_3t^2$ alakú. Az ismeretlen c_1 , c_2 , c_3 paramétereket a

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 9 \\ 7 & 9 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

egyenlet megoldásával kapjuk.

Ennek megoldása: $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{3}{4}$, $c_3 = \frac{3}{4}$

így az illesztett modell: $F(t) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}t + \frac{3}{4}t^2$.

3. Mivel az alappontok között csak 2 különböző érték szerepel elsőfokú polinommal érdemes közelíteni (magasabb fokszámú polinom esetén a megoldandó lineáris egyenletrendszer szinguláris lesz, a feladatnak végtelen sok megoldása lesz).

A modell : $F(t) = a + bt$, a mérési adatok száma pedig $m=5$. A modell paramétereit az

$$\begin{pmatrix} m & \sum_{i=1}^m t_i \\ \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m f_i \\ \sum_{i=1}^m t_i f_i \end{pmatrix}$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk. Behelyettesítve a megadott értékeket:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.1 \\ 1.2 \end{pmatrix}.$$

A mátrix determinánsa 54, így a lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.1 \\ 1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{61}{60} \\ \frac{1}{60} \end{pmatrix}.$$

Így az illesztett modell: $F(t) = \frac{61}{60} + \frac{1}{60}t$.

4. Itt is a Gauss-féle normálegyenletet kell megoldani ami a következő $A^T A x = A^T f$
Az A matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\pi t_1) & \sin(\pi t_1) \\ 1 & \cos(\pi t_2) & \sin(\pi t_2) \\ 1 & \cos(\pi t_3) & \sin(\pi t_3) \\ 1 & \cos(\pi t_4) & \sin(\pi t_4) \\ 1 & \cos(\pi t_5) & \sin(\pi t_5) \\ 1 & \cos(\pi t_6) & \sin(\pi t_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kiszámoljuk az $A^T A$ és $A^T f$ mátrixokat:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{4} \\ \frac{19}{4} \\ -3 \end{pmatrix}.$$

az adatokat behelyettesítve:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{4} \\ \frac{19}{4} \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ennek megoldása: $c_1 = -\frac{277}{32}$, $c_2 = \frac{181}{96}$, $c_3 = -\frac{67}{96}$

Így az illesztett modell: $F(t) = -\frac{277}{32} + \frac{181}{96} \cos(\pi t_1) - \frac{67}{96} \sin(\pi t_1)$.

Ha a második táblázat adatait közelítjük:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Mivel $\det(A^T A) = 0$, ezért a lineáris egyenletrendszer megoldása nem egyértelmű. Ez már abból is látható, hogy az A mátrix oszlopvektorai nem lineárisan függetlenek.

5. A modell: $F(t) = a + bt$, a mérési adatok száma $m=10$.

Az illesztett model: $F(t) = 1.52654036 + 0.49132304 t$

6. A modell: $F(t) = a + \frac{b}{t}$, a mérési adatok száma $m=10$.

Az illesztett model: $F(t) = 1.98808127 + \frac{3.02737220}{t}$

7. A modell: $F(t) = a + b \cdot \cos(\pi t) + c \cdot \sin(\pi t)$, a mérési adatok száma $m=13$.

Az illesztett model: $F(t) = 1.19946872 + 0.71225610 \cos(\pi t) + 0.97947590 \sin(\pi t)$