

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \neg B \vdash \neg A} \quad (1)$$

Bizonyítás:

$$\begin{array}{c} \text{(Bővítés)} \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, A, \neg B \vdash B} \quad \frac{\varepsilon}{\Gamma, A, \neg B \vdash \neg B} \quad \text{(Azonosság)} \\ \text{(Felcserélés)} \quad \frac{\Gamma, \neg B, A \vdash B}{\Gamma, \neg B, A \vdash \neg B} \quad \text{(Felcserélés)} \\ \text{(\neg 1.)} \quad \frac{\Gamma, \neg B \vdash \neg A}{\Gamma, \neg B \vdash \neg A} \\ \frac{\Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma, B \vdash \neg A} \end{array} \quad (2)$$

Bizonyítás:

$$\begin{array}{c} \text{(Azonosság)} \quad \frac{\varepsilon}{\Gamma, A, B \vdash B} \quad \frac{\Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma, A, B \vdash \neg B} \quad \text{(Bővítés)} \\ \text{(Felcserélés)} \quad \frac{\Gamma, B, A \vdash B}{\Gamma, B, A \vdash \neg B} \quad \text{(Felcserélés)} \\ \text{(\neg 1.)} \quad \frac{\Gamma, B \vdash \neg A}{\Gamma, B \vdash \neg A} \\ \frac{\Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma, \neg B \vdash A} \end{array} \quad (3)$$

Bizonyítás:

$$\begin{array}{c} \text{(Bővítés)} \quad \frac{\Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma, \neg A, \neg B \vdash B} \quad \frac{\varepsilon}{\Gamma, \neg A, \neg B \vdash \neg B} \quad \text{(Azonosság)} \\ \text{(Felcserélés)} \quad \frac{\Gamma, \neg B, \neg A \vdash B}{\Gamma, \neg B, \neg A \vdash \neg B} \quad \text{(Felcserélés)} \\ \text{(\neg 1.)} \quad \frac{\Gamma, \neg B \vdash \neg \neg A}{\Gamma, \neg B \vdash A} \\ \frac{\Gamma, \neg A \vdash \neg B}{\Gamma, B \vdash A} \end{array} \quad (4)$$

Bizonyítás:

$$\begin{array}{c} \text{(Azonosság)} \quad \frac{\varepsilon}{\Gamma, \neg A, B \vdash B} \quad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \neg B}{\Gamma, \neg A, B \vdash \neg B} \quad \text{(Bővítés)} \\ \text{(Felcserélés)} \quad \frac{\Gamma, B, \neg A \vdash B}{\Gamma, B, \neg A \vdash \neg B} \quad \text{(Felcserélés)} \\ \text{(\neg 1.)} \quad \frac{\Gamma, B \vdash \neg \neg A}{\Gamma, B \vdash A} \\ \vdash A \supset A \end{array} \quad (5)$$

Bizonyítás:

$$\begin{array}{c} \text{(Azonosság)} \quad \frac{\varepsilon}{A \vdash A} \\ \text{(\supset 1.)} \quad \frac{A \vdash A}{\vdash A \supset A} \end{array}$$

$$A, A \supset B \vdash B \quad (6)$$

Bizonyítás:

$$\frac{\frac{\frac{\varepsilon}{A \supset B, A \vdash A}}{A, A \supset B \vdash A} \quad \frac{\frac{\varepsilon}{A, A \supset B \vdash A \supset B}}{A, A \supset B \vdash B}}$$

$$A \vdash B \supset A \quad (7)$$

Bizonyítás:

$$\begin{array}{l} \text{(Azonoság)} \quad \frac{\frac{\varepsilon}{B, A \vdash A}}{\text{(Felcserélés)} \quad \frac{A, B \vdash A}{A \vdash B \supset A}} \\ \text{(\supset 1.)} \end{array}$$

$$A, \neg A \vdash B \quad (8)$$

$$\neg A \vdash A \supset B \quad (9)$$

Bizonyítás (8), (9):

$$\frac{\frac{\frac{\varepsilon}{A, \neg B, \neg A \vdash \neg A}}{A, \neg A, \neg B \vdash \neg A} \quad \frac{\frac{\frac{\varepsilon}{\neg A, \neg B, A \vdash A}}{\neg A, A, \neg B \vdash A}}{A, \neg A, \neg B \vdash A}}{A, \neg A \vdash \neg \neg B} \quad \frac{A, \neg A \vdash \neg \neg B}{A, \neg A \vdash B} \quad \frac{\neg A, A \vdash B}{\neg A \vdash A \supset B}$$

$$B \vdash A \supset B \quad (10)$$

Bizonyítás:

$$\frac{\frac{\frac{\varepsilon}{B \vdash B}}{B, A \vdash B}}{B \vdash A \supset B}$$

$$\vdash A \supset B \equiv \neg A \vee B \quad (11)$$

Bizonyítás: Először lássuk be, hogy

$$A \supset B \vdash \neg A \vee B \quad (12)$$

$$\frac{\frac{\frac{\varepsilon}{A \supset B \vdash A \supset B}}{A \supset B, \neg(\neg A \vee B) \vdash A \supset B} \quad (3) \frac{\frac{\frac{\varepsilon}{\neg A \vdash \neg A}}{\neg A \vdash \neg A \vee B}}{\neg(\neg A \vee B) \vdash A}}{A \supset B, \neg(\neg A \vee B) \vdash A}}{A \supset B, \neg(\neg A \vee B) \vdash B}$$

$$\frac{(1) \frac{\frac{\frac{\varepsilon}{B \vdash B}}{B \vdash \neg A \vee B}}{\neg(\neg A \vee B) \vdash \neg B}}{A \supset B, \neg(\neg A \vee B) \vdash \neg B} \quad \frac{A \supset B, \neg(\neg A \vee B) \vdash B \quad A \supset B, \neg(\neg A \vee B) \vdash \neg B}{A \supset B \vdash \neg \neg(\neg A \vee B)}}{A \supset B \vdash \neg A \vee B}$$

(11) bizonyításához lássuk be, hogy

$$\neg A \vee B \vdash A \supset B \quad (13)$$

$$\frac{(9) \quad \neg A \vdash A \supset B \quad (10) \quad B \vdash A \supset B}{\neg A \vee B \vdash A \supset B}$$

$$A \supset B, \neg B \vdash \neg A \quad (14)$$

$$A \supset B \vdash \neg B \supset \neg A \quad (15)$$

Bizonyítás (14), (15):

$$\frac{\frac{\frac{\varepsilon}{A \supset B, A, \neg B \vdash \neg B}}{A \supset B, \neg B, A \vdash \neg B} \quad \frac{\frac{\frac{\varepsilon}{A, A \supset B \vdash B}}{A \supset B, A \vdash B}}{A \supset B, A, \neg B \vdash B}}{A \supset B, \neg B, A \vdash B} \quad \frac{A \supset B, \neg B \vdash \neg A}{A \supset B \vdash \neg B \supset \neg A}}{\neg B \supset \neg A \vdash A \supset B} \quad (16)$$

Bizonyítás:

$$\frac{\frac{\frac{\varepsilon}{\neg B \supset \neg A, \neg B, A \vdash A}}{\neg B \supset \neg A, \neg B, A \vdash \neg \neg B} \quad \frac{\frac{\frac{\varepsilon}{\neg B \supset \neg A, \neg B \vdash \neg A}}{\neg B \supset \neg A, \neg B, A \vdash \neg A}}{\neg B \supset \neg A, A \vdash \neg \neg B}}{\neg B \supset \neg A, A \vdash B} \quad \frac{\neg B \supset \neg A \vdash A \supset B}$$

(15), (16) alapján:

$$\vdash A \supset B \equiv \neg B \supset \neg A \quad (17)$$

Bizonyítás:

$$\frac{A \supset B \vdash \neg B \supset \neg A \quad \neg B \supset \neg A \vdash A \supset B}{\vdash A \supset B \equiv \neg B \supset \neg A}$$

$$\vdash (A \vee \neg A) \quad (18)$$

Bizonyítás:

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\varepsilon}{A, \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)}}{\neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A)} \quad \frac{\frac{\varepsilon}{\neg(A \vee \neg A), A \vdash A}}{\neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A} \\ \hline \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A \\ \\ \frac{\frac{\varepsilon}{\neg A, \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)}}{\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash \neg(A \vee \neg A)} \quad \frac{\frac{\varepsilon}{\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash \neg A}}{\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash A \vee \neg A} \\ \hline \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg \neg A \\ \neg(A \vee \neg A) \vdash A \\ \\ \frac{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A \quad \neg(A \vee \neg A) \vdash A}{\vdash \neg \neg(A \vee \neg A)} \\ \vdash (A \vee \neg A) \\ \\ A \wedge B \vdash B \wedge A \end{array} \quad (19)$$

Bizonyítás:

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\varepsilon}{A, B \vdash B} \quad \frac{\frac{\varepsilon}{B, A \vdash A}}{A, B \vdash A}}{A, B \vdash B \wedge A} \\ \hline A \wedge B \vdash B \wedge A \\ \\ A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \end{array} \quad (20)$$

Bizonyítás:

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\varepsilon}{B, A \vdash A}}{A, B \vdash A} \quad \frac{\varepsilon}{A, B \vdash B} \quad \frac{\frac{\varepsilon}{C, A \vdash A}}{A, C \vdash A} \quad \frac{\varepsilon}{A, C \vdash C} \\ \hline A, B \vdash A \wedge B \quad A, C \vdash A \wedge C \\ \hline A, B \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad A, C \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ \hline A, B \vee C \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ \hline A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \end{array}$$

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C) \quad (21)$$

Bizonyítás:

$$\frac{\frac{\frac{\varepsilon}{B, A \vdash A}}{A, B \vdash A} \quad \frac{\frac{\varepsilon}{C, A \vdash A}}{A, C \vdash A} \quad \frac{\frac{\varepsilon}{A, B \vdash B}}{A \wedge B \vdash B} \quad \frac{\frac{\varepsilon}{A, C \vdash C}}{A \wedge C \vdash C}}{\frac{\frac{A \wedge B \vdash A}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A} \quad \frac{A \wedge C \vdash A}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash B \vee C}}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)}$$

(20) és (21) alapján:

$$\vdash A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad (22)$$

$$\vdash A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad (23)$$

Bizonyítás: Először lássuk be, hogy

$$A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad (24)$$

$$\frac{\frac{\frac{\varepsilon}{A \vdash A}}{A \vdash A \vee B} \quad \frac{\frac{\frac{\varepsilon}{B \vdash B}}{B, C \vdash B}}{B, C \vdash A \vee B} \quad \frac{\frac{\varepsilon}{A \vdash A}}{A \vdash A \vee C} \quad \frac{\frac{\frac{\varepsilon}{C \vdash C}}{C \vdash A \vee C}}{B, C \vdash A \vee C}}{\frac{\frac{A \vee (B \wedge C) \vdash A \vee B}{A \vee (B \wedge C) \vdash A \vee C} \quad \frac{A \vee (B \wedge C) \vdash A \vee C}{A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)}}$$

Most lássuk be, hogy

$$(A \vee B) \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C) \quad (25)$$

$$\frac{\frac{\frac{\varepsilon}{A \vdash A}}{A \vdash A \vee (B \wedge C)} \quad \frac{\frac{\frac{\varepsilon}{B \vdash B}}{B, C \vdash B} \quad \frac{\frac{\varepsilon}{C \vdash C}}{B, C \vdash C}}{B, C \vdash B \wedge C}}{\frac{A \vdash A \vee (B \wedge C) \quad B, C \vdash A \vee (B \wedge C)}{A \vee B, C \vdash A \vee (B \wedge C)}}$$

$$\frac{\frac{A \vee B, A \vdash A \vee (B \wedge C) \quad A \vee B, C \vdash A \vee (B \wedge C)}{A \vee B, A \vee C \vdash A \vee (B \wedge C)}}{(A \vee B) \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)}$$

$$\vdash (A \supset B) \supset (B \supset C) \supset (A \supset C) \quad (26)$$

Bizonyítás: Használjuk fel már bizonyított (6) szekvenciát.

$$\frac{\frac{\frac{A \supset B, A \vdash B \quad B, B \supset C \vdash C}{A \supset B, A, B \supset C \vdash C}}{A \supset B, B \supset C, A \vdash C}}{A \supset B, B \supset C \vdash A \supset C}}{A \supset B \vdash (B \supset C) \supset (A \supset C)}}{\vdash (A \supset B) \supset (B \supset C) \supset (A \supset C)}$$

$$\vdash (A \supset B) \supset (A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C) \quad (27)$$

Bizonyítás: Használjuk fel már bizonyított (6) szekvenciát.

$$\frac{\frac{\frac{A, A \supset B \vdash B}{A, A \supset B, A \supset (B \supset C) \vdash B} \quad \frac{A, A \supset (B \supset C) \vdash B \supset C}{A, A \supset B, A \supset (B \supset C) \vdash B \supset C}}{A, A \supset B, A \supset (B \supset C) \vdash C}}{A \supset B, A \supset (B \supset C) \vdash A \supset C}}{A \supset B \vdash (A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)}}{\vdash (A \supset B) \supset (A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)}$$

A De Morgan azonosságok:

$$\vdash \neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B) \quad (28)$$

$$\vdash \neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B) \quad (29)$$

A (28) bizonyításához először lássuk be, hogy

$$\neg(A \wedge B) \vdash (\neg A \vee \neg B) \quad (30)$$

$$(3) \frac{\frac{\frac{\varepsilon}{\neg A \vdash \neg A}}{\neg A \vdash \neg A \vee \neg B}}{\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash A} \quad (3) \frac{\frac{\frac{\varepsilon}{\neg B \vdash \neg B}}{\neg B \vdash \neg A \vee \neg B}}{\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash B}}{(3) \frac{\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash A \wedge B}{\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B}}$$

A (28) bizonyításához most lássuk be, hogy

$$\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B) \quad (31)$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\varepsilon}{A \vdash A} \\
\frac{A \vdash A}{A, B \vdash A} \\
\frac{A \wedge B \vdash A}{\neg A \vee \neg B, A \wedge B \vdash A} \\
\hline
\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\frac{\varepsilon}{\neg A \vdash \neg A} \\
\frac{\neg A \vdash \neg A}{B, \neg A \vdash \neg A} \\
\frac{(8) \quad B, \neg B \vdash \neg A}{B, \neg A \vee \neg B \vdash \neg A} \\
\frac{B, \neg A \vee \neg B \vdash \neg A}{\neg A \vee \neg B, B \vdash \neg A} \\
\frac{\neg A \vee \neg B, B \vdash \neg A}{\neg A \vee \neg B, A, B \vdash \neg A} \\
\frac{\neg A \vee \neg B, A, B \vdash \neg A}{\neg A \vee \neg B, A \wedge B \vdash \neg A} \\
\hline
\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)
\end{array}$$

A (29) bizonyításához először lássuk be, hogy

$$\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B \quad (32)$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\varepsilon}{A \vdash A} \\
\frac{A \vdash A}{A \vdash A \vee B} \\
\frac{A \vdash A \vee B}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A} \\
(1) \quad \frac{\neg(A \vee B) \vdash \neg A}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B} \\
\hline
\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\frac{\varepsilon}{B \vdash B} \\
\frac{B \vdash B}{B \vdash A \vee B} \\
\frac{B \vdash A \vee B}{\neg(A \vee B) \vdash \neg B} \\
(1) \quad \frac{\neg(A \vee B) \vdash \neg B}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B} \\
\hline
\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B
\end{array}$$

A (29) bizonyításához most lássuk be, hogy

$$\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B) \quad (33)$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\varepsilon}{\neg A \vdash \neg A} \\
\frac{\neg A \vdash \neg A}{\neg A, \neg B \vdash \neg A} \\
\frac{\neg A, \neg B \vdash \neg A}{\neg A \wedge \neg B \vdash \neg A} \\
(2) \quad \frac{\neg A \wedge \neg B \vdash \neg A}{A \vdash \neg(\neg A \wedge \neg B)} \\
\hline
\frac{A \vee B \vdash \neg(\neg A \wedge \neg B)}{\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)} \\
(2) \quad \frac{A \vee B \vdash \neg(\neg A \wedge \neg B)}{\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\frac{\varepsilon}{\neg B \vdash \neg B} \\
\frac{\neg B \vdash \neg B}{\neg A, \neg B \vdash \neg B} \\
\frac{\neg A, \neg B \vdash \neg B}{\neg A \wedge \neg B \vdash \neg B} \\
(2) \quad \frac{\neg A \wedge \neg B \vdash \neg B}{B \vdash \neg(\neg A \wedge \neg B)} \\
\hline
\frac{A \vee B \vdash \neg(\neg A \wedge \neg B)}{\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)} \\
(2) \quad \frac{A \vee B \vdash \neg(\neg A \wedge \neg B)}{\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)}
\end{array}$$