

3.2 Normák, kondíciós számok

1. A bizonyítandó állítás ekvivalens azzal, hogy:

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

Az második egyenlőtlenség igazolása a háromszögegyenlőtlenség segítségével:

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

ezt átrendezve:

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Az első egyenlőtlenség az x és y szerepének felcserélésével adódik.

2. Sornorma:

$$\|A\|_{\infty} = \max \{|-1| + |2|, |3| + |-2|\} = 5$$

Oszlopnorma:

$$\|A\|_1 = \max \{|-1| + |3|, |2| + |-2|\} = 4$$

Spektrálnorma:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$$

Karakterisztikus polinom:

$$\begin{vmatrix} 10 - \lambda & -8 \\ -8 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = (10 - \lambda)(8 - \lambda) - 64 = \lambda^2 - 18\lambda + 16$$

Az $A^T A$ sajátértékei:

$$\lambda^2 - 18\lambda + 16 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 64}}{2}, \text{ így}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\frac{18 + \sqrt{18^2 - 64}}{2}} \approx 4,1306$$

3. (a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 9 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = 19, \quad \|A\|_{\infty} = 16.$$

Az $\|\cdot\|_1$ mátrixnorma esetén az alkalmas x vektort úgy kaphatjuk, hogy keresünk egy olyan j_0 indexet, melyre

$$\sum_{i=1}^n |a_{ij_0}| = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

(azaz ahol az egy oszlopban álló mátrixelemek abszolútértékeinek összege maximális), és x -nek azt a vektort választjuk, melynek j_0 -edik koordinátája 1, a többi 0. Jelen esetben a 3. oszlopban a legnagyobb a számok abszolútértékének összege,

$$\text{így } x = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrizzük, hogy ezzel az x vektorral valóban teljesül-e az egyenlőség!

$$\|x\|_1 = 1, \quad Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \|Ax\|_1 = 19 = \|A\|_1 \cdot \|x\|_1.$$

A $\|\cdot\|_\infty$ mátrixnorma esetén keresnünk kell egy olyan i_0 indexet, melyre

$$\sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

(azaz ahol az egy sorban álló elemek abszolútértékének összege maximális), és x legyen az a vektor, melynek j -edik koordinátája: $x_j = \text{sgn}(a_{i_0 j})$, $j = 1, \dots, n$. A fenti mátrix esetén $i_0 = 2$ (a második sorban a legnagyobb az elemek ab-

$$\text{szolútértékének az összege), így } x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrizzük, hogy ezzel az x vektorral valóban teljesül-e az egyenlőség!

$$\|x\|_\infty = 1, \quad Ax = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \|Ax\|_\infty = 16 = \|A\|_\infty \cdot \|x\|_\infty.$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = 10, \quad \|A\|_\infty = 10$$

$$\text{Az a) részben leírtak alapján } j_0 = 3, \text{ így } x = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ekkor } \|x\|_1 = 1, \quad Ax = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \|Ax\|_1 = 10 = \|A\|_1 \cdot \|x\|_1.$$

$$\text{Az a) részben leírtak alapján } i_0 = 3, \text{ azaz } x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ekkor } \|x\|_\infty = 1, \quad Ax = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \|Ax\|_\infty = 10 = \|A\|_\infty \cdot \|x\|_\infty.$$

4.

$$\|E\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ex\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$$

5.

$$\|AB\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|(AB)x\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\|A(Bx)\|}{\|x\|} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\|A\| \cdot \|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \cdot \max_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \cdot \|B\|$$

6. Az egységmátrix normája: $\|E_n\|_F = \sqrt{n} \neq 1$, így nem teljesül a 4. feladatban szereplő tulajdonság, azaz a Frobenius norma nem származtatható semmilyen vektornormából.

7. Belátjuk, hogy a norma definíciójában megkövetelt 4 tulajdonság teljesül.

1. $\|A\| \geq 0$ minden $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetén.

Ez a tulajdonság teljesül, hiszen abszolútértékek maximuma mindig nemnegatív.

2. $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

Ha $A = 0$, akkor $a_{ij} = 0 \forall i, j$ -re, így $\|A\| = 0$

Ha $\|A\| = 0$, akkor

$$\max_{i,j} |a_{ij}| = 0$$

azaz $|a_{ij}| = 0 \forall i, j$ -re, így $A = 0$.

3. $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetén

$$\|\lambda A\| = \max_{i,j} |\lambda a_{ij}| = \max_{i,j} |\lambda| \cdot |a_{ij}| = |\lambda| \cdot \max_{i,j} |a_{ij}| = |\lambda| \cdot \|A\|.$$

4. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetén

$$\|A + B\| = \max_{i,j} |a_{ij} + b_{ij}| \leq \max_{i,j} (|a_{ij}| + |b_{ij}|) \leq \max_{i,j} |a_{ij}| + \max_{i,j} |b_{ij}| = \|A\| + \|B\|.$$

Tehát a függvény tényleg normát definiál $\mathbb{R}^{n \times n}$ -en.

Megmutatjuk, hogy ez a norma nem származtatható semmilyen vektornormából.

Legyen $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ekkor $AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$,

így $\|A\| = \|B\| = 1$, míg $\|AB\| = 2$, azaz az indukált normák 5. feladatban bizonyított tulajdonsága nem teljesül.

8. Ha $v \neq 0$ a λ -hoz tartozó sajátvektor, akkor $Av = \lambda v$, azaz

$$\begin{aligned} |\lambda| \cdot \|v\| &= \|\lambda v\| = \|Av\| \leq \|A\| \cdot \|v\| \\ |\lambda| \cdot \|v\| &\leq \|A\| \cdot \|v\| \end{aligned}$$

ezt az egyenlőtlenséget $\|v\| \neq 0$ -val osztva kapjuk az állítást.

9. (a) $\det(A) = -10 \Leftarrow$ a determináns nem nulla, tehát a mátrix invertálható

$$A^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_{\infty} = 6, \|A^{-1}\|_{\infty} = \frac{5}{10}, \text{ így}$$

$$\text{cond}_{\infty}(A) = \|A\|_{\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{\infty} = 3.$$

2×2-es mátrix esetén a $\text{cond}_{\infty}(A)$ -t az alábbi képlet segítségével is meghatározhatjuk:

$$\text{cond}_{\infty}(A) = \frac{\|A\|_{\infty} \cdot \|A\|_1}{|\det(A)|}.$$

(b) $\det(A) = 2a + 1 \Rightarrow$ ha $a = -\frac{1}{2}$ akkor A nem invertálható, egyébként igen.

Mivel a ismeretlen, ezért több eset áll fenn:

1. eset: ha $3 \geq 1 + |a|$, azaz $2 \geq |a|$, akkor $\|A\|_{\infty} = 3$. Ekkor $\|A\|_1 = 3$, és így

$$\text{cond}_{\infty}(A) = \frac{\|A\|_{\infty} \cdot \|A\|_1}{|\det(A)|} = \frac{9}{|2a + 1|}.$$

2. eset: ha $3 < 1 + |a|$, azaz $2 < |a|$, akkor $\|A\|_{\infty} = 1 + |a|$, és $\|A\|_1 = 1 + |a|$, azaz

$$\text{cond}_{\infty}(A) = \frac{\|A\|_{\infty} \cdot \|A\|_1}{|\det(A)|} = \frac{(1 + |a|)^2}{|2a + 1|}.$$

(c) $\det(A) = 8 \Leftarrow$ a determináns nem nulla, tehát a mátrix invertálható

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -7 & -13 & 8 \\ 9 & 11 & -8 \\ 10 & 14 & -8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\frac{7}{8} & \frac{9}{8} & \frac{10}{8} \\ -\frac{13}{8} & \frac{11}{8} & \frac{14}{8} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_{\infty} = 9, \|A^{-1}\|_{\infty} = \frac{38}{8}$$

$$\text{cond}_{\infty}(A) = \|A\|_{\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{\infty} = \frac{342}{8} = 42\frac{3}{4}$$

10. Az első esetben $x_1 = 2, x_2 = 0$, a második esetben $x_1 = 1, x_2 = 1$, tehát a jobboldalon egy 10^{-4} nagyságrendű változás a megoldásban 1 nagyságrendű változást okozott.

11. Először belátjuk, hogy ha a reguláris A mátrixnak $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sajátértéke, akkor A^{-1} -nek $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ sajátértéke.
Legyen λ az A sajátértéke, $v \neq 0$ a hozzá tartozó sajátvektor. Ekkor

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v, \\ A^{-1} \cdot A \cdot v &= \lambda \cdot A^{-1} \cdot v. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy egy reguláris mátrixnak a 0 nem sajátértéke az előző egyenlőtlenséget oszthatjuk λ -val: $\frac{1}{\lambda} \cdot v = A^{-1} \cdot v$.

Így látható, hogy A^{-1} -nek $\frac{1}{\lambda}$ sajátértéke.

Visszatérve a feladatban megfogalmazott állítás bizonyítására, a 8. feladat állítása szerint $|\lambda_{\max}| \leq \|A\|$, illetve az előbb belátott lemma alapján $\frac{1}{|\lambda_{\min}|} \leq \|A^{-1}\|$. Így

$$\frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A).$$

12. Könnyen ellenőrizhető, hogy $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rátérve a második egyenletrendszer megoldására:

$$(x + \delta x) = A^{-1} \cdot (b + \delta b)$$

$$\det(A) = -0,0001, \quad A^{-1} = -\frac{1}{0,0001} \begin{pmatrix} 0,98 & -0,99 \\ -0,99 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9800 & 9900 \\ 9900 & -10000 \end{pmatrix}$$

$$(x + \delta x) = \begin{pmatrix} -9800 & 9900 \\ 9900 & -10000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,98 \\ 1,98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 198 \\ -198 \end{pmatrix}.$$

Így

$$\delta x = \begin{pmatrix} 197 \\ -199 \end{pmatrix}, \text{ azaz}$$

$$\frac{\|\delta x\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \frac{199}{1} = 199,$$

$$\frac{\|\delta b\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}} = \frac{0,01}{1,99} \approx 0,005. \text{ Látható, hogy a megoldás relatív hibája 4 nagyságrenddel}$$

nagyobb a relatív jobboldali hibájánál.

Ennek oka, hogy:

$$\text{cond}_{\infty}(A) = \|A\|_{\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{\infty} = 1,99 \cdot 19900 = 39601.$$

- 13.

$$\|A\|_{\infty} = \left| \frac{1+s^2}{s} \right| + \left| \frac{1-s^2}{s} \right| = \frac{1+s^2}{s} + \frac{1-s^2}{s} = \frac{2}{s}.$$

$$\det(A) = \frac{1}{s^2} \left((1+s^2)^2 - (1-s^2)^2 \right) = 4, \text{ így}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4s} \begin{pmatrix} 1+s^2 & s^2-1 \\ s^2-1 & 1+s^2 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = \left| \frac{1+s^2}{4s} \right| + \left| \frac{s^2-1}{4s} \right| = \frac{1+s^2}{4s} + \frac{1-s^2}{4s} = \frac{1}{2s}, \text{ így } \text{cond}_{\infty}(A) = \frac{1}{s^2}.$$

Látható, hogy amíg a determináns értéke s -től függetlenül állandó, addig a kondíciós szám függ az s értékétől. Ha s közel van 0-hoz, akkor ez tetszőlegesen nagy lehet.

14. Használjuk ki, hogy az előző feladatban meghatároztuk A^{-1} -et!

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b = \frac{1}{4s} \begin{pmatrix} 1+s^2 & s^2-1 \\ s^2-1 & 1+s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4s} \begin{pmatrix} 2s^2 \\ 2s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s}{2} \\ \frac{s}{2} \end{pmatrix}.$$

Hibával terhelt jobboldal esetén

$$\begin{aligned} A(x + \delta x) &= b + \delta b \\ Ax + A\delta x &= b + \delta b \\ A\delta x &= \delta b \\ \delta x &= A^{-1}\delta b \end{aligned}$$

Így

$$\delta x = \frac{1}{4s} \begin{pmatrix} 1+s^2 & s^2-1 \\ s^2-1 & 1+s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix} = \frac{1}{4s} \begin{pmatrix} (1+s^2)\varepsilon - (s^2-1)\varepsilon \\ (s^2-1)\varepsilon - (1+s^2)\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{2s} \\ \frac{-\varepsilon}{2s} \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\|\delta x\|_{\infty} = \frac{\varepsilon}{2s}, \quad \|x\|_{\infty} = \frac{s}{2}, \quad \text{a megoldás relatív hibája:}$$

$$\frac{\|\delta x\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \frac{\varepsilon}{s^2}$$

Észrevehetjük, hogy a jobboldal relatív hibája: $\frac{\|\delta b\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}} = \varepsilon$, továbbá $\text{cond}_{\infty}(A) = \frac{1}{s^2}$, így

$$\frac{\|\delta x\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \frac{\varepsilon}{s^2} = \text{cond}_{\infty}(A) \cdot \frac{\|\delta b\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}}.$$

Ez azt jelenti, hogy ekkor a

$$\frac{\|\delta x\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \leq \text{cond}_{\infty}(A) \cdot \frac{\|\delta b\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}}$$

egyenlőtlenség éles.

15.

$$\text{cond}(cA) = \|cA\| \|(cA)^{-1}\|$$

Mivel $(c \cdot A)^{-1} = \frac{1}{c} \cdot A^{-1}$, így

$$\text{cond}(cA) = |c| \cdot \|A\| \cdot \frac{1}{|c|} \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A),$$

azaz egy mátrix kondíciószáma nem változik ha egy 0-tól különböző számmal szorozzuk a mátrixot.

Ugyanakkor $\det(cA) = c^n \cdot \det(A)$, így látható, hogy a kondíciós szám nem függ a mátrix determinánsától.