

Logika kiskaté

Mihálydeák Tamás és Aszalós László

2012

1. Definíciók

1. Adja meg a klasszikus nulladrendű nyelv definícióját!

Megoldás: Klasszikus nulladrendű nyelven az $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ rendezett hármast értjük, ahol $LC = \{\neg, \supset, \wedge, \vee, \equiv, (,)\}$ (a nyelv logikai konstansainak halmaza). $Con \neq \emptyset$ a nyelv nemlogikai konstansainak (állítás- vagy kijelentés-paramétereinek) legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaza. Az $LC \cap Con = \emptyset$. A nyelv formuláinak a halmazát, azaz a $Form$ halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:

- $Con \subseteq Form$
- Ha $A \in Form$, akkor $\neg A \in Form$.
- Ha $A, B \in Form$, akkor
 - $(A \supset B) \in Form$,
 - $(A \wedge B) \in Form$,
 - $(A \vee B) \in Form$,
 - $(A \equiv B) \in Form$.

2. Adja meg a nulladrendű atomi formula definícióját!

Megoldás: Ha $L^{(0)}$ egy nulladrendű nyelv (azaz $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$), akkor Con halmaz elemeit nulladrendű atomi formuláknak vagy nulladrendű prímformuláknak nevezzük.

3. Adja meg a részformula definícióját a nulladrendű nyelvben!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy tetszőleges nulladrendű nyelv, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája. Az A formula részformuláinak halmaza az a legszűkebb halmaz [jelölés: $RF(A)$], amelyre teljesül, hogy

- $A \in RF(A)$, azaz az A formula részformulája önmagának;
- ha $\neg B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$;
- ha $(B \supset C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;

- ha $(B \wedge C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \vee C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \equiv C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$.

4. Adja meg a közvetlen részformula definícióját a nulladrendű nyelvben!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy tetszőleges nulladrendű nyelv.

- Ha A atomi formula (azaz $A \in Con$), akkor nincs közvetlen részformulája;
- $\neg A$ egyetlen közvetlen részformulája A ;
- Az $(A \supset B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \equiv B)$ formulák közvetlen részformulái az A és a B formulák.

5. Adja meg a részformula definícióját a közvetlen részformula segítségével nulladrendű nyelvben!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy tetszőleges nulladrendű nyelv, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája. Egy A formula részformuláinak halmaza az a legszűkebb halmaz [jelölés: $RF(A)$], amelyre teljesül, hogy

- $A \in RF(A)$, (azaz az A formula részformulája önmagának);
- ha $A' \in RF(A)$ és B közvetlen részformulája A' -nek, akkor $B \in RF(A)$ (azaz, ha egy A' formula részformulája A -nak, akkor A' összes közvetlen részformulája is részformulája A -nak).

6. Adja meg a szerkezeti fa definícióját nulladrendű nyelv esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy tetszőleges nulladrendű nyelv, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája. Az A formula szerkezeti fáján egy olyan véges rendezett fát értünk,

- amelynek csúcsai formulák,
- gyökere az A formula,
- $\neg B$ alakú csúcsának egyetlen gyermeke a B formula,
- $(B \supset C)$, $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$, $(B \equiv C)$ alakú csúcsainak két gyermekét a B , illetve a C formulák alkotják,
- levelei prímformulák (atomi formulák).

7. Adja meg a nulladrendű logika interpretációjának definícióját!

Megoldás: A ϱ függvényt az $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ nulladrendű nyelv egy interpretációjának nevezzük, ha

- $Dom(\varrho) = Con$
- Ha $p \in Con$, akkor $\varrho(p) \in \{0, 1\}$.

8. Adja meg a formula szemantikai értékének definícióját nulladrendű logika esetén (azaz adja meg nulladrendű logika szemantikai szabályait)!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, és ϱ egy nulladrendű interpretáció. Az $A \in Form$ formula ϱ interpretáció szerinti szemantikai értékét a következő szabályok határozzák meg (jelölés: $|A|_{\varrho}$ jelöli az A formula ϱ interpretáció szerinti értékét):

- Ha $p \in Con$, akkor $|p|_{\varrho} = \varrho(p)$
- Ha $A \in Form$, akkor $|\neg A|_{\varrho} = 1 - |A|_{\varrho}$.
- Ha $A, B \in Form$, akkor
- $|(A \supset B)|_{\varrho} = \begin{cases} 0, & \text{ha } |A|_{\varrho} = 1 \text{ és } |B|_{\varrho} = 0 \\ 1, & \text{egyébként} \end{cases}$
- $|(A \wedge B)|_{\varrho} = \begin{cases} 1, & \text{ha } |A|_{\varrho} = 1 \text{ és } |B|_{\varrho} = 1 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$
- $|(A \vee B)|_{\varrho} = \begin{cases} 0, & \text{ha } |A|_{\varrho} = 0 \text{ és } |B|_{\varrho} = 0 \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$
- $|(A \equiv B)|_{\varrho} = \begin{cases} 1, & \text{ha } |A|_{\varrho} = |B|_{\varrho} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$

9. Adja meg a formulahalmaz modelljének definícióját nulladrendű logika esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz. A ϱ interpretáció nulladrendű modellje a Γ formulahalmaznak, ha minden $A \in \Gamma$ esetén $|A|_{\varrho} = 1$

10. Adja meg a formula modelljének definícióját nulladrendű logika esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $A \in Form$ egy tetszőleges formula. Az A formula modelljén az $\{A\}$ egyelemű formulahalmaz modelljét értjük.

11. Adja meg a formulahalmaz kielégíthetőségének definícióját nulladrendű logika esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz. A Γ formulahalmaz kielégíthető, ha van modellje.

12. Adja meg a formula kielégíthetőségének definícióját nulladrendű logika esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $A \in Form$ egy tetszőleges formula. Az A formula kielégíthető, ha az $\{A\}$ formulahalmaz kielégíthető.

13. Adja meg a formulahalmaz kielégíthetlenségének definícióját nulladrendű logika esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz. Az Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, ha nem kielégíthető, azaz nincs modellje.

14. Adja meg a formula kielégíthetlenségének definícióját nulladrendű logika esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $A \in Form$ egy tetszőleges formula. Az A formula kielégíthetetlen, ha az $\{A\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen.

15. Adja meg a formulahalmaz logikai következményének definícióját nulladrendű logika esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz, és $A \in Form$ egy formula. A Γ formulahalmaznak logikai következménye az A formula, ha a $\Gamma \cup \{\neg A\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen. Jelölés: $\Gamma \models A$

16. Adja meg a formula logikai következményének definícióját nulladrendű logika esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $A, B \in Form$ két tetszőleges formula. Az A formulának logikai következménye a B formula, ha a $\{A\} \models B$. Jelölés: $A \models B$

17. Adja meg az érvényesség definícióját nulladrendű logika esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula. Az A formula érvényes, ha $\emptyset \models A$, azaz ha az A formula logikai következménye az üres halmaznak. Jelölés: $\models A$

18. Adja meg a formulák logikai ekvivalenciájának definícióját nulladrendű logika esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, és $A, B \in Form$ két formula. Az A és a B formula logikailag ekvivalens, ha $A \models B$ és $B \models A$. Jelölés: $A \Leftrightarrow B$

19. Adja meg a zárójelelhagyási konvenciókat nulladrendű nyelv esetén!

Megoldás:

- A legkülső zárójelpár mindig elhagyható.
- A kétargumentumú logikai konstansok elsőbbségi (precedencia) sorrendje: $\wedge, \vee, \supset, \equiv$
- A negáció erősebb bármely kétargumentumú logikai konstansnál.
- Az azonos kétargumentumú logikai konstansok egymás közötti elsőbbségét a balról jobbra szabály rendezzi: először mindig a bal oldali formulát tekintjük külön műveleti komponensnek.

20. Adja meg a literál definícióját!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv. Ha $p \in Con$, akkor a $p, \neg p$ formulákat literálnak nevezzük. A $p, \neg p$ literálok esetén a p paramétert a literál alapjának nevezzük.

21. Adja meg az elemi konjunkció definícióját!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv. Ha az $A \in Form$ formula literál vagy különböző alapú literálok konjunkciója, akkor A -t elemi konjunkciónak nevezzük.

22. Adja meg az elemi diszjunkció definícióját!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv. Ha az $A \in Form$ formula literál vagy különböző alapú literálok diszjunkciója, akkor A -t elemi diszjunkciónak nevezzük.

23. Adja meg a diszjunktív normálforma definícióját!

Megoldás: Egy elemi konjunkciót vagy elemi konjunkciók diszjunkcióját diszjunktív normálformának nevezzük.

24. Adja meg a konjunktív normálforma definícióját!

Megoldás: Egy elemi diszjunkciót vagy elemi diszjunkciók konjunkcióját konjunktív normálformának nevezzük.

25. Adja meg az axiómaséma definícióját nulladrendű kalkulus esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv (a klasszikus állításlogika nyelve). A nulladrendű kalkulus (klasszikus állításkalkulus) axiómasémái (alapsémái):

- (A1) $A \supset (B \supset A)$
- (A2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3) $(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$

26. Adja meg a axiómaséma szabályos behelyettesítésének definícióját!

Megoldás: Az axiómaséma szabályos behelyettesítésén olyan formulát értünk, amely az axiómasémából a benne szereplő betűk tetszőleges formulával való helyettesítése útján jön létre.

27. Adja meg az axióma definícióját nulladrendű kalkulus esetén!

Megoldás: A nulladrendű kalkulus (klasszikus állításkalkulus) axiómái az axiómasémák szabályos behelyettesítései.

28. Adja meg a formulahalmaz szintaktikai következményének definícióját nulladrendű kalkulus esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz. A Γ formulahalmaz szintaktikai következményeinek induktív definíciója:

Bázis:

- Ha $A \in \Gamma$, akkor $\Gamma \vdash A$.
- Ha A axióma, akkor $\Gamma \vdash A$.

Szabály (leválasztási szabály):

- Ha $\Gamma \vdash B$, és $\Gamma \vdash (B \supset A)$, akkor $\Gamma \vdash A$.

29. Adja meg a formula szintaktikai következményének definícióját nulladrendű kalkulus esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $A, B \in Form$ két tetszőleges formula. Az A formulának szintaktikai következménye a B formula, ha $\{A\} \vdash B$. Jelölés: $A \vdash B$

30. Adja meg az inkonzisztens formulahalmaz definícióját nulladrendű kalkulus esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz. A Γ formulahalmaz inkonzisztens, ha $Cns(\Gamma) = Form$.

31. Adja meg az inkonzisztens formula definícióját nulladrendű kalkulus esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $A \in Form$ egy tetszőleges formula. Az A formula inkonzisztens, ha $Cns(\{A\}) = Form$.

32. Adja meg a konzisztens formulahalmaz definícióját nulladrendű kalkulus esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz. A Γ formulahalmaz konzisztens, ha nem inkonzisztens.

33. Adja meg a konzisztens formula definícióját nulladrendű kalkulus esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $A \subseteq Form$ egy tetszőleges formula. Az A formula konzisztens, ha nem inkonzisztens.

34. Adja meg a levezethető formula definícióját!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula. Az A formula levezethető, ha $\emptyset \vdash A$, azaz ha az A formula szintaktikai következménye az üres halmaznak. Jelölés: $\vdash A$

35. Adja meg a szekvencia definícióját!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A \in Form$ egy formula. Ha az A formula szintaktikai következménye a Γ formulahalmaznak, akkor a ' $\Gamma \vdash A$ ' jelsorozatot szekvenciának nevezzük.

36. Adja meg a természetes levezetés által bizonyítható következményrelációk definícióját nulladrendű kalkulus esetén (azaz adja meg a természetes levezetés által bizonyítható szekvenciák definícióját)!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, $\Gamma, \Delta \subseteq Form$ és $A, B, C \in Form$. A természetes levezetés által az $L^{(0)}$ nyelvben bizonyítható következményrelációk $PrND$ halmazát az alábbi induktív definíció adja meg:

Bázis:

- $\Gamma, A \vdash A \in PrND$.

Szabályok:

- Strukturális szabályok:
 - Ha $\Gamma \vdash A \in PrND$, akkor $\Gamma, B \vdash A \in PrND$.
 - Ha $\Gamma, B, B, \Delta \vdash A \in PrND$, akkor $\Gamma, B, \Delta \vdash A \in PrND$.
 - Ha $\Gamma, B, C, \Delta \vdash A \in PrND$, akkor $\Gamma, C, B, \Delta \vdash A \in PrND$.
 - Ha $\Gamma \vdash A \in PrND$ és $\Delta, A \vdash B \in PrND$, akkor $\Gamma \cup \Delta \vdash B \in PrND$.
- Logikai szabályok:
 - Ha $\Gamma, A \vdash B \in PrND$, akkor $\Gamma \vdash (A \supset B) \in PrND$.
 - Ha $\Gamma \vdash A \in PrND$ és $\Gamma \vdash (A \supset B) \in PrND$, akkor $\Gamma \vdash B \in PrND$.

- Ha $\Gamma, A \vdash B \in PrND$ és $\Gamma, A \vdash \neg B \in PrND$, akkor $\Gamma \vdash \neg A \in PrND$.
- Ha $\Gamma \vdash \neg\neg A \in PrND$, akkor $\Gamma \vdash A \in PrND$.
- Ha $\Gamma \vdash A \in PrND$ és $\Gamma \vdash B \in PrND$, akkor $\Gamma \vdash (A \wedge B) \in PrND$.
- Ha $\Gamma, A, B \vdash C \in PrND$, akkor $\Gamma, (A \wedge B) \vdash C \in PrND$.
- Ha $\Gamma \vdash A \in PrND$, akkor $\Gamma \vdash (A \vee B) \in PrND$.
- Ha $\Gamma \vdash B \in PrND$, akkor $\Gamma \vdash (A \vee B) \in PrND$.
- Ha $\Gamma, A \vdash C \in PrND$ és $\Gamma, B \vdash C \in PrND$, akkor $\Gamma, (A \vee B) \vdash C \in PrND$.
- Ha $\Gamma, A \vdash B \in PrND$ és $\Gamma, B \vdash A \in PrND$, akkor $\Gamma \vdash (A \equiv B) \in PrND$.
- Ha $\Gamma \vdash A \in PrND$ és $\Gamma \vdash (A \equiv B) \in PrND$, akkor $\Gamma \vdash B \in PrND$.
- Ha $\Gamma \vdash B \in PrND$ és $\Gamma \vdash (A \equiv B) \in PrND$, akkor $\Gamma \vdash A \in PrND$.

37. Adja meg a klasszikus elsőrendű nyelv definícióját!

Megoldás: Klasszikus elsőrendű nyelven az

$$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$$

rendezett ötöst értjük, ahol

- $LC = \{\neg, \supset, \wedge, \vee, \equiv, =, \forall, \exists, (,)\}$ (a nyelv logikai konstansainak halmaza).
- $Var = (\{x_n | n = 0, 1, 2, \dots\})$ a nyelv változóinak megszámlálhatóan végtelen halmaza.
- $Con = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathcal{F}(n) \cup \mathcal{P}(n))$ a nyelv nemlogikai konstansainak legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaza.
 - $\mathcal{F}(0)$ a névparaméterek (névkonstansok),
 - $\mathcal{F}(n)$ az n argumentumú ($n = 1, 2, \dots$) függvényjelek (műveleti jelek),
 - $\mathcal{P}(0)$ az állításparaméterek (állításkonstansok),
 - $\mathcal{P}(n)$ az n argumentumú ($n = 1, 2, \dots$) predikátumparaméterek (predikátumkonstansok) halmaza.
 - Az $LC, Var, \mathcal{F}(n), \mathcal{P}(n)$ halmazok ($n = 0, 1, 2, \dots$) páronként diszjunktak.
- A nyelv terminusainak a halmazát, azaz a $Term$ halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
 - $Var \cup \mathcal{F}(0) \subseteq Term$
 - Ha $f \in \mathcal{F}(n)$, ($n = 1, 2, \dots$), és $t_1, t_2, \dots, t_n \in Term$, akkor $f(t_1, t_2, \dots, t_n) \in Term$.
- A nyelv formuláinak a halmazát, azaz a $Form$ halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
 - $\mathcal{P}(0) \subseteq Form$
 - Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor $(t_1 = t_2) \in Form$
 - Ha $P \in \mathcal{P}(n)$, ($n = 1, 2, \dots$), és $t_1, t_2, \dots, t_n \in Term$, akkor $P(t_1, t_2, \dots, t_n) \in Form$.
 - Ha $A \in Form$, akkor $\neg A \in Form$.
 - Ha $A, B \in Form$, akkor $(A \supset B), (A \wedge B), (A \vee B), (A \equiv B) \in Form$.
 - Ha $x \in Var, A \in Form$, akkor $\forall x A, \exists x A \in Form$.

38. Adja meg az elsőrendű atomi formula definícióját!

Megoldás: Ha $L^{(1)}$ egy elsőrendű nyelv (azaz $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$), akkor az elsőrendű atomi formulák halmazát (jelölés: $AtForm$) az alábbi induktív definíció adja meg:

- $\mathcal{P}(0) \subseteq AtForm$
- Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor $(t_1 = t_2) \in AtForm$
- Ha $P \in \mathcal{P}(n)$, $(n = 1, 2, \dots)$, és $t_1, t_2, \dots, t_n \in Term$, akkor $P(t_1, t_2, \dots, t_n) \in AtForm$.

39. Adja meg az elsőrendű nyelv részformuláinak definícióját!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája. Az A formula részformuláinak halmaza az a legszűkebb halmaz [jelölés: $RF(A)$], amelyre teljesül, hogy

- $A \in RF(A)$, azaz az A formula részformulája önmagának;
- ha $\neg B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$;
- ha $(B \supset C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \wedge C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \vee C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \equiv C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $\forall x B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$;
- ha $\exists x B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$.

40. Adja meg a közvetlen részformula definícióját az elsőrendű nyelvben!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv.

- Ha A elsőrendű atomi formula, akkor nincs közvetlen részformulája;
- $\neg A$ egyetlen közvetlen részformulája A ;
- Az $(A \supset B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \equiv B)$ formulák közvetlen részformulái az A és a B formulák.
- $\forall x A$ egyetlen közvetlen részformulája A ;
- $\exists x A$ egyetlen közvetlen részformulája A .

41. Adja meg a részformula definícióját közvetlen részformulák segítségével elsőrendű nyelv esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája. Egy A formula részformuláinak halmaza az a legszűkebb halmaz [jelölés: $RF(A)$], amelyre teljesül, hogy

- $A \in RF(A)$, (azaz az A formula részformulája önmagának);
- ha $A' \in RF(A)$ és B közvetlen részformulája A' -nek, akkor $B \in RF(A)$ (azaz, ha egy A' formula részformulája A -nak, akkor A' összes közvetlen részformulája is részformulája A -nak).

42. Adja meg a szerkezeti fa definícióját elsőrendű nyelv esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája. Az A formula szerkezeti fáján egy olyan véges rendezett fát értünk, amelynek csúcsai formulák,

- gyökere az A formula,
- $\neg B$ alakú csúcsának egyetlen gyermeke a B formula,
- $(B \supset C), (B \wedge C), (B \vee C), (B \equiv C)$ alakú csúcsainak két gyermekét a B , illetve a C formulák alkotják,
- $\forall x B$ alakú csúcsának egyetlen gyermeke a B formula,
- $\exists x B$ alakú csúcsának egyetlen gyermeke a B formula,
- levelei prímformulák (atomi formulák).

43. Adja meg a formula szabad változói halmazának definícióját!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula. Az A formula szabad változóinak $FreeVar(A)$ -val jelölt halmazát az alábbi induktív definíció adja meg:

- Ha A atomi formula (azaz $A \in AtForm$), akkor a $FreeVar(A)$ halmaz elemei az A formulában előforduló változók.
- Ha az A formula $\neg B$ alakú, akkor $FreeVar(A) = FreeVar(B)$.
- Ha az A formula $(B \supset C), (B \wedge C), (B \vee C)$ vagy $(B \equiv C)$ alakú, akkor $FreeVar(A) = FreeVar(B) \cup FreeVar(C)$.
- Ha az A formula $\forall x B$ vagy $\exists x B$ alakú, akkor $FreeVar(A) = FreeVar(B) \setminus \{x\}$.

44. Adja meg a formula kötött változói halmazának definícióját!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula. Az A formula kötött változóinak $BoundVar(A)$ -val jelölt halmazát az alábbi induktív definíció adja meg:

- Ha A atomi formula (azaz $A \in AtForm$), akkor a $BoundVar(A) = \emptyset$.

- Ha az A formula $\neg B$ alakú, akkor $\text{BoundVar}(A) = \text{BoundVar}(B)$.
- Ha az A formula $(B \supset C)$, $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$ vagy $(B \equiv C)$ alakú, akkor $\text{BoundVar}(A) = \text{BoundVar}(B) \cup \text{BoundVar}(C)$.
- Ha az A formula $\forall x B$ vagy $\exists x B$ alakú, akkor $\text{BoundVar}(A) = \text{BoundVar}(B) \cup \{x\}$.

45. Adja meg a változó szabad előfordulásának definícióját!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$ egy formula és $x \in Var$ egy változó. Az x változó valamely A -beli előfordulását szabadnak nevezzük, ha a tekintett előfordulás nem esik az A formula valamely $\forall x B$ vagy $\exists x B$ alakú részformulájába.

46. Adja meg a változó kötött előfordulásának definícióját!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$ egy formula és $x \in Var$ egy változó. Az x változó valamely A -beli előfordulását kötöttnek nevezzük, ha a tekintett előfordulás nem szabad előfordulás.

47. Adja meg a zárójelelhagyási konvenciókat elsőrendben!

Megoldás:

- A legkülső zárójelpár mindig elhagyható.
- A kétargumentumú logikai konstansok elsőbbségi (precedencia) sorrendje: $\wedge, \vee, \supset, \equiv$
- A negáció erősebb bármely kétargumentumú logikai konstansnál.
- Az azonos kétargumentumú logikai konstansok egymás közötti elsőbbségét a balról jobbra szabály rendezzi: először mindig a bal oldali formulát tekintjük külön műveleti komponensnek.
- A kvantorok erősebbek bármely állításlogikai műveletnél.
- Az univerzális és az egzisztenciális kvantor egyenrangú (azaz erősségben egyik sem előzi meg a másikat).

48. Adja meg az elsőrendű logika interpretációjának definícióját!

Megoldás: Az $\langle U, \varrho \rangle$ párt az $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ elsőrendű nyelv egy interpretációjának nevezzük, ha

- $U \neq \emptyset$, azaz U nemüres halmaz;
- $\text{Dom}(\varrho) = Con$, azaz a ϱ a Con halmazon értelmezett függvény, amelyre teljesülnek a következők:
 - Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $\varrho(a) \in U$;

- Ha $f \in \mathcal{F}(n)$ ahol $n \neq 0$, akkor $\varrho(f)$ az $U^{(n)}$ halmazon értelmezett az U halmazba képező függvény ($\varrho(f) : U^{(n)} \rightarrow U$);
- Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $\varrho(p) \in \{0, 1\}$;
- Ha $P \in \mathcal{P}(n)$ ahol $n \neq 0$, akkor $\varrho(P) \subseteq U^{(n)}$.

49. Adja meg az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó v értékelés definícióját!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $\langle U, \varrho \rangle$ pedig a nyelv egy interpretációja. Az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó v értékelésen egy olyan függvényt értünk, amely teljesíti a következőket:

- $Dom(v) = Var$;
- Ha $x \in Var$, akkor $v(x) \in U$.

50. Definiálja a módosított értékelés fogalmát!

Megoldás: Legyen v egy tetszőleges $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés, $x \in Var$ egy változó és $u \in U$ egy objektum. Ekkor bármely $y \in Var$ esetén

$$v[x : u](y) = \begin{cases} u, & \text{ha } y = x; \\ v(y), & \text{egyébként.} \end{cases}$$

51. Adja meg az elsőrendű logika szemantikai szabályait!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $\langle U, \varrho \rangle$ a nyelv egy interpretációja, v pedig az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés.

- Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $|a|_v^{(U, \varrho)} = \varrho(a)$.
- Ha $x \in Var$, akkor $|x|_v^{(U, \varrho)} = v(x)$.
- Ha $f \in \mathcal{F}(n)$, ($n = 1, 2, \dots$), és $t_1, t_2, \dots, t_n \in Term$, akkor

$$|f(t_1, t_2, \dots, t_n)|_v^{(U, \varrho)} = \varrho(f)(|t_1|_v^{(U, \varrho)}, |t_2|_v^{(U, \varrho)}, \dots, |t_n|_v^{(U, \varrho)})$$

- Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $|p|_v^{(U, \varrho)} = \varrho(p)$
- Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor

$$|(t_1 = t_2)|_v^{(U, \varrho)} = \begin{cases} 1, & \text{ha } |t_1|_v^{(U, \varrho)} = |t_2|_v^{(U, \varrho)} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- Ha $P \in \mathcal{P}(n)$ ahol $n \neq 0$, $t_1, \dots, t_n \in Term$, akkor

$$|P(t_1, \dots, t_n)|_v^{(U, \varrho)} = \begin{cases} 1, & \text{ha } \langle |t_1|_v^{(U, \varrho)}, \dots, |t_n|_v^{(U, \varrho)} \rangle \in \varrho(P); \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- Ha $A \in Form$, akkor $|\neg A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1 - |A|_v^{\langle U, \varrho \rangle}$.

- Ha $A, B \in Form$, akkor

$$|(A \supset B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \begin{cases} 0 & \text{ha } |A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1, \text{ és } |B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0; \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$|(A \wedge B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \begin{cases} 1 & \text{ha } |A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1, \text{ és } |B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$|(A \vee B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \begin{cases} 0 & \text{ha } |A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0, \text{ és } |B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0; \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$|(A \equiv B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \begin{cases} 1 & \text{ha } |A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = |B|_v^{\langle U, \varrho \rangle}; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- Ha $A \in Form, x \in Var$, akkor

$$|\forall x A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \begin{cases} 0, & \text{ha van olyan } u \in U, \text{ hogy } |A|_{v[x:u]}^{\langle U, \varrho \rangle} = 0; \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$|\exists x A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \begin{cases} 1, & \text{ha van olyan } u \in U, \text{ hogy } |A|_{v[x:u]}^{\langle U, \varrho \rangle} = 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

52. Adja meg egy formulahalmaz elsőrendű modelljének definícióját!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz. Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas elsőrendű modellje a Γ formulahalmaznak, ha

- $\langle U, \varrho \rangle$ egy interpretációja az $L^{(1)}$ nyelvnek;
- v egy $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés;
- minden $A \in \Gamma$ esetén $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$

53. Adja meg egy formula elsőrendű modelljének definícióját!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $A \in Form$ egy tetszőleges formula. Az A formula modelljén az $\{A\}$ egyelemű formulahalmaz modelljét értjük.

54. Adja meg egy formulahalmaz kielégíthetőségének definícióját elsőrendű logika esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz. A Γ formulahalmaz kielégíthető, ha van (elsőrendű) modellje.

55. Adja meg egy formula kielégíthetőségének definícióját elsőrendű logika esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $A \in Form$ egy tetszőleges formula. Az A formula kielégíthető, ha az $\{A\}$ formulahalmaz kielégíthető.

56. Adja meg egy formulahalmaz kielégíthetlenségének definícióját elsőrendű logika esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz. A Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, ha nem kielégíthető, azaz nincs modellje.

57. Adja meg egy formulahalmaz kielégíthetlenségének definícióját elsőrendű logika esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $A \in Form$ egy tetszőleges formula. Az A formula kielégíthetetlen, ha az $\{A\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen.

58. Adja meg egy formulahalmaz logikai következményének definícióját elsőrendű logika esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz, és $A \in Form$ egy formula. A Γ formulahalmaznak logikai következménye az A formula, ha a $\Gamma \cup \{\neg A\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen. Jelölés: $\Gamma \models A$

59. Adja meg egy formula logikai következményének definícióját elsőrendű logika esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Term, Con, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $A, B \in Form$ két tetszőleges formula. Az A formulának logikai következménye a B formula, ha a $\{A\} \models B$. Jelölés: $A \models B$

60. Adja meg az érvényesség definícióját elsőrendű logika esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula. Az A formula érvényes, ha $\emptyset \models A$, azaz ha az A formula logikai következménye az üres halmaznak. Jelölés: $\models A$

61. Adja meg a logikai ekvivalencia definícióját elsőrendű logika esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A, B \in Form$ két formula. Az A és a B formula logikailag ekvivalens, ha $A \models B$ és $B \models A$. Jelölés: $A \Leftrightarrow B$

62. Adja meg a behelyettesítésre vonatkozó definíciókat!

Megoldás: Az alábbi definíciókban legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$ egy formula, $x, y \in Var$ két változó és $t \in Term$ egy terminus.

Definíció (Változó változóval való helyettesíthetősége) Az A formulában az x változó behelyettesíthető y változóval, ha az A formulában az x változó egyetlen szabad előfordulása sem esik az A formula valamely $\forall y B$ vagy $\exists y B$ alakú részformulájába.

Definíció (Változó terminussal való helyettesíthetősége) Az A formulában az x változó behelyettesíthető a t terminussal, ha az A formulában az x változó behelyettesíthető minden olyan változóval, amely a t terminusban előfordul.

Definíció (Behelyettesítés eredménye) Tegyük föl, hogy az A formulában az x változó behelyettesíthető a t terminussal. Ekkor az $[A]_x^t$ kifejezéssel jelöljük azt a formulát, amely úgy keletkezik az A formulából, hogy benne az x változó minden szabad előfordulását a t terminussal helyettesítjük. Más jelölés: $A^{t/x}, A(x||t), A(x_t^t)$

63. Adja meg az átnevezésre vonatkozó definíciót!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A, B, C \in Form$ három formula, $x, x_1, y, y_1, z, z_1 \in Var$ hat változó.

- Ha az A formula $\forall x A_1$ alakú ($A_1 \in Form$), valamint az A_1 formulában az x változó behelyettesíthető az x_1 változóval, és $x_1 \notin FreeVar(A_1)$, akkor a $\forall x_1 [A_1]_{x_1}^{x_1}$ formula az A formula szabályosan végrehajtott átnevezése.
- Ha az A formula $\exists x A_1$ alakú ($A_1 \in Form$), valamint az A_1 formulában az x változó behelyettesíthető az x_1 változóval, és $x_1 \notin FreeVar(A_1)$, akkor a $\exists x_1 [A_1]_{x_1}^{x_1}$ formula az A formula szabályosan végrehajtott átnevezése.
- Ha
 1. a $\forall y B$ formula egy olyan részformulája az A formulának, amely különbözik A -tól,
 2. a $\forall y_1 [B]_y^{y_1}$ formula a $\forall y B$ formula szabályosan végrehajtott átnevezése (következésképpen teljesül, hogy a B formulában a y változó behelyettesíthető az y_1 változóval, és $y_1 \notin FreeVar(B)$),
 3. az A' formula úgy keletkezik az A formulából, hogy A -ban a $\forall y B$ formula valamely előfordulását a $\forall y_1 [B]_y^{y_1}$ formulával helyettesítjük,

akkor az A' formula az A formula szabályosan végrehajtott átnevezése.

- Ha
 1. a $\exists z C$ formula egy olyan részformulája az A formulának, amely különbözik A -tól,
 2. a $\exists z_1 [C]_z^{z_1}$ formula a $\exists z C$ formula szabályosan végrehajtott átnevezése (következésképpen teljesül, hogy a C formulában a z változó behelyettesíthető az z_1 változóval, és $z_1 \notin FreeVar(C)$),
 3. az A'' formula úgy keletkezik az A formulából, hogy A -ban a $\exists z C$ formula valamely előfordulását a $\exists z_1 [C]_z^{z_1}$ formulával helyettesítjük,

akkor az A'' formula az A formula szabályosan végrehajtott átnevezése.

64. Definiálja az egy formulával kongruens formulák halmazát!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $A \in Form$ egy formula. Az A formulával kongruens formulák $Cong(A)$ -val jelölt halmazát az alábbi induktív szabályrendszer adja meg:

- $A \in Cong(A)$ (minden formula kongruens önmagával);
- ha $B \in Cong(A)$ és a B' formula a B formula szabályosan végrehajtott átnevezése, akkor $B' \in Cong(A)$.

65. Definiálja, hogy mikor kongruens két formula!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $A, B \in Form$ két formula. Ha $B \in Cong(A)$, akkor az A formula kongruens a B formulával.

66. Definiálja a formula szintaktikai szinonimáját!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $A, B \in Form$ két formula. Ha $B \in Cong(A)$, akkor a B formulát az A formula szintaktikai szinonimájának nevezzük.

67. Definiálja a változóiban tiszta formulát!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $A \in Form$ egy formula. Az A formulát változóiban tisztának nevezünk, ha

- szabad és kötött változói diszjunkt halmazt alkotnak, azaz $FreeVar(A) \cap BoundVar(A) = \emptyset$,
- minden kötött változó pontosan egyszer fordul elő kvantort közvetlenül követő pozícióban (minden kötött változó pontosan egy kvantornak a változója).

68. Definálja a prenex alakú formulát!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv. Az $A \in Form$ formulát prenex alakúnak nevezzük, ha az alábbi két feltétel valamelyike teljesül:

- az A formula kvantormentes, azaz sem a $\forall$ sem a $\exists$ kvantor nem szerepel benne;
- az A formula $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n B$ ($n = 1, 2, \dots$) alakú, ahol
 - $B \in Form$ kvantormentes formula;
 - $x_1, x_2, \dots, x_n \in Var$ különböző változók;
 - $Q_1, Q_2, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$ kvantorok.

2. Tételek

69. „Kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető.” Adja meg pontosan a nulladrendű nyelvre vonatkozó tételt, és bizonyítsa be!

Megoldás:

Tétel Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz. Ha Γ kielégíthető formulahalmaz és $\Delta \subseteq \Gamma$, akkor Δ kielégíthető formulahalmaz.

Bizonyítás Legyen $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges kielégíthető formulahalmaz, és $\Delta \subseteq \Gamma$!

Γ kielégíthetősége miatt a Γ formulahalmaznak van modellje, legyen Γ egy modellje a ϱ interpretáció.

ϱ tulajdonsága: Ha $A \in \Gamma$, akkor $|A|_{\varrho} = 1$.

Mivel $\Delta \subseteq \Gamma$, ha $A \in \Delta$, akkor $A \in \Gamma$, s így $|A|_{\varrho} = 1$.

Azaz a ϱ interpretáció modellje Δ -nak, tehát Δ kielégíthető.

70. „Kielégíthetetlen formulahalmaz minden bővítése kielégíthetetlen.” Adja meg pontosan a nulladrendű nyelvre vonatkozó tételt, és bizonyítsa be!

Megoldás:

Tétel Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz. Ha Γ kielégíthetetlen formulahalmaz, és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor Δ kielégíthetetlen formulahalmaz.

Indirekt bizonyítás Tegyük fel, hogy $\Gamma \subseteq Form$ tetszőleges kielégíthetetlen formulahalmaz, és $\Delta \subseteq Form$ olyan formulahalmaz, amelyre teljesül, hogy $\Gamma \subseteq \Delta$.

Indirekt feltétel: Γ kielégíthetetlen, és Δ kielégíthető.

A tétel feltétele szerint $\Gamma \subseteq \Delta$.

A kielégíthetőségre vonatkozó tétel miatt Γ kielégíthető, ez pedig ellentmondás.

71. Adja meg a következményreláció és a modell kapcsolatáról szóló tételt, és bizonyítsa!

Megoldás:

Tétel Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$, és $A \in Form$. $\Gamma \models A$ akkor és csak akkor, ha a Γ formulahalmaz *minden* modellje modellje az A formulának (azaz az $\{A\}$ egyelemű formulahalmaznak) is.

Bizonyítás

→ Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \models A$ és van olyan modellje a Γ formulahalmaznak, amely nem modellje az A formulának. Legyen ez a modell a ϱ interpretáció! A ϱ tulajdonságai:

- minden $B \in \Gamma$ esetén $|B|_{\varrho} = 1$;
- $|A|_{\varrho} = 0$, azaz $|\neg A|_{\varrho} = 1$

Ekkor a $\Gamma \cup \{\neg A\}$ formulahalmaz minden eleme igaz ϱ -ban, tehát $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthető, azaz $\Gamma \models A$ nem teljesül, ami ellentmondás.

← Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy a Γ formulahalmaz minden modellje modellje az A formulának, de $\Gamma \models A$ nem teljesül.

Ekkor a $\Gamma \cup \{\neg A\}$ formulahalmaz kielégíthető, azaz van modellje. Legyen ez a modell a ϱ interpretáció! A ϱ tulajdonságai:

- minden $B \in \Gamma$ esetén $|B|_{\varrho} = 1$;
- $|\neg A|_{\varrho} = 1$, azaz $|A|_{\varrho} = 0$

Tehát a Γ formulahalmaznak van olyan modellje, ami nem modellje az A formulának, s ez ellentmondás.

72. „Érvényes formula minden formulahalmaznak következménye.” Adja meg pontosan a nulladrendű nyelvre vonatkozó tételt, és bizonyítsa!

Megoldás: Tétel Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, $A \in Form$. Ha A érvényes formula ($\models A$), akkor minden $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaz esetén $\Gamma \models A$.

Bizonyítás Ha A érvényes formula, akkor a definíció szerint $\emptyset \models A$. Így $\emptyset \cup \{\neg A\} (= \{\neg A\})$ kielégíthetetlen, s így a kielégíthetetlenségre kimondott tétel alapján ennek a halmaznak a bővítései is kielégíthetetlenek. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ bővítése $\{\neg A\}$ -nak, így kielégíthetetlen, tehát $\Gamma \models A$.

73. „Kielégíthetetlen formulahalmaznak minden formula következménye.” Adja meg pontosan a nulladrendű nyelvre vonatkozó tételt, és bizonyítsa!

Megoldás: Tétel Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz. Ha a Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor minden A formula esetén $\Gamma \models A$.

Bizonyítás A már bizonyított tétel szerint ha a Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor Γ minden bővítése is kielégíthetetlen. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ bővítése Γ -nak, így kielégíthetetlen, tehát $\Gamma \models A$.

74. Adja meg a következményreláció és a modell kapcsolatát leíró tétel következményét!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$ és $A \in Form$. $\Gamma \models A$ akkor és csak akkor, ha minden olyan interpretációban, amelyben a Γ formulahalmaz minden eleme igaz, igaz az A formula is.

75. Adja meg a dedukció tételt, és bizonyítsa!

Megoldás:

Tétel Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula. Ha $\Gamma \cup \{A\} \models B$, akkor $\Gamma \models (A \supset B)$.

Bizonyítás Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \cup \{A\} \models B$ teljesül, de $\Gamma \models (A \supset B)$ nem teljesül.

Így $\Gamma \cup \{\neg(A \supset B)\}$ kielégíthető, tehát van modellje. Legyen egy modellje a ϱ interpretáció!

A ϱ tulajdonságai:

- Γ minden eleme igaz a ϱ interpretáció szerint.

- $|\neg(A \supset B)|_{\varrho} = 1$

$|(A \supset B)|_{\varrho} = 0$, azaz $|A|_{\varrho} = 1$ és $|B|_{\varrho} = 0$. Így $|\neg B|_{\varrho} = 1$. $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ formulahalmaz minden eleme igaz a ϱ interpretáció szerint, azaz a formulahalmaz kielégíthető, tehát $\Gamma \cup \{A\} \models B$ nem teljesül, ami ellentmondás.

76. Adja meg a dedukció tétel megfordítását, és bizonyítsa!

Megoldás:

Tétel Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula. Ha $\Gamma \models (A \supset B)$, akkor $\Gamma \cup \{A\} \models B$.

Bizonyítás Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \models (A \supset B)$, és ugyanakkor $\Gamma \cup \{A\} \models B$ nem teljesül.

Így $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ kielégíthető, tehát van modellje. Legyen egy modellje a ϱ interpretáció!

A ϱ tulajdonságai:

- Γ minden eleme igaz a ϱ interpretáció szerint.
- $|A|_{\varrho} = 1$
- $|\neg B|_{\varrho} = 1$, így $|B|_{\varrho} = 0$

Így a ϱ interpretáció szerint $|(A \supset B)|_{\varrho} = 0$, következésképpen $|\neg(A \supset B)|_{\varrho} = 1$. $\Gamma \cup \{\neg(A \supset B)\}$ formulahalmaz minden eleme igaz a ϱ interpretáció szerint, azaz a ϱ interpretációja modellje a formulahalmaznak, ami egyben azt is jelenti, hogy a formulahalmaz kielégíthető. Tehát $\Gamma \models (A \supset B)$ nem teljesül, ami ellentmond indirekt feltételünknek.

77. Adja meg a következményreláció és implikáció kapcsolatát leíró tételt, és bizonyítsa!

Megoldás: A dedukciótétel és megfordításának következménye: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, és $A, B \in Form$ két formula. $A \models B$ akkor és csak akkor, ha $\models (A \supset B)$.

Bizonyítás Alkalmazzuk a dedukció tételt és megfordítását abban az esetben, amikor $\Gamma = \emptyset$.

78. Adja meg a logikai és materiális ekvivalencia kapcsolatát leíró következményt!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $A, B \in Form$ két formula. $A \Leftrightarrow B$ akkor és csak akkor, ha $\models (A \equiv B)$.

79. Adja meg a metszet tételt és bizonyítsa!

Megoldás:

Tétel (Metszet tétel) Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, $\Gamma, \Delta \subseteq Form$ két formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula. Ha $\Gamma \cup \{A\} \models B$ és $\Delta \models A$, akkor $\Gamma \cup \Delta \models B$.

Indirekt bizonyítás Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \cup \{A\} \models B$ és $\Delta \models A$, de $\Gamma \cup \Delta \models B$ nem teljesül.

Ekkor $\Gamma \cup \Delta \cup \{\neg B\}$ kielégíthető (a következményreláció definíciója miatt), azaz van modellje. Legyen a formulahalmaz egy modellje a ϱ interpretáció.

A ϱ interpretáció tulajdonságai:

- Γ minden eleme igaz a ϱ interpretációban.
- Δ minden eleme igaz a ϱ interpretációban.
- $|\neg B|_{\varrho} = 1$

Mivel $\Delta \models A$ és Δ minden eleme igaz a ϱ interpretációban, $|A|_{\varrho} = 1$. Következésképpen a $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ halmaz minden eleme igaz a ϱ interpretációban, ami azt jelenti, hogy a $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ formulahalmaz kielégíthető. Ekkor azonban a következményreláció definíciója miatt $\Gamma \cup \{A\} \models B$ nem teljesül. Ez pedig ellentmond indirekt feltételünknek.

80. Adja meg a normálforma tételt!

Megoldás: Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $A \in Form$ egy formula. Ekkor létezik olyan $B \in Form$, hogy

- $A \Leftrightarrow B$
- B diszjunktív vagy konjunktív normálformájú.

81. „A szintaktikai következményreláció reflexív.” Adja meg pontosan a nulladrendű nyelvre vonatkozó tételt, és bizonyítsa!

Megoldás:

Tétel $\Gamma, A \vdash A$ (azaz a szintaktikai következményreláció reflexív).

Bizonyítás Jelölés: a rövideg kedvéért $\Gamma \cup \{A\}$ helyett Γ, A -t írunk. Mivel $A \in \Gamma \cup \{A\}$, így a szintaktikai következményreláció definíciójának második pontja miatt $\Gamma \cup \{A\} \vdash A$, azaz $\Gamma, A \vdash A$.

82. „A szintaktikai következményreláció monoton.” Adja meg pontosan a nulladrendű nyelvre vonatkozó tételt, és bizonyítsa!

Megoldás:

Tétel Ha $\Gamma \vdash A$, akkor $\Gamma \cup \Delta \vdash A$.

Bizonyítás (strukturális indukcióval)

- Ha A axióma, akkor minden formulahalmaznak szintaktikai következménye, így a $\Gamma \cup \Delta$ formulahalmaznak is.
- Ha $A \in \Gamma$, akkor $A \in \Gamma \cup \Delta$, így $A \in \Gamma \cup \Delta \vdash A$
- Tegyük fel, hogy A nem axióma, $A \notin \Gamma$ és $\Gamma \vdash A$. Ekkor van olyan $B \in Form$ formula, hogy $\Gamma \vdash B$ és $\Gamma \vdash B \supset A$. Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy állításunk teljesül a B és a $B \supset A$ formulára, azaz ha $\Gamma \vdash B$, akkor $\Gamma \cup \Delta \vdash B$, és ha $\Gamma \vdash B \supset A$, akkor $\Gamma \cup \Delta \vdash B \supset A$.

Ekkor be kell látni, hogy $\Gamma \cup \Delta \vdash A$. Mivel $\Gamma \cup \Delta \vdash B$ és $\Gamma \cup \Delta \vdash B \supset A$, így a szintaktikai következményreláció definíciójának harmadik pontja miatt ekkor a $\Gamma \cup \Delta \vdash A$ is teljesül.

83. Adja meg a kalkulus dedukció tételét, és bizonyítsa! (Segédétel bizonyítása plusz pont.)

Megoldás:

Tétel (Dedukció tétel, kalkulus) Ha $\Gamma, A \vdash B$, akkor $\Gamma \vdash A \supset B$.

Bizonyítás (strukturális indukciónal)

- Legyen B egy axióma. Ekkor $\Gamma \vdash B$. Mivel a $B \supset (A \supset B)$ formula is axióma, így $\Gamma \vdash B \supset (A \supset B)$. Ha $\Gamma \vdash B$ és $\Gamma \vdash B \supset (A \supset B)$, akkor a szintaktikai következményreláció definíciójának 3. pontja miatt $\Gamma \vdash (A \supset B)$.
- Legyen $B \in \Gamma \cup \{A\}$. Ha $B = A$, akkor a segédétel szerint $\vdash A \supset A$. A monotonitás miatt $\Gamma \vdash A \supset A$. Ha $B \in \Gamma$, akkor $\Gamma \vdash B$. Mivel $B \supset (A \supset B)$ axióma, így $\Gamma \vdash B \supset (A \supset B)$. Ha $\Gamma \vdash B$ és $\Gamma \vdash B \supset (A \supset B)$, akkor a szintaktikai következményreláció definíciójának 3. pontja miatt $\Gamma \vdash (A \supset B)$.
- Tegyük fel, hogy B nem axióma, $B \notin \Gamma \cup \{A\}$ és $\Gamma, A \vdash B$. Ekkor van olyan $C \in Form$ formula, hogy $\Gamma, A \vdash C$ és $\Gamma, A \vdash C \supset B$.

Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy állításunk teljesül a C és a $C \supset B$ formulára, azaz ha $\Gamma, A \vdash C$, akkor $\Gamma \vdash A \supset C$, és ha $\Gamma, A \vdash C \supset B$, akkor $\Gamma \vdash A \supset (C \supset B)$. Ekkor be kell látni, hogy $\Gamma \vdash A \supset B$.

- $\Gamma \vdash A \supset C$ (indukciós feltevés)
- $\Gamma \vdash A \supset (C \supset B)$ (indukciós feltevés)
- $\Gamma \vdash (A \supset (C \supset B)) \supset ((A \supset C) \supset (A \supset B))$ mivel a $(A \supset (C \supset B)) \supset ((A \supset C) \supset (A \supset B))$ formula axióma.
- $\Gamma \vdash (A \supset C) \supset (A \supset B)$ (A 2. és a 3. pontból leválasztással nyerhető.)
- $\Gamma \vdash (A \supset B)$ (A 1. és a 4. pontból leválasztással nyerhető.)

Segédétel $\vdash A \supset A$

Bizonyítás

- $\vdash (A \supset ((C \supset A) \supset A)) \supset ((A \supset (C \supset A)) \supset (A \supset A))$ (A második axióma a következő választással: $A := A; B := C \supset A; C := A$)
- $\vdash (A \supset ((C \supset A) \supset A))$ (Az első axióma a következő választással: $A := A; B := C \supset A$)
- $\vdash (A \supset (C \supset A)) \supset (A \supset A)$ (A leválasztási szabály alkalmazása az 1. és 2. pontra.)
- $\vdash (A \supset (C \supset A))$ (Az első axióma a következő választással: $A := A; B := C$)
- $\vdash A \supset A$ (A leválasztási szabály alkalmazása az 3. és 4. pontra.)

84. Adja meg a kalkulus dedukció tételének megfordítását, és bizonyítsa!

Megoldás:

Tétel Ha $\Gamma \vdash A \supset B$, akkor $\Gamma, A \vdash B$

Bizonyítás A monotonitás miatt $\Gamma, A \vdash A \supset B$. A reflexivitás miatt $\Gamma, A \vdash A$. A leválasztási szabályt alkalmazva az előző két pontra kapjuk, hogy $\Gamma, A \vdash B$.

85. Adja meg a kalkulus metszet tételét és bizonyítsa!

Megoldás:

Tétel Ha $\Gamma \vdash A$ és $\Delta, A \vdash B$, akkor $\Gamma \cup \Delta \vdash B$.

Bizonyítás A monotonitás miatt $\Gamma \cup \Delta \vdash A$. A dedukció tétel miatt $\Delta \vdash A \supset B$, s így a monotonitás miatt $\Gamma \cup \Delta \vdash A \supset B$. Az előző két pontra alkalmazva a leválasztási szabályt kapjuk, hogy $\Gamma \cup \Delta \vdash B$.

86. Adja meg az elsőrendű szemantika alaptételeit!

Megoldás:

Tétel Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$ egy formula, $\langle U, \varrho \rangle$ egy elsőrendű interpretáció és v egy $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés. Ekkor az $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle}$ érték egyértelműen meghatározott.

Tétel Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$ egy formula, $\langle U, \varrho \rangle$ egy elsőrendű interpretáció és v_1, v_2 két $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés. Ha minden $x \in FreeVar(A)$ esetén $v_1(x) = v_2(x)$, akkor $|A|_{v_1}^{\langle U, \varrho \rangle} = |A|_{v_2}^{\langle U, \varrho \rangle}$

87. „A logikai ellentmondástalanság szűkítéssel nem rontható el.” Adja meg pontosan az elsőrendű tételt, és bizonyítsa!

Megoldás: Tétel Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz. Ha Γ kielégíthető formulahalmaz és $\Delta \subseteq \Gamma$, akkor Δ kielégíthető formulahalmaz.

Bizonyítás Legyen $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges kielégíthető formulahalmaz, és $\Delta \subseteq \Gamma$! Γ kielégíthetősége miatt a Γ formulahalmaznak van modellje. Legyen Γ egy modellje az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas. $\langle U, \varrho, v \rangle$ modell tulajdonsága:

- Ha $A \in \Gamma$, akkor $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$

Mivel $\Delta \subseteq \Gamma$, ha $A \in \Delta$, akkor $A \in \Gamma$, s így $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$. Azaz az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas modellje Δ -nak, tehát Δ kielégíthető.

88. Adja meg a következményreláció és a modell kapcsolatáról szóló tételt elsőrendben, és bizonyítsa!

Megoldás:

Tétel Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$, és $A \in Form$. $\Gamma \models A$ akkor és csak akkor, ha a Γ formulahalmaz minden modellje modellje az A formulának (azaz az $\{A\}$ egyelemű formulahalmaznak) is.

Bizonyítás $\rightarrow$ Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \models A$ és van olyan modellje a Γ formulahalmaznak, amely nem modellje az A formulának. Legyen ez a modell az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas!

A $\langle U, \varrho, v \rangle$ tulajdonságai:

- minden $B \in \Gamma$ esetén $|B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$;
- $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0$, azaz $|\neg A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$

Ekkor a $\Gamma \cup \{\neg A\}$ formulahalmaz minden eleme igaz a $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációban a v értékelés szerint, tehát $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthető (hiszen modellje az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas), azaz $\Gamma \models A$ nem teljesül, ami ellentmondás.

$\leftarrow$ Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy a Γ formulahalmaz minden modellje modellje az A formulának, de $\Gamma \models A$ nem teljesül.

Ekkor a $\Gamma \cup \{\neg A\}$ formulahalmaz kielégíthető, azaz van modellje. Legyen ez a modell az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas!

Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ tulajdonságai:

- minden $B \in \Gamma$ esetén $|B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$;
- $|\neg A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$, azaz $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0$

Tehát a Γ formulahalmaznak van olyan modellje (az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas), ami nem modellje az A formulának, s ez ellentmondás.

89. „Érvényes formula minden formulahalmaznak következménye.” Adja meg pontosan a tételt elsőrendben, és bizonyítsa!

Megoldás:

Tétel Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$. Ha A érvényes formula ($\models A$), akkor minden $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaz esetén $\Gamma \models A$.

Bizonyítás Ha A érvényes formula, akkor a definíció szerint $\emptyset \models A$. Így $\emptyset \cup \{\neg A\} (= \{\neg A\})$ kielégíthetetlen, s így a kielégíthetetlenségre kimondott tétel alapján ennek a halmaznak a bővítései is kielégíthetetlenek. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ bővítése $\{\neg A\}$ -nak, így kielégíthetetlen, tehát $\Gamma \models A$.

90. „Kielégíthetetlen formulahalmaznak minden formula következménye.” Adja meg pontosan a tételt elsőrendben, és bizonyítsa!

Megoldás:

Tétel Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz. Ha a Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor minden A formula esetén $\Gamma \models A$.

Bizonyítás A már bizonyított tétel szerint ha a Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor Γ minden bővítése is kielégíthetetlen. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ bővítése Γ -nak, így kielégíthetetlen, tehát $\Gamma \models A$.

91. Adja meg a dedukció tételt elsőrendű logika esetén, és bizonyítsa!

Megoldás:

Tétel Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula. Ha $\Gamma \cup \{A\} \models B$, akkor $\Gamma \models (A \supset B)$.

Bizonyítás Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \cup \{A\} \models B$ teljesül, de $\Gamma \models (A \supset B)$ nem teljesül.

Így $\Gamma \cup \{\neg(A \supset B)\}$ kielégíthető, tehát van modellje. Legyen egy modellje az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas! Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ modell tulajdonságai:

- Γ minden eleme igaz az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció és a v értékelés szerint.
- $|\neg(A \supset B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$

$|(A \supset B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0$, azaz $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$ és $|B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0$. Így $|\neg B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$. $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ formulahalmaz minden eleme igaz az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció és a v értékelés szerint, azaz a formulahalmaz kielégíthető, tehát $\Gamma \cup \{A\} \models B$ nem teljesül, ami ellentmondás.

92. Adja meg a dedukció tételének megfordítását elsőrendű logika esetén, és bizonyítsa!

Megoldás:

Tétel Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula. Ha $\Gamma \models (A \supset B)$, akkor $\Gamma \cup \{A\} \models B$.

Bizonyítás Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \models (A \supset B)$, és ugyanakkor $\Gamma \cup \{A\} \models B$ nem teljesül.

Így $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ kielégíthető, tehát van modellje. Legyen egy modellje az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas! Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ modell tulajdonságai:

- Γ minden eleme igaz az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció és v értékelés szerint.
- $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$
- $|\neg B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$, így $|B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0$

Így $|(A \supset B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0$, következésképpen $|\neg(A \supset B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$. $\Gamma \cup \{\neg(A \supset B)\}$ formulahalmaz minden eleme igaz az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció és v értékelés szerint, azaz az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas modellje a formulahalmaznak, ami egyben azt is jelenti, hogy a formulahalmaz kielégíthető. Tehát $\Gamma \models (A \supset B)$ nem teljesül, ami ellentmond indirekt feltételünknek.

93. Adja meg a következményreláció és implikáció kapcsolatát leíró tételt elsőrendű logika esetén, és bizonyítsa!

Megoldás:

Tétel Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A, B \in Form$ két formula. $A \models B$ akkor és csak akkor, ha $\models (A \supset B)$

Bizonyítás Alkalmazzuk a dedukció tételt és megfordítását abban az esetben, amikor $\Gamma = \emptyset$.

94. Adja meg a logikai és materiális ekvivalencia kapcsolatát leíró következményt elsőrendű logika esetén!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $A, B \in Form$ két formula. $A \Leftrightarrow B$ akkor és csak akkor, ha $\models (A \equiv B)$.

95. Adja meg a metszet tételt elsőrendű logika esetén, és bizonyítsa!

Megoldás:

Tétel Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $\Gamma, \Delta \subseteq Form$ két formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula. Ha $\Gamma \cup \{A\} \models B$ és $\Delta \models A$, akkor $\Gamma \cup \Delta \models B$.

Indirekt bizonyítás Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \cup \{A\} \models B$ és $\Delta \models A$, de $\Gamma \cup \Delta \models B$ nem teljesül. Ekkor $\Gamma \cup \Delta \cup \{\neg B\}$ kielégíthető (a következményreláció definíciója miatt), azaz van modellje. Legyen a formulahalmaz egy modellje az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas. Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ modell tulajdonságai:

- Γ minden eleme igaz az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció és v értékelés szerint.
- Δ minden eleme igaz az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció és v értékelés szerint.
- $|\neg B|_v^{(U, \varrho)} = 1$

Mivel $\Delta \models A$ és Δ minden eleme igaz az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció és v értékelés szerint, $|A|_v^{(U, \varrho)} = 1$. Következésképpen a $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ halmaz minden eleme igaz az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció és v értékelés szerint, ami azt jelenti, hogy a $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ formulahalmaz kielégíthető. Ekkor azonban a következményreláció definíciója miatt $\Gamma \cup \{A\} \models B$ nem teljesül. Ez pedig ellentmond indirekt feltételünknek.

96. Adja meg és bizonyítsa az első de Morgan törvényt elsőrendű logika esetén!

Megoldás:

Tétel Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$ egy formula és $x \in Var$ egy változó. Ekkor $\neg \exists x A \Leftrightarrow \forall x \neg A$.

Bizonyítás A törvény bizonyításához először lássuk be, hogy $\neg \exists x A \models \forall x \neg A$.

Indirekt tegyük fel, hogy nem teljesül a következményreláció, azaz a $\{\neg \exists x A, \neg \forall x \neg A\}$ halmaz kielégíthető.

Ekkor a halmaznak van modellje, legyen a tekintett formulahalmaz egy modellje az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas. Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ modell tulajdonságai:

- $|\neg \exists x A|_v^{(U, \varrho)} = 1$, és így $|\exists x A|_v^{(U, \varrho)} = 0$
- $|\neg \forall x \neg A|_v^{(U, \varrho)} = 1$, azaz $|\forall x \neg A|_v^{(U, \varrho)} = 0$

Az univerzális kvantor szemantikai szabálya szerint a 2. pont akkor teljesül, ha van olyan $u \in U$, hogy $|\neg A|_{v[x:u]}^{(U, \varrho)} = 0$, azaz $|A|_{v[x:u]}^{(U, \varrho)} = 1$. Ez pedig az egzisztenciális kvantor szemantikai szabálya szerint azt jelenti, hogy $|\exists x A|_v^{(U, \varrho)} = 1$, ami ellentmond az első pontnak.

Most lássuk be, hogy $\forall x \neg A \models \neg \exists x A$! Indirekt tegyük fel, hogy nem teljesül a következményreláció, azaz a $\{\forall x \neg A, \neg \neg \exists x A\}$ halmaz kielégíthető.

Ekkor a halmaznak van modellje, legyen a tekintett formulahalmaz egy modellje az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas. Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ modell tulajdonságai:

- $|\forall x \neg A|_v^{(U, \varrho)} = 1$
- $|\neg \neg \exists x A|_v^{(U, \varrho)} = 1$, azaz $|\exists x A|_v^{(U, \varrho)} = 1$

Az egzisztenciális kvantor szemantikai szabálya szerint a 2. pont akkor teljesül, ha van olyan $u \in U$, hogy $|A|_{v[x:u]}^{(U, \varrho)} = 1$, azaz $|\neg A|_{v[x:u]}^{(U, \varrho)} = 0$. Ez pedig az univerzális kvantor szemantikai szabálya szerint azt jelenti, hogy $|\forall x \neg A|_v^{(U, \varrho)} = 0$, ami ellentmond az első pontnak.

97. Sorolja fel a kvantorok hatásköre bővítésének törvényeit!

Megoldás:

Tétel Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A, B \in Form$ két formula és $x \in Var$ egy változó. Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

- $A \wedge \forall x B \Leftrightarrow \forall x (A \wedge B)$
- $A \wedge \exists x B \Leftrightarrow \exists x (A \wedge B)$
- $A \vee \forall x B \Leftrightarrow \forall x (A \vee B)$
- $A \vee \exists x B \Leftrightarrow \exists x (A \vee B)$
- $A \supset \exists x B \Leftrightarrow \exists x (A \supset B)$
- $\exists x B \supset A \Leftrightarrow \forall x (B \supset A)$
- $A \supset \forall x B \Leftrightarrow \forall x (A \supset B)$
- $\forall x B \supset A \Leftrightarrow \exists x (B \supset A)$

98. Adja meg a fiktív kvantorokra vonatkozó törvényeket!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$ egy formula és $x \in Var$ egy változó. Ha $x \notin FreeVar(A)$, akkor

- $\forall x A \Leftrightarrow A$
- $\exists x A \Leftrightarrow A$

99. Adja meg a szinonimákra vonatkozó tételeket!

Megoldás:

Tétel A formulák között értelmezett kongruencia reláció ekvivalencia reláció, azaz:

- reflexív: $A \in Cong(A)$;
- szimmetrikus: ha $B \in Cong(A)$, akkor $A \in Cong(B)$;
- tranzitív: ha $B \in Cong(A)$ és $C \in Cong(B)$, akkor $C \in Cong(A)$.

Tétel A kongruens formulák logikailag ekvivalensek, azaz ha $B \in Cong(A)$, akkor $A \Leftrightarrow B$.

100. Adja meg a változótisztaságra vonatkozó tételt!

Megoldás:

Tétel Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $A \in Form$ egy formula. Ekkor létezik olyan $B \in Form$ formula, hogy

- a B formula változóiban tiszta,
- a B formula kongruens az A formulával, azaz $B \in Cong(A)$.

101. Adja meg a prenex alakra vonatkozó tételt!

Megoldás: Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv és $A \in Form$. Ekkor létezik olyan $B \in Form$, hogy

- a B formula prenex alakú,
- $A \Leftrightarrow B$.

3. Feladatok

102. Bizonyítsa be, hogy egy kielégíthetetlen formulahalmazban mindig van hamis elem!

103. Igaz-e, hogy minden kielégíthetetlen formulahalmaznak van kielégíthető része?

104. Igaz-e, hogy minden kielégíthetetlen formulahalmaznak van nem üres kielégíthető része?

105. Igaz-e, hogy minden kielégíthető formulahalmaznak van kielégíthetetlen bővítése?

106. Igaz-e, hogy egy kielégíthetetlen formulahalmaznak minden része kielégíthetetlen?

107. Kielégíthető vagy kielégíthetetlen az üres formulahalmaz?

108. Adjon példát kielégíthető, illetve kielégíthetetlen formulahalmazra!

109. Bizonyítsa be, hogy $A \models B$ ($A, B \in Form$) akkor és csak akkor, ha minden olyan interpretáció, amely A -t igazá teszi, igazá teszi B -t is!

110. Bizonyítsa be, hogy $A \models B$ akkor és csak akkor nem teljesül, ha van olyan interpretáció, amelyben A igaz és B hamis!

111. Bizonyítsa be, hogy egy kielégíthetetlen formulahalmaznak minden formula következménye!

112. Bizonyítsa be, hogy egy érvényes formula minden formulahalmaznak következménye!

113. Igazak-e az alábbi állítások? (Ha igaz, akkor bizonyítsa, ha hamis, akkor ellenpéldával cáfolja!)

- Minden A formula esetén ha az A formula kielégíthető (azaz a $\{A\}$ halmaz kielégíthető), akkor a $\neg A$ is kielégíthető.
- Ha $\neg A$ érvényes akkor A nem kielégíthető.
- Ha $\neg A$ kielégíthető, akkor A érvényes formula.
- Ha A érvényes formula, akkor A kielégíthető.

- (e) Ha A kielégíthető, akkor A érvényes formula.
- (f) Minden A formula esetén létezik olyan A -tól különböző B formula, amelyre teljesül, hogy $A \models B$.
- (g) Minden A formula esetén létezik olyan A -val nem logikailag ekvivalens B formula, amelyre teljesül, hogy $A \models B$.
- (h) Minden A formula esetén létezik olyan A -tól különböző B formula, amelyre teljesül, hogy $B \models A$.
- (i) Minden A formula esetén létezik olyan A -val nem logikailag ekvivalens B formula, amelyre teljesül, hogy $B \models A$.
- (j) Minden A, B formula esetén teljesül, hogy $A \models B$ vagy $B \models A$.
- (k) Létezik olyan formula, amely minden formulának következménye.
- (l) Minden A, B formula esetén teljesül, hogy ha $A \models B$, akkor $B \models A$.
- (m) Minden A, B formula esetén teljesül, hogy ha $A \models B$, akkor B -nek nem logikai következménye az A .
- (n) Létezik olyan A, B formula, hogy $A \models B$, de B -nek nem következménye A .
- (o) Ha $\Gamma \models A$ vagy $\Gamma \models B$, akkor $\Gamma \models (A \wedge B)$.
- (p) Ha $\Gamma \models A$ és $\Gamma \models B$, akkor $\Gamma \models (A \vee B)$.
- (q) Ha $\Gamma \models A \vee B$, akkor $\Gamma \models A$ vagy $\Gamma \models B$.
- (r) Ha $\Gamma \models (A \supset B)$ és $\Gamma \models (A \supset C)$, akkor $\Gamma, A \models (B \wedge C)$.
- (s) Ha $\Gamma \models (A \supset B)$ és $\Gamma \models (A \supset C)$, akkor $\Gamma, C \models (A \vee B)$.
- (t) Ha $\Gamma \models (A \supset C)$ és $\Gamma \models (B \supset C)$, akkor $\Gamma, (A \vee B) \models C$.
- (u) Ha $\Gamma \models (A \supset C)$ és $\Gamma \models (B \supset C)$, akkor $\Gamma, (A \vee C) \models B$.

114. Bizonyítsa be az alábbiakat!

- (a) Ha $\Gamma \models A$ és $\Gamma \models (A \supset B)$, akkor $\Gamma \models B$.
- (b) Ha $\Gamma \models A$ és $\Gamma \models B$, akkor $\Gamma \models (A \wedge B)$.
- (c) Ha $\Gamma, A \models C$ és $\Gamma, B \models C$, akkor $\Gamma, (A \vee B) \models C$.
- (d) Ha $\Gamma \models A$, akkor $\Gamma \models A \vee B$.
- (e) Ha $\Gamma, A \models B$ és $\Gamma, A \models \neg B$, akkor $\Gamma \models \neg A$.
- (f) Ha $\Gamma \models A$ és $\Gamma \models (A \equiv B)$, akkor $\Gamma \models B$.

115. (a) Döntse el, hogy egy adott formulában egy adott változó behelyettesíthető-e egy megadott változóval! Ha igen, akkor hajtsa végre a behelyettesítést!

- (b) Döntse el, hogy egy adott formulában egy adott változó behelyettesíthető-e egy megadott terminussal! Ha igen, akkor hajtsa végre a behelyettesítést!
- (c) Adj meg egy adott formula szabályosan végrehajtott átnevezését!
- (d) Döntse el két adott formuláról, hogy kongruensek-e!
- (e) Döntse el két adott formuláról, hogy egymás szintaktikai szinonimái-e!
- (f) Adj meg egy adott formula változótiszta alakját!
- (g) Adj meg egy adott formula prenex alakját!

116. Bizonyítsa be a kvantifikáció De Morgan törvényeit!

- (a) $\neg \exists x A \Leftrightarrow \forall x \neg A$
- (b) $\neg \exists x A \models \forall x \neg A$
- (c) $\forall x \neg A \models \neg \exists x A$
- (d) $\neg \forall x A \Leftrightarrow \exists x \neg A$
- (e) $\neg \forall x A \models \exists x \neg A$

$$(f) \exists x \neg A \models \neg \forall x A$$

117. Bizonyítsa be a kvantorok kifejezhetőségére vonatkozó törvényeket!

$$(a) \exists x A \Leftrightarrow \neg \forall x \neg A$$

$$(b) \forall x A \Leftrightarrow \neg \exists x \neg A$$

118. Bizonyítsa be a kvantorok konjunkcióban való mozgathatóságának törvényeit!

$$(a) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } A \wedge \forall x B \Leftrightarrow \forall x (A \wedge B).$$

$$(b) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } A \wedge \forall x B \models \forall x (A \wedge B).$$

$$(c) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } \forall x (A \wedge B) \models A \wedge \forall x B.$$

$$(d) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } A \wedge \exists x B \Leftrightarrow \exists x (A \wedge B).$$

$$(e) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } A \wedge \exists x B \models \exists x (A \wedge B).$$

$$(f) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } \exists x (A \wedge B) \models A \wedge \exists x B.$$

119. Bizonyítsa be a kvantorok diszjunkcióban való mozgathatóságának törvényeit!

$$(a) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } A \vee \forall x B \Leftrightarrow \forall x (A \vee B).$$

$$(b) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } A \vee \forall x B \models \forall x (A \vee B).$$

$$(c) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } \forall x (A \vee B) \models A \vee \forall x B.$$

$$(d) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } A \vee \exists x B \Leftrightarrow \exists x (A \vee B).$$

$$(e) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } A \vee \exists x B \models \exists x (A \vee B).$$

$$(f) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } \exists x (A \vee B) \models A \vee \exists x B.$$

120. Bizonyítsa be az univerzális kvantor implikációban való mozgathatóságának törvényeit!

$$(a) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } A \supset \forall x B \Leftrightarrow \forall x (A \supset B).$$

$$(b) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } A \supset \forall x B \models \forall x (A \supset B).$$

$$(c) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } \forall x (A \supset B) \models A \supset \forall x B.$$

$$(d) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } \forall x B \supset A \Leftrightarrow \exists x (B \supset A).$$

$$(e) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } \forall x B \supset A \models \exists x (B \supset A).$$

$$(f) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } \exists x (B \supset A) \models \forall x B \supset A.$$

121. Bizonyítsa be az egzisztenciális kvantor implikációban való mozgathatóságának törvényeit!

$$(a) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } A \supset \exists x B \Leftrightarrow \exists x (A \supset B).$$

$$(b) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } A \supset \exists x B \models \exists x (A \supset B).$$

$$(c) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } \exists x (A \supset B) \models A \supset \exists x B.$$

$$(d) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } \exists x B \supset A \Leftrightarrow \forall x (B \supset A).$$

$$(e) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } \exists x B \supset A \models \forall x (B \supset A).$$

$$(f) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } \forall x (B \supset A) \models \exists x B \supset A.$$

122. Bizonyítsa be a kvantorok fiktív alkalmazására vonatkozó törvényeket!

$$(a) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } \forall x A \Leftrightarrow A.$$

$$(b) \text{Ha } x \notin \text{FreeVar}(A), \text{ akkor } \exists x A \Leftrightarrow A.$$