

# Bináris döntési diagramok

Mihálydeák Tamás  
mihalydeak.tamas@inf.unideb.hu

Számítástudományi Tanszék

November 5, 2017

## Problémafelvetés

- Egy formula kielégíthetőségének eldöntése meghatározó szerepet játszik:
  - Véges formulahalmaz  $\rightarrow$  formula;
  - Véges premisszás következtetés  $\rightarrow$  formula

## Igazságtáblák

	$p$	$q$	$r$	$p \vee (q \wedge r)$
1.	1	1	1	1
2.	1	1	0	1
3.	1	0	1	1
4.	1	0	0	1
5.	0	1	1	1
6.	0	1	0	0
7.	0	0	1	0
8.	0	0	0	0

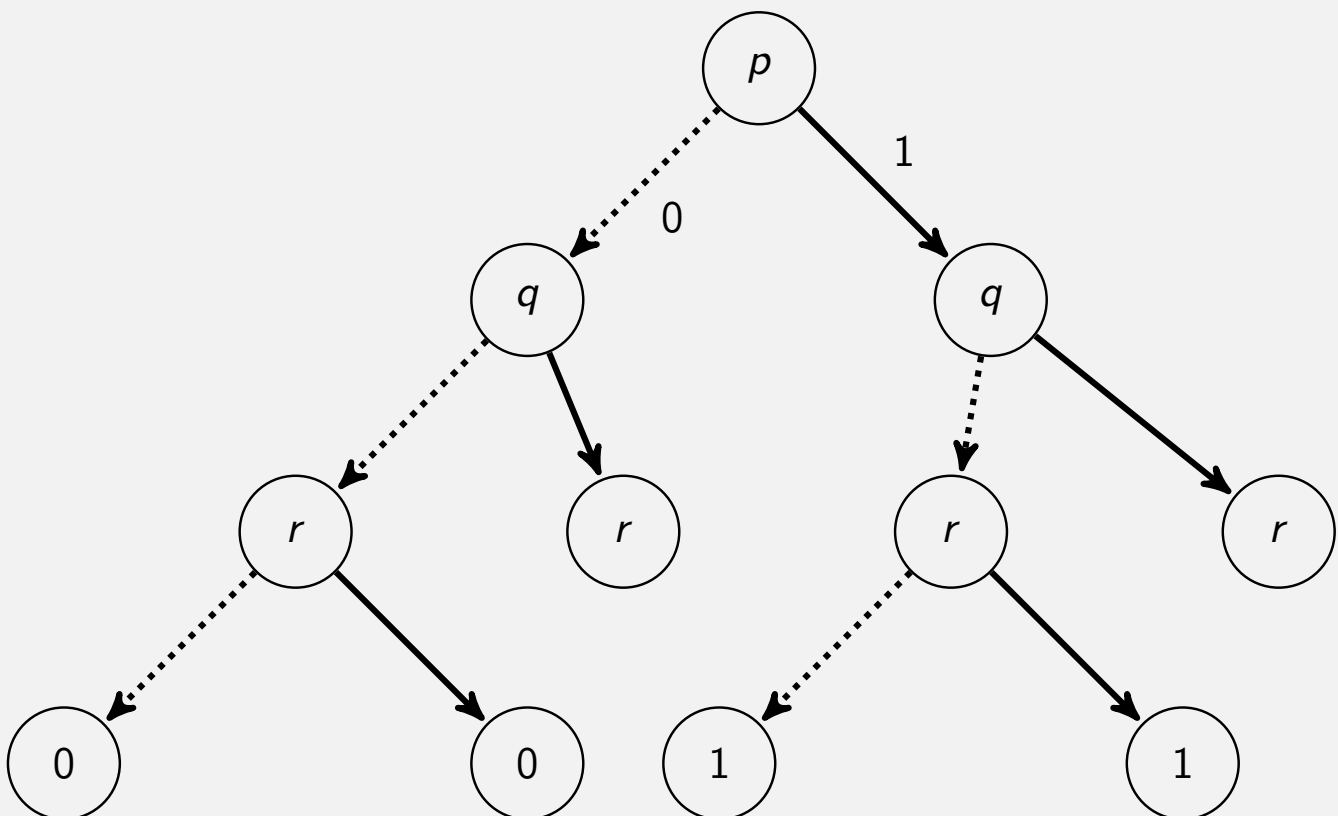
  

	$p$	$q$	$r$	$p \vee (q \wedge r)$
1.,2.	1	1	*	1
3.,4.	1	0	*	1
5.	0	1	1	1
6.	0	1	0	0
7.,8.	0	0	*	0

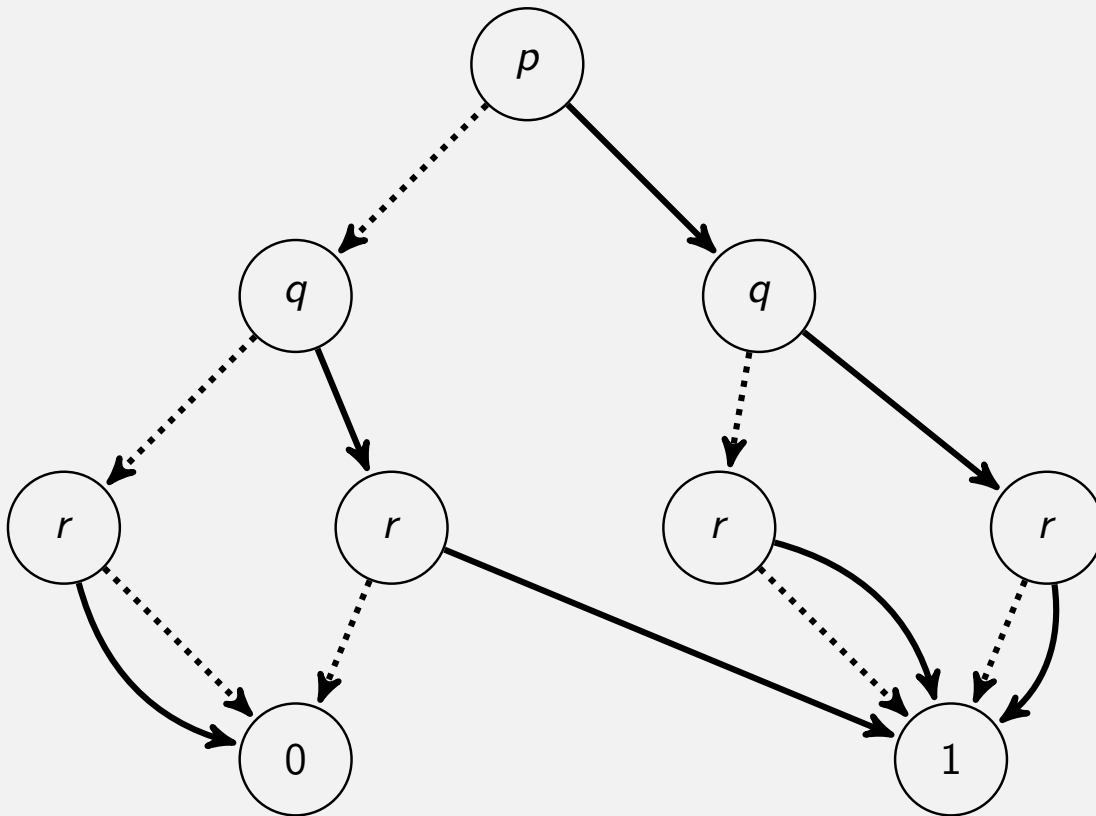
  

	$p$	$q$	$r$	$p \vee (q \wedge r)$
1.,2., 3.,4.	1	*	*	1
5.	0	1	1	1
6.	0	1	0	0
7.,8.	0	0	*	0

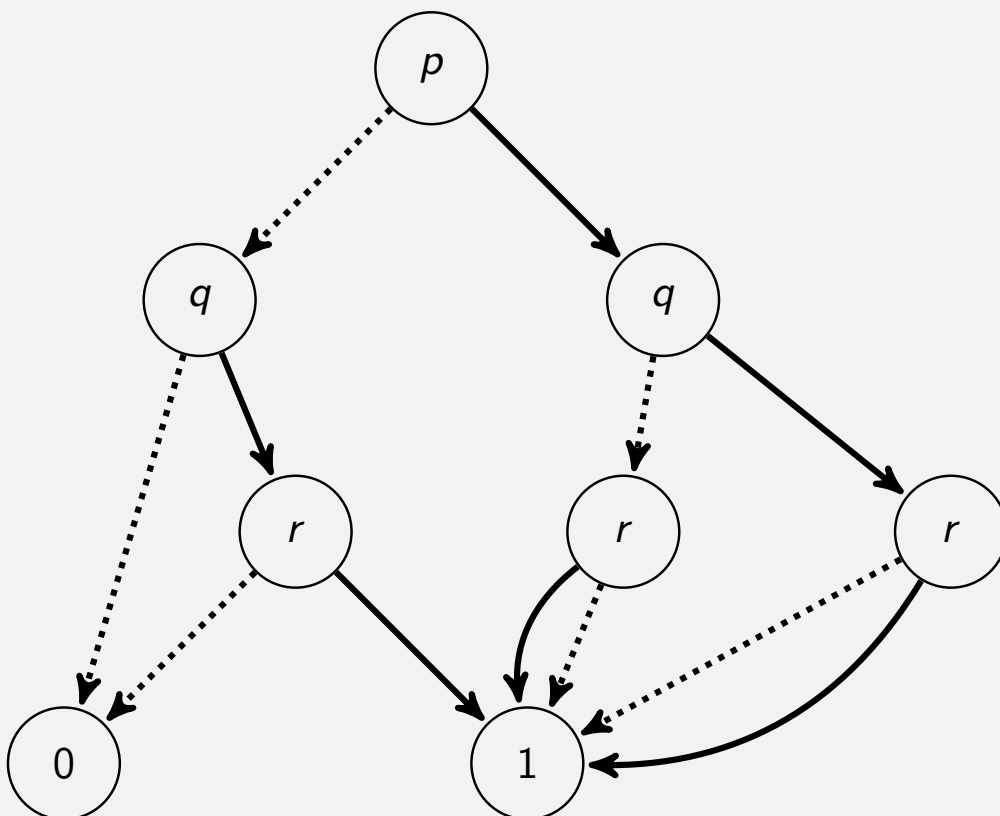
$p \vee (q \wedge r)$



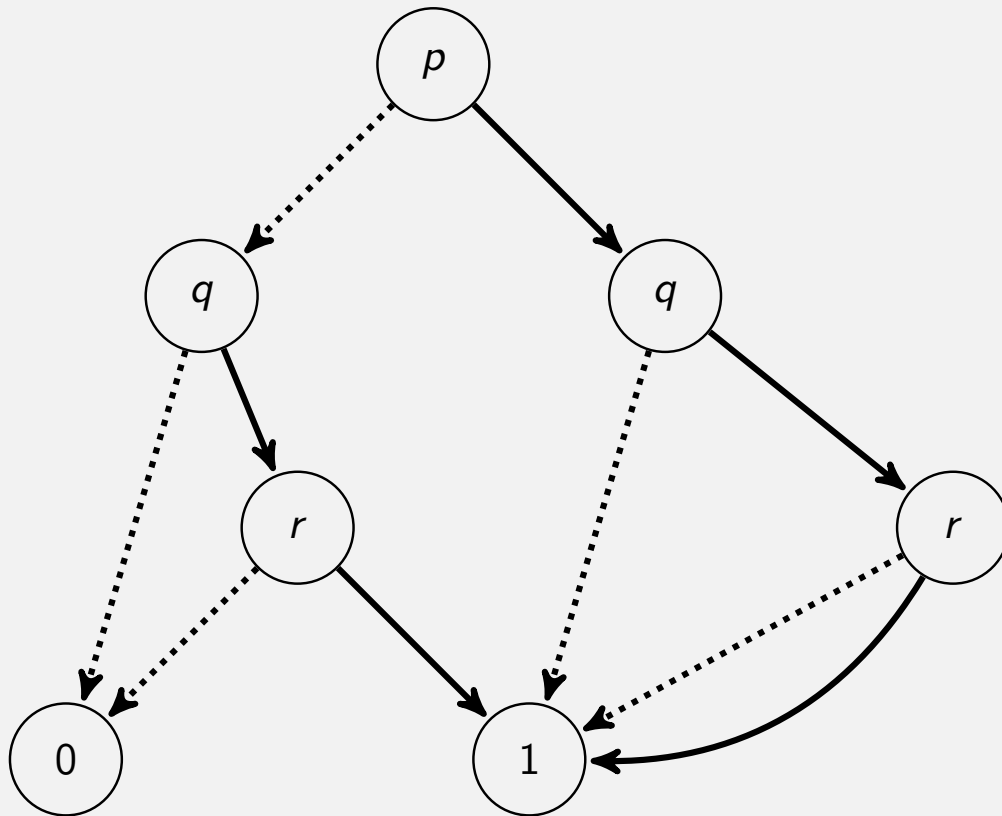
$$p \vee (q \wedge r)$$



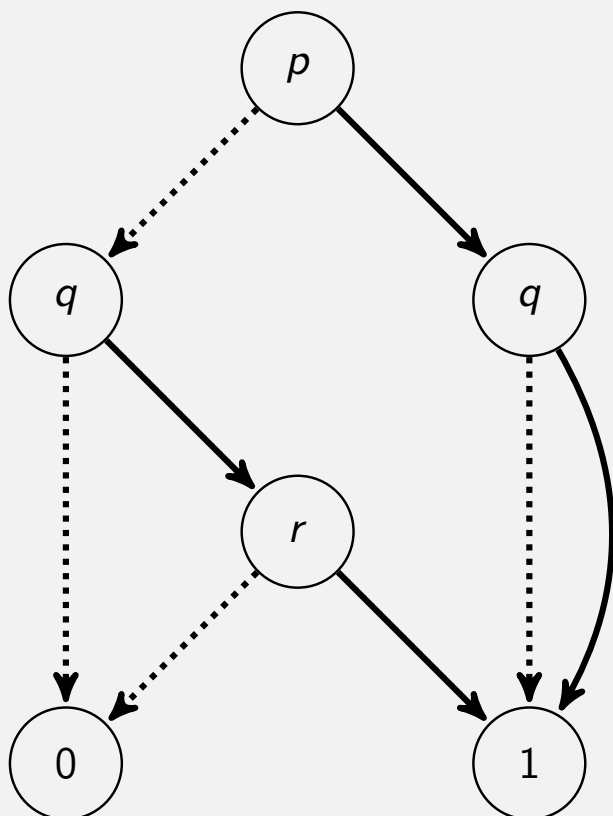
$$p \vee (q \wedge r)$$



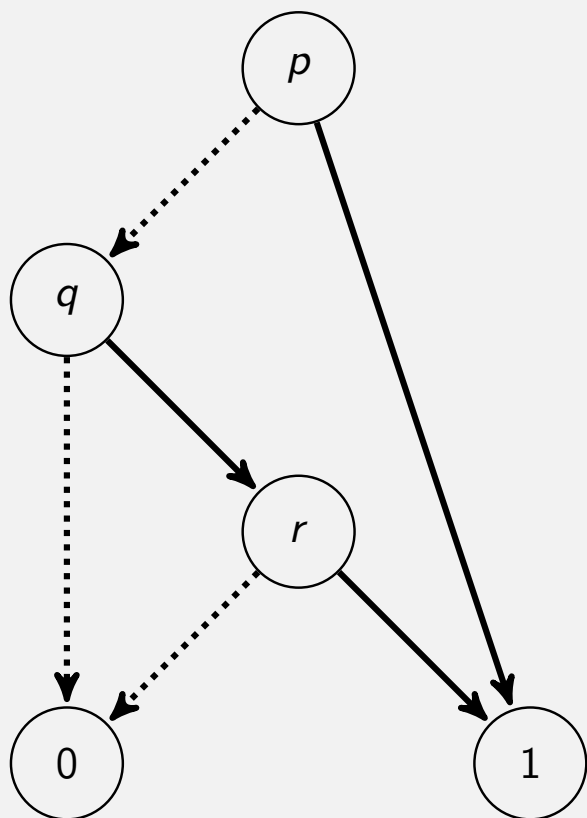
$$p \vee (q \wedge r)$$



$$p \vee (q \wedge r)$$



$$p \vee (q \wedge r)$$



## Bináris döntési diagram (BDD)

- Egy olyan adatstruktúra, ami reprezentálja egy formula szemantikáját:
  - formula  $\rightarrow$  irányított gráf  $\rightarrow$  algoritmus  $\rightarrow$  irányított redukált gráf;
  - logikailag ekvivalens formulák redukált irányított gráfja "tartalmilag" megegyezik;
  - egy formula érvényes, ha redukált bináris döntési diagramja (redukált irányított gráfja) megegyezik a verum triviális diagramjával  $[\uparrow \Leftrightarrow_{def} (p \vee \neg p)]$ ;
  - egy formula kielégíthető, ha redukált bináris döntési diagramja (redukált irányított gráfja) nem egyezik meg a falsum triviális diagramjával  $[\downarrow \Leftrightarrow_{def} (p \wedge \neg p)]$ ;

## Definíció

Legyen  $A \in Form$  (azaz  $A$  az állításlogika egy tetszőleges formulája). Az  $A$  formula bináris döntési diagramján a következő körmentes irányított gráfot értjük:

- Minden levélelem valamelyik igazságértéket tartalmazza.
- Minden belső (nem levélelem) csúcs egy  $A$ -beli paramétert tartalmaz és két kimenő éle van: egyik a "hamis él" (pontozással jelölt), a másik az "igaz él" (folytonos vonallal jelölt).
- Egy ágon egy paraméter legfeljebb egyszer fordulhat elő.

## Megjegyzés

- Minden ág egy teljes vagy részleges interpretációt reprezentál.
- Egy ág által reprezentált interpretációban a formula értéke az ág levéleleme.

## Redukáló algoritmus

- A következő lépéseket addig ismételjük, lehetséges:
  - 1 Ha egy bináris döntési diagramnak van két ugyanolyan tartalmú levéleleme, távolítsuk el a duplikált levélelem egyikét, és minden olyan élt irányítsunk át a megmaradó levélelemhez, amelyek az eltávolított levélelemhez mutattak.
  - 2 Ha a  $p_1$ -t tartalmazó csúcsnak mindkét kimenő éle a  $p_j$ -t tartalmazó csúcshoz vezet, akkor távolítsuk el a  $p_i$ -t tartalmazó csúcst, a csúcs bemenő élet pedig irányítsuk át a  $p_j$ -t tartalmazó csúcshoz.
  - 3 Ha két  $p_i$ -t tartalmazó csúcs gyökere két azonos rész bináris döntési diagramnak, akkor távolítsuk el az egyiket, és az eltávolított rész bináris döntési diagram gyökeréhez mutató élet irányítsuk át a megtartott rész döntési diagram gyökeréhez.

## Definíció

Ha egy bináris döntési diagram a redukáló algoritmus eredménye, akkor redukált bináris döntési diagramnak nevezzük.

## Tétel

A redukált bináris döntési diagram logikailag ekvivalens a redukáló algoritmus bemeneteként fellépő bináris döntési diagrammal (abban az értelemben, hogy minden interpretációban ugyanazokat az igazságértékeket határozza meg).