

Normák, kondíciós számok

1. Mutassuk meg, hogy a lineáris normált tér bármely x, y elemére

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\|$$

teljesül!

2. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reguláris mátrix, $\|\cdot\|$ norma \mathbb{R}^n -en. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\|x\|_* = \|Ax\|$$

függvény normát definiál \mathbb{R}^n -en!

3. $\|A\|_1 = ?$, $\|A\|_\infty = ?$, $\|A\|_2 = ?$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Az alábbi A mátrix esetén $\|A\|_1 = ?$, $\|A\|_\infty = ?$ Adjunk meg egy-egy olyan $x \neq 0$ vektort, mellyel $\|Ax\|_1 = \|A\|_1 \|x\|_1$, illetve $\|Ax\|_\infty = \|A\|_\infty \|x\|_\infty$ teljesül!

(a)

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 9 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

5. Bizonyítsuk be, hogy az egységmátrix normája 1 minden indukált mátrixnormában!

6. Bizonyítsuk be, hogy vektornorma által indukált mátrixnormában

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

teljesül minden $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetén.

7. Legyen $n > 1$ és tekintsük $\mathbb{R}^{n \times n}$ -en az ú.n. Frobenius-normát:

$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Származtatható-e ez a mátrixnorma valamilyen vektornormából?

8. Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mutassuk meg, hogy

$$\|A\| = \max_{i,j} |a_{ij}|$$

normát definiál $\mathbb{R}^{n \times n}$ -en! Lehet-e ez a norma vektornorma által indukált?

9. Legyen λ az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix egy tetszőleges sajátértéke. Bizonyítsuk be, hogy

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

teljesül minden indukált mátrixnorma esetén!

10. Legyen $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonális mátrix. Bizonyítsuk be, hogy $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ esetén!

11. Számítsuk ki $\text{cond}_\infty(A)$ -t az alábbi mátrixok esetén!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \quad (a \in \mathbb{R}); \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

12. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket, hasonlítsuk össze a megoldásokat!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{pmatrix}$$

13. Jelölje λ_{\max} , ill. λ_{\min} az A abszolút értékben legnagyobb, ill. legkisebb sajátértékét. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left| \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right| \leq \text{cond}(A).$$

14. Oldja meg meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{pmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy b helyett $b + \Delta b$ ismert,

$$b + \Delta b = \begin{pmatrix} 1.98 \\ 1.98 \end{pmatrix}.$$

Oldja meg az $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$ lineáris egyenletrendszert! Számítsa ki a $\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$, $\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$ relatív hibákat! Számítsa ki az A kondíciós számát (∞ -normában)!

15. Legyen

$$A = A(s) = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} 1 + s^2 & 1 - s^2 \\ 1 - s^2 & 1 + s^2 \end{pmatrix}, \quad s \in (0, 1).$$

Határozzuk meg az $\|A\|_\infty$ és $\text{cond}_\infty(A)$ értékeket!

16. Legyen $A = A(s)$ az előző feladatban definiált mátrix. Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ahol $b = (1, 1)^T$, majd oldjuk meg az egyenletrendszert akkor is, ha a b vektor $\delta b = (\epsilon, -\epsilon)^T$ (ahol $\epsilon > 0$) hibával terhelten adott. Számítsuk ki a megoldás relatív hibáját (maximum-normában)!

17. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reguláris mátrix, $0 \neq c \in \mathbb{R}$. $\text{cond}(cA) = ?$