

Numerikus matematika

April 30, 2016

Integrálás

Bevezető

Vannak függvények - például a e^{-x^2} - melyek központi szerepet játszanak a legkülönbözőbb tudományterületeken, de nem tudjuk a határozott integráljukat kiszámítani. Nem azért, mert ügyetlenek vagyunk, hanem mert *elemien* nem integrálhatók. Ez indokolta közelítő eljárások kidolgozását határozott integrálok számítására. Bővebben lásd itt.

Integrálás

Bevezető

Adott f függvény esetén olyan $I(f, n, a, t) = \sum_{i=1}^n a_i f(t_i)$ formulákat találni melyekben az ismeretlen a_i -k könnyen számolhatók és $|\int_a^b f(t)dt - I(f, n, a, t)|$ "elég" kicsi. Az $I(f, n, a, t)$ -ket szokás *kvadratura* képletnek is nevezni.

Integrálás

Trapézformula

A legegyszerűbb ha az f függvényt az $[a, b]$ -n lineárisan interpoláljuk, és az integrált az egyenes integráljával közelítjük.

Integrálás

Trapézformula

Az:

$$\int_a^b f(a) + \frac{f(a)-f(b)}{a-b}(t-a)dt$$

integrált számoljuk ki, ami egy trapéz területe:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

Ez az egyszerű trapézformula.

Integrálás

Trapézformula hiba

$$\text{A } T(f, a, b) = T(f) = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

jelölést bevezetve adódik a:

$$\left| \int_a^b f(t)dt - T(f) \right| \leq \frac{M_2}{2}(b-a)^3$$

becslés.

Integrálás

Trapézformula hiba

Látható, hogy a trapézformula legfeljebb *elsőfokú* függvényekre pontos.

Integrálás

Összetett trapézformula

Ha egy függvény integrálját közelítjük $[a, b]$ -n, gyakran az integrálási tartományt m *egyforma* részre bontjuk

$$a = x_1 < \dots < x_{m+1} = b$$

és a kapott $[x_i, x_{i+1}]$ részeken valamilyen egyszerű kvadraturát használva felépítünk belőlük egy ún. összetett formulát:

Integrálás

Összetett trapézformula

$$\begin{aligned}T(f, m) &= \sum_{i=1}^m T(f, x_i, x_{i+1}) = \\&= h \left(\frac{f(x_1)}{2} + f(x_2) + \dots + f(x_m) + \frac{f(x_{m+1})}{2} \right) = \\&= \frac{h}{2} (f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_m) + f(x_{m+1}))\end{aligned}$$

ahol $h = \frac{b-a}{m}$.

Integrálás

Összetett trapézformula hiba

A $h = \frac{b-a}{m}$ jelöléssel érvényes a:

$$\left| \int_a^b f(t) dt - T(f, m) \right| \leq \frac{M_2}{2} (b-a) h^2$$

becslés.

Integrálás

Összetett trapézformula hiba

Egy ilyen hibaformula gyakorlati haszna, hogy megbecsülhetjük segítségével, azt hogy szakaszonkénti integrálással hány részre kell legalább osztani az $[a, b]$ -t egy adott hibahatár eléréséhez.

Integrálás

Simpson-formula

Pontosabb eredményre számíthatunk, ha lineáris helyett kvadratikus interpolációt veszünk alapul.

Integrálás

Simpson-formula

Jelölje $S(f, a, b)$ az $(a, f(a))$, $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$, $(b, f(b))$ pontokra illesztett polinom integrálját $[a, b]$ -n. Elemi számolással adódik a:

$$S(f, a, b) = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$$

formula.

Integrálás

Simpson-formula hiba

A trapézformulához hasonlóan kapható becslés itt is, de ha feltesszük az $f^{(4)}$ folytonosságát, akkor többet is mondhatunk:

Integrálás

Simpson-formula hiba

$$\left| \int_a^b f(t) dt - S(f, a, b) \right| \leq M_4 \frac{(b-a)^5}{2880},$$

$$\text{ahol } M_4 = \max_{u \in [a, b]} |f^{(4)}(u)|.$$

Integrálás

Összetett Simpson-formula

Ha m egyenlő részre osztjuk az $[a, b]$ -t és a részeken alkalmazzuk az elemi formulát, $h = \frac{b-a}{m}$ jelöléssel megkapjuk a

$$S(f, m) = \sum_{i=1}^m S(f, x_i, x_{i+1}) =$$

$$\frac{h}{6} \left(f(x_1) + 4f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + 2f(x_2) + \dots + 4f\left(\frac{x_m+x_{m+1}}{2}\right) + f(x_{m+1}) \right)$$

összetett formulát.

Integrálás

Összetett Simpson-formula hiba

Az elemi formulára adott becslést alkalmazva kapjuk a:

$$\left| \int_a^b f(t) dt - S(f, m) \right| \leq M_4(b-a) \frac{h^4}{2880},$$

becslést, ahol $M_4 = \max_{u \in [a,b]} |f^{(4)}(u)|$.

Integrálás

Matlab

myfun.m + trapez.m

Integrálás

Adaptív módszerek

A gyakorlatban a formulákban szereplő M_n meghatározása nehéz lehet, nélkülük viszont nem tudunk becslést adni arra, hogy adott pontosság eléréséhez hány részre kell felosztani az $[a, b]$ -t. Ennek a problémának a megoldására *adaptív, alkalmazkodó* módszereket dolgoztak ki.

Integrálás

Adaptív módszerek

Egy adaptív trapézmódszer megvalósításért katt ide.

Integrálás

Feladatok

katt ide

1, 2, 3, 4