

2.9 Közelítő integrálás

1. Közelítsük az alábbi integrálokat összetett trapéz-, ill. Simpson-formulával úgy, hogy a megadott intervallumot m részintervallumra osztjuk! Becsüljük meg a közelítés hibáját!

(a) $\int_3^6 \sqrt{x-2} dx, \quad m = 5$

(b) $\int_1^2 \ln(x^2) dx, \quad m = 5$

(c) $\int_0^1 e^{x^2-1} dx, \quad m = 5$

(d) $\int_1^2 x^2 \ln x dx, \quad m = 4$

(e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx, \quad m = 3$

(f) $\int_{-1}^0 e^{x^2} dx, \quad m = 3$

2. Közelítsük a fenti integrálokat összetett trapéz-, ill. Simpson-formulával úgy, hogy m -et abból a feltételből határozzuk meg, hogy a hiba kisebb legyen, mint $0,5 \cdot 10^{-4}$!
3. Közelítsük $\ln(2)$ értékét összetett trapéz-formulával úgy, hogy a hiba kisebb legyen, mint $0,5 \cdot 10^{-3}$!
4. $\int_0^1 f(x)\sqrt{x} dx$ típusú integrálokat szeretnénk közelíteni $\sum_{i=1}^3 a_i f(x_i)$ alakú kvadraturával, ahol $x_1 = 0, x_2 = 0,5, x_3 = 1$. Határozza meg a kvadratura súlyait úgy, hogy a kvadratura pontos legyen minden legfeljebb másodfokú polinom esetén!
5. Az $\int_{-1}^1 f(x) dx$ integrál közelítésére az

$$a_0 \cdot f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + a_1 \cdot f(0) + a_2 \cdot f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

kvadraturát szeretnénk használni. Határozza meg az a_0, a_1, a_2 együtthatókat úgy, hogy a kvadratura pontos legyen minden legfeljebb másodfokú polinom esetén! Vizsgálja meg, hogy magasabb fokú polinomok esetén hogy viselkedik a kvadratura!