Matematika mérnököknek 2

Ismétlés

Diff-számítás

Desc Summa

Fa 1

Fa 2

Ismétlés

Desc **Summa**

A pillanatnyi változási gyorsaság, az érintő x tengellyel bezárt szögének tangense, meredekség.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Deriválás és műveletek (legyen $C \in \mathbb{R}$):

$$(Cf)' = cf'$$

$$(f+g) = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad g \neq 0$$

$$f(g)' = f'(g)g'$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Elemi függvények:

$$C' = 0$$

$$(x^C)' = Cx^{C-1}$$

$$\sin' = \cos$$

$$\cos' = -\sin$$

$$\tan' = \frac{1}{\cos^2}$$

$$\cot' = -\frac{1}{\sin^2}$$

$$(C^x)' = \log(C)C^x \qquad C > 0$$

$$\log(|x|)' = \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$

Fa 1

Határozza meg az alábbi függvény deriváltját:

$$e^{xe^{\sin(x)}}$$

Mo 1 Diff-számítás

Mo 1

$$e^{xe^{\sin(x)}}(e^{\sin(x)} + xe^{\sin(x)}\cos(x))$$

Fa 1 Diff-számítás

Fa 2

Határozza meg az alábbi függvény deriváltját:

$$\frac{\log(x \log(x))}{x^2}$$

Mo 2 Diff-számítás

Mo **2**

$$\frac{\log(x)+1}{x^3\log(x)} - \frac{2\log(x\log(x))}{x^3}$$

Fa 2 Diff-számítás

Határozatlan integrál

Desc Summa

Fa 1

Fa 2

Fa 3

Fa $e^{ax}\sin(x)$

Fa $e^{ax}\cos(x)$

Ismétlés

Határozatlan integrál, anti-derivált.

$$\left(\int f\right)' = f$$

Tulajdonságok $C, D \in \mathbb{R}$:

$$\int (Cf+g) = C\int f + \int g$$
$$\int C\mathrm{d}x = Cx + D$$
$$\int x^C \mathrm{d}x = \frac{x^{C+1}}{C+1} + D \qquad C \neq -1$$
$$\int \sin = -\cos + C$$
$$\int \cos = \sin + C$$
$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \log|x| + C \qquad x \neq 0$$
$$\int C^x \mathrm{d}x = \frac{C^x}{\log C} + D \qquad C > 0, C \neq 1$$
$$\int (f'g + fg') = fg + C$$
$$\int f(g)g' = \left(\int f\right)(g) + C$$

Határozatlan integrál

Fa 1

Számoljuk ki a következő integrált:

$$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x$$

Mo 1 Határozatlan integrál

Mo 1

Mivel $\frac{\mathrm{d}e^{x^2}}{\mathrm{d}x} = 2xe^{x^2}$, ezért a megoldás:

$$\frac{e^{x^2}}{2} + C.$$

Fa 1 Határozatlan integrál

Fa 2

Számoljuk ki a következő integrált:

$$\int \sin(x) e^x \mathrm{d}x$$

Mo 2 Határozatlan integrál

Mo **2**

Parciális:

$$\int \sin(x)e^x \mathrm{d}x = -\cos(x)e^x - \int -\cos(x)e^x \mathrm{d}x =$$
$$-\cos(x)e^x + \int \cos(x)e^x \mathrm{d}x$$

$$\int \sin(x)e^x \mathrm{d}x = \sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x \mathrm{d}x$$

Összeadva:

$$\int \sin(x)e^x \mathrm{d}x = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2}e^x + C$$

Fa 2 Határozatlan integrál

Fa 3

Számoljuk ki a következő integrált:

$$\int \cos^3(x)\mathrm{d}x$$

Mo 3 Határozatlan integrál

Mo **3**

Helyettesítés: $u = sin(x)$

$$\int \cos^3(x)\mathrm{d}x = \int (1-\sin^2(x))\cos(x)\mathrm{d}x =$$
$$\int 1-u^2\mathrm{d}u = u - \frac{u^3}{3} + C = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + C$$

Fa 3 Határozatlan integrál

Fa $e^{ax}\sin(x)$

Legyen $0 \neq a \in \mathbb{R}$:

$$\int e^{au}\sin(u)\mathrm{d}u = ?$$

Mo $e^{ax}\sin(x)$ Határozatlan integrál

Mo $e^{ax}\sin(x)$

parciális integrálás:

$f = e^{au}, \quad g' = \sin(u)$:

$$\int e^{au}\sin(u)\mathrm{d}u = -e^{au}\cos(u) - \int ae^{au}(-\cos(u))\mathrm{d}u =$$

$$= -e^{au}\cos(u) + a\int e^{au}\cos(u)\mathrm{d}u$$

$f' = e^{au}, \quad g = \sin(u)$:

$$\int e^{au}\sin(u)\mathrm{d}u = \frac{e^{au}}{a}\sin(u) - \int \frac{e^{au}}{a}\cos(u)\mathrm{d}u =$$

$$\frac{e^{au}}{a}\sin(u) - \frac{1}{a}\int e^{au}\cos(u)\mathrm{d}u =$$

szorozzuk meg a^2-el a másodikat és adjuk össze az elsővel:

$$(1+a^2)\int e^{au}\sin(u)\mathrm{d}u = ae^{au}\sin(u) - e^{au}\cos(u) \quad \Longrightarrow$$

$$\int e^{au}\sin(u)\mathrm{d}u = \frac{e^{au}(a\sin(u) - \cos(u))}{1+a^2}$$

Fa $e^{ax}\sin(x)$ Határozatlan integrál

Fa $e^{ax}\cos(x)$

Legyen $0 \neq a \in \mathbb{R}$:

$$\int e^{au}\cos(u)\mathrm{d}u = ?$$

Mo $e^{ax}\cos(x)$ Határozatlan integrál

Mo $e^{ax}\cos(x)$

Az előző feladatban összadás helyett vonjunk ki.

$$\int e^{au}\cos(u)\mathrm{d}u = \frac{e^{au}(\sin(u) + a\cos(u))}{1 + a^2}$$

Fa $e^{ax}\cos(x)$ Határozatlan integrál

Numerikus differenciálás

Fa $\sin(\frac{a}{x})$

Fa $\sin(\frac{a}{x})$, szimder

Matematika mérnököknek 2

Fa $\sin(\frac{a}{x})$

Tegyük fel, hogy az $f(x) = \sin(\frac{100}{x})$ függvény értékei $h = 0.001$ lépésközzel adottak a $[0.5, 2\pi]$ intervallumon. Deriváljuk numerikusan a függvényt! Ábrázoljuk az eredményt a függvény tényleges deriváltjával közös ábrán. Magyarázzuk meg az eltérést a $\frac{\sin(3x)}{x}$ fv-nél látottakhoz képest.

Mo $\sin(\frac{a}{x})$ Numerikus differenciálás

Mo $\sin(\frac{a}{x})$

Egy lehetséges megoldás:

```
function numdiff(f, df, a, b, h)
    x=a:h:b;
    y=f(x);
    d1=diff(y)./diff(x);
    figure; plot(x(1:end-1),d1)
    fd1=df(x);
    delta=sum(abs(fd1(1:end-1)-d1));
    title(sprintf('az eltérés-összeg: %f\n',
      delta))
    hold on; plot(x,fd1); hold off
end
```

Fa $\sin(\frac{a}{x})$, szimder

Tegyük fel ismét, hogy az $f(x) = \sin(\frac{100}{x})$ függvény értékei $h = 0.001$ lépésközzel adottak a $[0.5, 2\pi]$ intervallumon. Deriváljuk numerikusan a függvényt, ám most a derivált közelítését az alábbi formulával számoljuk:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Mo $\sin(\frac{a}{x})$, szimder Numerikus differenciálás

$\sin(\frac{a}{x})$, szimder

Egy lehetséges megoldás:

```
function numdiffSym(f, df, a, b, h)
  x=a:h:b;
  y=f(x);
  d1=(y(3:end)-y(1:end-2))/(2*h);
  figure; plot(x(2:end-1),d1)
  fd1=df(x);
  delta=sum(abs(fd1(2:end-1)-d1));
  title(sprintf('az eltérés-összeg: %f\n',
     delta));
  hold on; plot(x,fd1); hold off
end
```

Diffegyenletek

Osztályozás

Szétválasztható

Elsőrendű, homogén lineáris

Elsőrendű, inhomogén lineáris

Szöveges feladatok

Kezdetiérték feladatok

$y' = f(\frac{y}{x})$

Bernoulli

$y'' = a_1 y' + a_0 y$

Matematika mérnököknek 2

Osztályozás

Desc	Summa
Fa	1
Fa	2
Fa	3
Fa	4

Diffegyenletek

Egy differenciálegyenlet

- *közönséges*: ha csak egyetlen változóra vonatkozó deriváltakat tartalmaz. Egyébként *parciális*.
- *rendje*: a benne szereplő ismeretlen függvény legmagasabb rendű deriváltja.
- *lineáris*: ha benne szereplő ismeretlen függvény illetve deriváltjai csak első hatványon szerepelnek, azaz ha

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x)\frac{d^k y}{dx^k} = Q(x)$$

alakú (vagy ilyenre hozható), ahol $P_k(x)$ csak x-től függ. Egyébként *nemlineáris*-nak nevezzük.

Közönséges, elsőrendű, nemlineáris differenciálegyenlet:

$$y'^2 = sin(x\sqrt{y}) + 123 + y$$

egy közönséges, másodrendű, lineáris differenciálegyenlet.

$$y'' + sin(x) = 123 + y$$

Parciális, elsőrendű, nemlineáris differenciálegyenlet:

$$(f'_x)^2 - (f'_y)^2 = xy$$

Parciális, másodrendű, lineáris differenciálegyenlet:

$$f''_{xx} - f''_{xy} = xy$$

Osztályozás

Fa 1

Állapítsa meg az alábbi differenciálegyenlet típusát:

$$\frac{dy}{dx} = x + 4$$

Mo 1 Osztályozás

Mo 1

közönséges, elsőrendű, lineáris.

Fa 1 Osztályozás

Fa 2

Állapítsa meg az alábbi differenciálegyenlet típusát:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a \qquad a \in \mathbb{R}$$

Mo 2 Osztályozás

Mo 2

közönséges, másodrendű, lineáris.

Fa 2 Osztályozás

Fa 3

Állapítsa meg az alábbi differenciálegyenlet típusát:

$$y'' = y' \sin(x) - \cos(x)$$

Mo 3 Osztályozás

Mo **3**

közönséges, másodrendű, lineáris.

Fa 3 Osztályozás

Fa 4

Állapítsa meg az alábbi differenciálegyenlet típusát:

$$2y'' + 3y' + 4\sqrt{y} = 0$$

Mo 4 Osztályozás

Mo 4

közönséges, másodrendű, nemlineáris.

Fa 4 Osztályozás

Szétválasztható

Desc Summa

Fa 1.feladat

Fa 2.feladat

Fa 3.feladat

Fa 4.feladat

Fa 5.feladat

Fa 6.feladat

Diffegyenletek

Egy differenciálegyenletet szétválasztható változójúnak nevezünk, ha

$$g(y)y' = f(x)$$

alakú, vagy ilyenre hozható. Vagyis az x és y változók elkülöníthetőek (szétválasztható, szeparálható)

A fenti alak 'megoldása':

$$\int g(y)\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x$$

A következő speciális esetekkel gyakran találkozunk:

$$y' = f(x) \qquad y = \int f(x)\mathrm{d}x$$

$$y' = g(y) \qquad x = \int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y$$

$$y' = f(x)g(y) \qquad \int f(x)dx = \int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y$$

Szétválasztható

Fa 1.feladat

Oldja meg a

$$\frac{du}{dy} = u(y)y$$

differenciálegyenletet!

Mo 1.feladat Szétválasztható

Mo 1.feladat

$$\frac{u'}{u} = y$$

$$\log(|u|)' = y$$

$$\log(|u|) = \frac{y^2}{2} + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$|u| = e^C e^{\frac{y^2}{2}}$$

$$u = Ce^{\frac{y^2}{2}} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Fa 1.feladat Szétválasztható

Fa 2.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$z^3 + \frac{du}{dz}(u+1)^2 = 0$$

Mo 2.feladat Szétválasztható

$$u'(u+1)^2 = -z^3$$

$$\int (u+1)^2 \mathrm{d}u = \int -z^3 \mathrm{d}z$$

$$\frac{(u+1)^3}{3} = \frac{-z^4}{4} + C \qquad u\text{-t kifejezve:}$$

$$u = \left(\frac{-3z^4}{4} + C\right)^{\frac{1}{3}} - 1$$

Fa 3.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$y' = 2\cos(x) + 3\sin(x)$$

Mo 3.feladat Szétválasztható

Mo 3.feladat

$$y = 2\sin(x) - 3\cos(x)$$

Fa 3.feladat Szétválasztható

Fa 4.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$y' = y^2$$

Mo 4.feladat Szétválasztható

Mo 4.feladat

$$x = \int \frac{1}{y^2} \mathrm{d}y$$
$$x = -\frac{1}{y} + C$$
$$y = -\frac{1}{x - C}$$

Fa 4.feladat Szétválasztható

Fa 5.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$y' = ay \qquad a \in \mathbb{R}$$

Mo 5.feladat Szétválasztható

Mo 5.feladat

$$t = \int \frac{1}{ay}\mathrm{d}y$$
$$t = \frac{\log(|y|)}{a} + C$$
$$e^{at} = e^{C}|y|$$
$$y = Ce^{at} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Fa 5.feladat Szétválasztható

Fa 6.feladat.

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$(1 + x)yy' = 1$$

Mo 6.feladat Szétválasztható

Mo 6.feladat.

szétválasztható

$$yy' = \frac{1}{1+x}$$

$$\int y\mathrm{d}y = \int \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$\frac{y^2}{2} = \log(|1+x|) + C$$

$$y = \pm\sqrt{2\log(|1+x|) + C}$$

Fa 6.feladat Szétválasztható

Elsőrendű, homogén lineáris

Desc Summa

Fa 1

Fa 2

Diffegyenletek

Summa

$$y' + A(t)y = 0$$

megoldása (lásd: **??**):

$$y = Ce^{-\int A(t)\mathrm{d}t} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Speciálisan, ha $A(t) = A$ konstans:

$$y = Ce^{-At} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Elsőrendű, homogén lineáris

Fa 1

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$y' + 10y = 0$$

Mo 1 Elsőrendű, homogén lineáris

Mo 1

$$y = Ce^{-10t} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Fa 1 Elsőrendű, homogén lineáris

Fa 2

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$y' = \log(t)y$$

Mo 2 Elsőrendű, homogén lineáris

Mo **2**

$$\int \log(t)\mathrm{d}t = \log(t)t - \int 1\mathrm{d}t =$$

$$= \log(t)t - t + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \log(|y|) \qquad C \in \mathbb{R}$$

vagyis:

$$y = Ce^{t(\log(t)-1)} \qquad C \in \mathbb{R} \quad (rv)$$

Fa 2 Elsőrendű, homogén lineáris

Elsőrendű, inhomogén lineáris

Fa 1. feladat

Fa 2. feladat

Diffegyenletek

Fa 1. feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$y' = y + x + 2$$

Mo 1. feladat Elsőrendű, inhomogén lineáris

Mo 1. feladat

elsőrendű, lineáris, inhomogén

$$y = Ce^x \quad \text{a homogén megoldása}$$

$$C = C(x) \quad \text{változó variálása}$$

$$C'(x)e^x + C(x)e^x = C(x)e^x + x + 2$$

$$C'(x) = (x+2)e^{-x} \quad \text{parciálisan integráljuk}$$

$$C(x) = -(x+2)e^{-x} + \int e^{-x}\mathrm{d}x = -(x+3)e^{-x} + K$$

$$y = \big(-(x+3)e^{-x} + K\big)e^x$$

Ellenőrizzük géppel is a megoldást! kód

Fa 1. feladat Elsőrendű, inhomogén lineáris

Fa 2. feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$xy' - 2y = 2x^4$$

Mo 2. feladat Elsőrendű, inhomogén lineáris

Mo 2. feladat

elsőrendű, lineáris, inhomogén

$$y' = \frac{2}{x}y + 2x^3$$

$$y = Cx^2 \quad \text{a homogén megoldása}$$

$$C = C(x) \quad \text{változó variálása}$$

$$C'(x)x^2 + \underline{C(x)2x} = \underline{\frac{2}{x}C(x)x^2} + 2x^3$$

$$C'(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad C(x) = x^2 + K$$

$$y = \left(x^2 + K\right)x^2 \qquad K \in \mathbb{R} \qquad (mod)$$

Ellenőrizzük géppel is a megoldást!

Fa 2. feladat — Elsőrendű, inhomogén lineáris

Szöveges feladatok

Fa keverés

Fa görbe

Fa levegő

Fa 4

Fa rádium

Fa hűlés

Diffegyenletek

Fa keverés

Egy 10 liter vizet tartalmazó edénybe *literenként* 0.3 kg sót tartalmazó oldat folyik be folyamatosan 2 liter/perc sebességgel. Az edénybe belépő folyadék összekeveredik a vízzel és a keverék 2 liter/perc sebességgel kifolyik az edényből. Mennyi só lesz az edényben 5 perc múlva?

Mo keverés Szöveges feladatok

Mo keverés

Jelölje $s(t)$ a tartálybeli só mennyiségét t-edik időpillanatban. Nézzük mi történik a $[t, t+\Delta t]$ intervallumban:

$$s(t+\Delta t) = s(t) + \Delta t \cdot 2 \cdot 0.3 - \Delta t \cdot 2 \frac{s(t)}{10}$$

A $\Delta t \to 0$ határátmenetet véve kapjuk:

$$s' = 0.6 - 0.2s$$

$$s(t) = Ce^{-0.2t} \quad \text{homogén}$$

$$C'(t)e^{-0.2t} - 0.2C(t)e^{-0.2t} = 0.6 - 0.2C(t)e^{-0.2t} \quad \text{variálás}$$

$$C'(t) = 0.6e^{0.2t} \quad \Longrightarrow \quad C(t) = 3e^{0.2t} + K$$

$$s(t) = \left(3e^{0.2t} + K\right)e^{-0.2t} = 3 + Ke^{-0.2t}$$

$$s(0) = 0 = 3 + K, \;\; K = -3 \quad \Longrightarrow \quad s(5) = 3 - \frac{3}{e} \approx 1.8964$$

Fa keverés Szöveges feladatok

Fa görbe

Keressük meg azokat a görbéket, melyek esetében bármely érintőnek az x-tengellyel vett metszéspontjának x-koordinátája fele akkora, mint az érintési ponté.

Mo görbe Szöveges feladatok

Mo görbe

$y(x)$ a keresett függvény

x_0 egy tetszőleges pont

$$y_0 = y(x_0), \qquad y_0' = y'(x_0)$$

$y_0 + y_0'(x - x_0)$ az érintő egyenlete

$x_m = x_0 - \dfrac{y_0}{y_0'}$ a metszéspont

$\dfrac{x_0}{2} = x_0 - \dfrac{y_0}{y_0'}$ a feltétel miatt

$\dfrac{x}{2} = x - \dfrac{y}{y'}$ a diffegyenlet

$\displaystyle\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = 2\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ szétválasztható

$$\log(|y|) = 2\log(|x|) + C$$

$y = Dx^2$ adódik $D \neq 0$

Fa görbe Szöveges feladatok

Fa levegő

Egy 200 m^3 térfogatú szobában 0.15% szén-dioxid van. A ventillátor percenként 20 m^3 0.04% CO_2 tartalmú levegőt fúj a helyiségbe. Mennyi idő múlva csökken a szoba levegőjében a CO_2 mennyiség a harmadára?

Mo levegő Szöveges feladatok

levegő

Legyen $y(t)$ a CO_2 mennyisége (m^3) a t-edik időpillanatban. Mi történik a $[t, t+\Delta t]$-ben?

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \Delta t \; 20 \; 0.04 - \Delta t \; 20 \; \frac{y(t)}{200}$$

$$y' = 0.8 - 0.1y$$

$$y = Ce^{-0.1t} \quad \text{homogén, variálás}$$

$$C'(t)e^{-0.1t} - 0.1C(t)e^{-0.1t} = 0.8 - 0.1C(t)e^{-0.1t}$$

$$C(t) = 0.8e^{0.1t} \quad \Longrightarrow \quad C(t) = 8e^{0.1t} + K$$

$$y(t) = 8 + Ke^{-0.1t}$$

$$y(0) = 30 = 8 + K, \;\; K = 22$$

$$y(t) = 10 \quad \Longrightarrow \quad t = 23.979$$

Fa 4

Egy 100 liter vizet tartalmazó edényben 0.5 kg só van oldott állapotban. Az edénybe 5 $\frac{liter}{perc}$ sebességgel tiszta víz folyik be, és az oldat ugyanilyen sebességgel a túlfolyón távozik. Mennyi lesz az oldatban levő só mennyisége 1 óra múlva?

Mo 4 Szöveges feladatok

Mo 4

Jelölje $s(t)$ a tartálybeli só mennyiségét t-edik időpillanatban. Legyen Δt egy "elegendően" kicsiny időtartam. Ekkor

$$s(t+\Delta t) = s(t) - \frac{s(t)5\Delta t}{100}$$

A $\Delta t \to 0$ határátmenetet véve kapjuk a

$$s' = -\frac{5}{100}s$$

differenciálegyenletet, melynek általános megoldása

$$s(t) = Ce^{-\frac{5}{100}t}$$

melyből,

$$s(0) = 0.5 = Ce^{0} = C$$

adódik, ahonnan

$$s(60) = \frac{0.5}{e^3} \approx \ 0.025\text{kg}.$$

Fa 4 Szöveges feladatok

Fa rádium

A rádium bomlási sebessége arányos a pillanatnyi rádium mennyiséggel. Tudjuk, hogy a bomlás következtében a rádium mennyisége 1000 év alatt felére csökken. Hány százaléka bomlik el az anyagnak 100 év alatt?

Mo rádium Szöveges feladatok

Mo rádium

Jelölje $m(t)$ a rádium atomok számát t időpillanatban. Ha Δt egy pozitív szám, akkor a

$$\frac{m(t) - m(t + \Delta t)}{\Delta t}$$

mennyiség az (átlagos) bomlási sebesség a $[t, t + \Delta t]$ intervallumon. $\Delta t \to 0$-t véve, megkapjuk a pillanatnyi bomlási sebességet, ami a feltevés szerint arányos a pillanatnyi anyagmennyiséggel:

$$m' = \beta m$$

$$m(t) = Ce^{\beta t} \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$m(0) = C$$

$$m(1000) = Ce^{\beta 1000} = 0.5C$$

$$\beta = \frac{\log(0.5)}{1000}$$

$$\frac{m(100)}{m(0)} = e^{\frac{\log(0.5)}{10}} \approx 0.933$$

Azaz kb. 6.67%-a bomlik el 100 év alatt a rádiumnak.

Fa rádium Szöveges feladatok

Fa hűlés

Egy test 10 perc alatt 100 C fokról 60 C fokra hűlt le. A környező levegő hőmérsékletét konstans 20 C foknak tekinthetjük. Mikor hűl le a test 25 C fokra, ha a test hűlésének sebessége egyenesen arányos a test és az őt körülvevő levegő hőmérsékletének különbségével? (bővebben: Newton law of cooling)

Mo hűlés Szöveges feladatok

Mo hűlés

Legyen a test hőmérséklete $h(t)$ a t-edik időpillanatban:

$$h'(t) = K(h(t) - 20) \quad \text{a feltételek és hűlés-törvény miatt}$$

$$(h(t) - 20)' = K(h(t) - 20) \;\; \text{homogén, megoldása:}$$

$$h(t) = Ce^{Kt} + 20$$

$$h(0) = 100 \implies C = 80$$

$$h(10) = 60, \quad 80e^{K10} + 20 = 60, \quad K = \frac{\log(0.5)}{10}$$

$$h(T) = 80e^{T\frac{\log(0.5)}{10}} + 20 = 80 \cdot 2^{-\frac{T}{10}} + 20 = 25$$

$$2^{-\frac{T}{10}} = 2^{-4}, \quad T = 40$$

Fa hűlés Szöveges feladatok

Kezdetiérték feladatok

Fa 1

Fa 2

Fa 3

Fa 4

Fa 5

Diffegyenletek

Fa 1

Oldja meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$\dot{x} = 2x - t, \qquad x(0) = 1$$

Mo 1 Kezdetiérték feladatok

Mo 1

elsőrendű, lineáris, inhomogén,

(homogén mo. -> általános mo. -> konstans meghatározása)

$$\dot{x} = 2x \quad \text{homogén:}$$

$$x = Ce^{2t} \quad \text{variálás:}$$

$$C'e^{2t} + C2e^{2t} = 2Ce^{2t} - t$$

$$C'(t) = -te^{-2t} \quad \text{parciális int:}$$

$$\int -te^{-2t}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\int t(-2e^{-2t})\mathrm{d}t = \frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{2}\int e^{-2t}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + K$$

$$x = \left(\frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + K\right)e^{2t}$$

$$x(0) = 1 = (0 + 0.25 + K) \cdot 1 \implies K = \frac{3}{4}$$

Fa 1 Kezdetiérték feladatok

Fa 2

Oldja meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$y' = xy \qquad y(0) = 1$$

Mo 2 Kezdetiérték feladatok

Mo **2**

A homogén elsőrendű lineárisak szétválaszthatóak, ezért a megoldás:

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

ezért

$$y(0) = C \cdot 1 = C = 1$$

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}$$

Fa 2 Kezdetiérték feladatok

Fa 3

Oldja meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$y'(t) = -y(t) + \cos(t), \qquad y(0) = 0$$

Mo 3 Kezdetiérték feladatok

Mo 3

elsőrendű, lineáris, inhomogén,

(homogén mo. -> általános mo. -> konstans meghatározása)

$$y(t) = Ce^{-t} \quad \text{a homogén megoldása, változó variálása:}$$

$$C'(t)e^{-t} + C(t)(-1)e^{-t} = -C(t)e^{-t} + \cos(t)$$

$$C'(t) = e^t \cos(t) \ \ \text{parciális int, kétféleképpen:}$$

$$\int e^t \cos(t)\mathrm{d}t = e^t \sin(t) - \int e^t \sin(t)\mathrm{d}t$$

$$\int e^t \cos(t)\mathrm{d}t = e^t \cos(t) + \int e^t \sin(t)\mathrm{d}t$$

$$\int e^t \cos(t)\mathrm{d}t = \frac{e^t(\sin(t) + \cos(t))}{2} + K$$

$$y(t) = \frac{\sin(t) + \cos(t)}{2} + Ke^t$$

$$y(0) = 0 = \frac{0+1}{2} + K \cdot 1 \implies K = -0.5$$

$$y(t) = \frac{\sin(t) + \cos(t) - e^t}{2}$$

Fa 3 Kezdetiérték feladatok

Fa 4

Oldja meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$\dot{x} + t^2 x = t^2, \qquad x(0) = 2$$

Mo 4 Kezdetiérték feladatok

Mo 4

$\dot{x} = -t^2 x$ a homogén rész, melynek megoldása:

$$x(t) = Ce^{-\frac{t^3}{3}} \quad \text{variálás:}$$

$$C'(t)e^{-\frac{t^3}{3}} + C(t)(-t^2)e^{-\frac{t^3}{3}} = -t^2 C(t)e^{-\frac{t^3}{3}} + t^2$$

$$C'(t) = t^2 e^{\frac{t^3}{3}} = \left(e^{\frac{t^3}{3}}\right)' \Longrightarrow$$

$$C(t) = e^{\frac{t^3}{3}} + K$$

$$y(t) = 1 + Ke^{-\frac{t^3}{3}}$$

$$y(0) = 2 = 1 + K \cdot 1 \Longrightarrow \quad K = 1$$

Fa 4 Kezdetiérték feladatok

Fa 5

Adjuk meg a

$$e^{y-x} + y'e^{x-y} = 0$$

egyenlettel megadott görbesereg origón átmenő példányát.

Mo 5 Kezdetiérték feladatok

Mo **5**

1.megoldás: szokásos módon szeparábilis-ként oldjuk meg

2.megoldás: látjuk, hogy az $y(x) = x$ egy megoldás, és az egyenletet $y' = f(x, y)$ alakban felírva felfedezhetjük, hogy teljesülnek a Picard-Lindelöf feltételei (f'_y folytonos), így megvan az egyetlen megoldás.

Fa 5 Kezdetiérték feladatok

$$y' = f(\frac{y}{x})$$

Desc Summa

Fa 1.feladat

Fa 2.feladat

Diffegyenletek

$$f(tx, ty) = f(x, y) \quad \text{változóiban homogén}$$

$$\iff \quad f(x, y) = h\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{mert:}$$

$$f(x, y) = f\left(x\frac{x_0}{x}, y\frac{x_0}{x}\right) =$$

$$= f\left(x_0, x_0\frac{y}{x}\right) = h\left(\frac{y}{x}\right)$$

Az ilyenek szeparábilisra vezetnek:

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{helyettesítés}$$

$$u'x + u = h(u) \quad \text{szeparábilis...}$$

$y' = f(\frac{y}{x})$

Fa 1.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

Mo 1.feladat $y' = f(\frac{y}{x})$

Mo 1.feladat

$$u = \frac{y}{x}$$

$$u'x + u = u + \frac{1}{u}$$

$$uu' = \frac{1}{x}$$

$$\int u \mathrm{d}u = \int \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

$$\frac{u^2}{2} = \log(|x|) + C$$

$$y = \pm x \left(\log(x^2) + C\right)^{\frac{1}{2}}$$

Fa 1.feladat $y' = f(\frac{y}{x})$

Fa 2.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet:

$$xy' + y\log(x) = y\log(y)$$

Mo 2.feladat $y' = f(\frac{y}{x})$

Mo 2.feladat

$$e^u = \frac{y}{x}$$

$$y' = e^u u' x + e^u = e^u u$$

$$u'x + 1 = u \qquad \text{szétválasztható:}$$

$$\frac{u'}{u-1} = \frac{1}{x} \qquad \text{integrálva:}$$

$$\log(|u-1|) = \log(|x|) + C$$

$$|u-1| = D|x| \quad D > 0$$

$$u = Dx + 1 \qquad D \in \mathbb{R}$$

$$y = xe^{Dx+1}$$

Fa 2.feladat $y' = f(\frac{y}{x})$

Bernoulli

Desc Summa

Fa 1.feladat

Fa 2.feladat

Fa 3.feladat

Fa 4.feladat

Diffegyenletek

$$y' = f_1 y + f_a y^a \quad \text{alakú,} \quad a \neq 0, 1$$

Keressük a megoldást u^b alakban:

$$bu^{b-1}u' = f_1 u^b + f_a u^{ab}$$

$$b - 1 = ab \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{1}{1-a}$$

$$bu' = f_1 u + f_a$$

$$u' = (1-a) f_1 u + (1-a) f_a$$

Összefoglalva:

$$u' = (1-a) f_1 u + (1-a) f_a \tag{ber}$$

$$y = u^{\frac{1}{1-a}}$$

Bernoulli

Fa 1.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$xy^2y' = x^2 + y^3$$

Mo 1.feladat Bernoulli

Mo 1.feladat

Bernoulli, $a = -2$-vel

$$y' = xy^{-2} + \frac{1}{x}y$$

$$u' = 3\frac{1}{x}u + 3x$$

$$u' = 3\frac{1}{x}u \quad \text{homogén:}$$

$$u = Cx^3 \quad \text{változó variálás:}$$

$$C'(x)x^3 + C(x)3x^2 = 3x + 3C(x)x^2$$

$$C'(x) = 3x^{-2},\ C(x) = -3x^{-1} + K$$

$$u = x^2(Kx - 3)$$

$$y = \left(x^2(Kx-3)\right)^{\frac{1}{3}}$$

Fa 1.feladat Bernoulli

Fa 2.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$tu' + 4u = t^4u^2 \qquad t > 0$$

Mo 2.feladat Bernoulli

2.feladat

Az eredeti egy Bernoulli $a = 2$-vel:

$$u' = -\frac{4}{t}u + t^3u^2$$

tehát $y^{\frac{1}{1-a}} = y^{-1} = u$ -val, a következőt kell megoldani:

$$y' = \frac{4}{t}y - t^3$$

$$y' = \frac{4}{t}y \implies y = Kt^4 \quad \text{változó variálás:}$$

$$K't^4 + K4t^3 = \frac{4}{t}Kt^4 - t^3$$

$$K' = -\frac{1}{t} \implies K(t) = -\log(|t|) + C$$

$$K(t) = C - \log(t) \quad t \text{ pozitív}$$

$$y = t^4(C - \log(t))$$

$$u = \frac{1}{t^4(C - \log(t))}$$

Fa 3.feladat

Oldja meg a következő differenciálegyenletet :

$$u' = u^4 \cos(x) + u \tan(x)$$

Mo 3.feladat Bernoulli

Bernoulli $a = 4$-el:

$$y' = -3\tan(x)y - 3\cos(x)$$

$$y' = -3\tan(x)y \qquad \text{homogén:}$$

$$y = Ce^{-3\int \tan(x)\mathrm{d}x}$$

$$\int \tan(x)\mathrm{d}x = -\log(|\cos(x)|)$$

$$y = C|\cos(x)|^3$$

$$y = C\cos^3(x) \qquad \text{konstans variálás:}$$

$$C'(x)\cos^3(x) - \underbrace{C(x)3\cos^2(x)\sin(x)} =$$

$$= \underbrace{-3\tan(x)C(x)\cos^3(x)} - 3\cos(x)$$

$$C'(x)\cos^3(x) = -3\cos(x)$$

$$C'(x) = -3\frac{1}{\cos^2(x)} C(x) = -3\tan(x) + K$$

$$y(x) = (-3\tan(x) + K)\cos^3(x)$$

$$u(x) = \left((-3\tan(x) + K)\cos^3(x)\right)^{-\frac{1}{3}}$$

Fa 4.feladat

Oldja meg következő differenciálegyenletet:

$$3x' + x = (1 - 2t)x^4$$

Mo 4.feladat Bernoulli

Mo 4.feladat

$$x' = -\frac{1}{3}x + \frac{1-2t}{3}x^4 \qquad \text{Bernoulli, } a = 4$$

$$y' = y + (2t-1) \qquad y^{-\frac{1}{3}} = x$$

$$y = C(t)e^t \qquad \text{:hom.mo.; C-variálás:}$$

$$C'(t) = e^{-t}(2t-1) \qquad \text{parciális int.:}$$

$$\int e^{-t}(2t-1)\mathrm{d}t = -e^{-t}(2t-1) - \int -e^{-t}2\mathrm{d}t =$$

$$= -e^{-t}(2t-1) - 2e^{-t} =$$

$$= K - e^{-t}(2t+1) \ \text{ inhom-ba vissza:}$$

$$y = \big(K - e^{-t}(2t+1)\big)e^t$$

$$x = y^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{((K - e^{-t}(2t+1))e^t)^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{(Ke^t - (2t+1))^{\frac{1}{3}}} =$$

Fa 4.feladat Bernoulli

$$y'' = a_1 y' + a_0 y$$

Desc Képlet

Diffegyenletek

Desc **Képlet**

másodrendű, lineáris, homogén, konstans együtthatós:

$$y'' = a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$\lambda^2 = a_1\lambda + a_0 = 0 \text{ karakterisztikus egyenlet}$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ valósak:}$$

$$C_1 e^{\lambda 1 t} + C_2 e^{\lambda 2 t} \text{ az ált. mo.}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \text{ valós:}$$

$$C_1 e^{\lambda 1 t} + C_2 t e^{\lambda 2 t} \text{ az ált. mo.}$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ komplexek:}$$

$$\lambda_{1,2} = a \pm bi$$

$$C_1 e^{at}\cos(bt) + C_2 t e^{at}\sin(bt) \text{ az ált. mo.}$$

$$y'' = a_1 y' + a_0 y$$

Fourier

Sorok

Transzform

Matematika mérnököknek 2

Sorok

Desc Egyben

Fourier

Egyben

pdf

Sorok

Transzform

Desc Egyben

Fourier

Egyben

pdf

Transzform

Matlab

Desc diff

Fa másik diff

Desc függvények megadása

Matematika mérnököknek 2

Desc diff

`diff`

`input:` $v = [v_1, \ldots, v_n]$

`output:` $dv = [v_2 - v_1, \ldots, v_n - v_{n-1}]$

`példa:`

```
v=[1:7].^2
v =
     1     4     9    16    25    36    49
dv=diff(v)
dv =
     3     5     7     9    11    13
diff(diff(v))
ans =
   2    2    2    2    2
diff(v,2)
ans =
   2    2    2    2    2
```

Azaz megfelelő paraméterezéssel több `diff` hívást összevonhatunk.

Matlab

Fa **másik diff**

Hogyan valósitaná meg a `diff` függvényt? (elegendő ha vektorok esetén működik, de ciklust ne tartalmazzon!)

Mo másik diff Matlab

Mo másik diff

Egy lehetséges megoldás:

```
function dv=mdiff(v)
    dv=v(2, end)-v(1, end-1);
end
```

Próbáljuk ki!

Fa másik diff Matlab

Desc függvények megadása

Rövid függvények megadásának legegyszerűbb módja:

```
fun = @(x) x.^2
fun =
@(x) x .^ 2
fun(1:7)
ans =
     1     4     9    16    25    36    49
```

További lehetőségek: create functions.

Matlab