

Adatbázisrendszerek

5. előadás: A funkcionális függés és jellemzői

Funkcionális függés, Armstrong-axiómák

2025. március 21.



**DEBRECENI EGYETEM
INFORMATIKAI KAR**





Relációs adatbázis-tervezés

- Olyan módszerek és formális mutatók szükségesek, amelyek segítenek annak eldöntésében, hogy az attribútumok egyik csoportja miért lesz jobb, mint a másik?
- Milyen a jó relációs séma?
- Feltételezzük, hogy a relációt alkotó attribútumoknak jelentésük van.
- A jelentés (**szemantika**) mondja meg egy relációbeli rekord megfelelő attribútum értékének a jelentését, interpretációját.
- **Szemantikus réteg**: Hogyan viszonyul az egyik attribútum a másikhöz?
- A **funkcionális függés** a következő lépés a koncepcionális, azaz nem ad-hoc adatbázis-tervezés felé.

Figyelmes adatbázis tervezésnél minden szemantikát figyelembe veszünk és az eredményül kapott adatbázis tervnek világos jelentése van.



5. előadás: Funkcionális függés

Adatbázis-
tervezés

Funkcionális
függés

Tulajdonságok

Tulajdonságok
bizonyítása

Armstrong-
axiómák

Attribútum-
halmaz
lezártja

Funkcionális
függések ek-
vivalenciája

Funkcionális
függések
minimális
halmaza

A funkcionális függés egy olyan megszorítás, amely az adatbázis két attribútumhalmaza között áll fenn. Tegyük fel, hogy a relációs adatbázissémánknak n attribútuma van:

$A_1, A_2, \dots, A_n$; és gondoljunk az egész adatbázisunkra úgy, hogy azt egyetlen **univerzális**

$$R = \{ A_1, A_2, \dots, A_n \}$$

relációsémával írjuk le.



Funkcionális függés (functional dependency, FD) 4

5. előadás: Funkcionális függés

Adatbázis-
tervezés

Funkcionális
függés

Tulajdonságok

Tulajdonságok
bizonyítása

Armstrong-
axiómák

Attribútum-
halmaz
lezártja

Funkcionális
függések ek-
vivalenciája

Funkcionális
függések
minimális
halmaza

Definíció

Az R két attribútumhalmaza, X és Y között, $X \rightarrow Y$ -nal jelölt **funkcionális függés** előír egy **megszorítást** azokra a lehetséges rekordokra, amelyek egy R fölötti r relációt alkothatnak. A megszorítás az, hogy bármely két, r -beli t_1 és t_2 rekord esetén, amelyekre $t_1[X] = t_2[X]$ teljesül, teljesülnie kell $t_1[Y] = t_2[Y]$ -nak is.

Más szavakkal: egy R relációsémában X akkor és csak akkor határozza meg funkcionálisan Y -t, ha valahányszor $r(R)$ két rekordja megegyezik az X értékeken, szükségszerűen megegyezik az Y értékeken is.



Megjegyzés

- Abból, hogy egy R -re előírt megszorítás szerint bármely $r(R)$ relációpéldányban nem szerepelhet több, mint egy rekord egy adott X értékkel – azaz X egy **szuperkulcsa** R -nek –, következik $X \rightarrow Y$ az R attribútumainak bármely Y részhalmazára (mivel a kulcsmegszorításból következik, hogy egyetlen legális $r(R)$ állapotban sem lehet két olyan rekord, amelyeknek azonosak lennének az X értékeik).
- Ha $X \rightarrow Y$ teljesül R -ben, még semmit sem tudunk mondani arról, hogy $Y \rightarrow X$ is teljesül-e R -ben. Ha mind $X \rightarrow Y$, mind $Y \rightarrow X$ teljesül R -ben, akkor **kölcsönös funkcionális függésről** beszélünk. Ha sem $X \rightarrow Y$, sem $Y \rightarrow X$ nem teljesül, akkor azt mondjuk, hogy X és Y **funkcionálisan független** attribútumhalmazok.



Jelölés

Funkcionális függések felírásakor a halmazt jelölő nyitó és záró zárójelek, valamint a halmaz elemeit elválasztó vesszők megállapodás szerint elhagyhatók, ha az attribútumokat egybetűs nevekkal azonosítjuk. (Egyelemű halmazok esetén általában egyébként is elhagyjuk a halmazt jelölő zárójeleket.) Így például

$$\{A, B\} \rightarrow \{C\} \text{ helyett } AB \rightarrow C,$$

míg

$$\{A, B, C\} \rightarrow \{D, E\} \text{ helyett } ABC \rightarrow DE$$

írható.

Ha X és Y attribútumhalmazokat jelölnek, akkor a funkcionális függések mindkét oldalán alkalmazható az XY egyszerűsítés a két attribútumhalmaz uniójának jelölésére. Így például

$$X \cup Y \rightarrow Z \text{ helyett } XY \rightarrow Z$$

írható.



5. előadás: Funkcionális függés

Adatbázis-
tervezés

Funkcionális
függés

Tulajdonságok

Tulajdonságok
bizonyítása

Armstrong-
axiómák

Attribútum-
halmaz
lezártja

Funkcionális
függések ek-
vivalenciája

Funkcionális
függések
minimális
halmaza

- A relációs adatbázisok egyik legfontosabb fogalma.
- A szemantikának egy tulajdonsága, azaz kizárólag az attribútumok jelentésétől (interpretációjától), amely egy külső dolog, függ.
- Ha a szemantika azt mondja, hogy az attribútumok két halmaza között funkcionális függés van, akkor ezt a függést megszorításként kell specifikálni. Ki kell mondani, le kell írni az adatbázis-kezelő DDL nyelvén.
- A funkcionális függésnek eleget tevő relációsémákat legális kiterjesztésnek nevezzük. (Valójában csak ilyen lehet.) A reláció állapotok szintén csak legálisak lehetnek.
- A funkcionális függés néha automatikusan teljesül, pl. $\{\text{Állam, Jogosítvány-azonosító}\} \rightarrow \text{Személyi szám (USA)}.$



- 1 a **reflexivitás** szabálya: Ha $X \supseteq Y$, akkor $X \rightarrow Y$.
- 2 az **augmentitás** szabálya: $\{X \rightarrow Y\} \models XZ \rightarrow YZ$.
- 3 a **transzitivitás** szabálya: $\{X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z\} \models X \rightarrow Z$.
- 4 a **dekompozíció** szabálya: $\{X \rightarrow YZ\} \models X \rightarrow Y$.
- 5 az **additivitás** szabálya: $\{X \rightarrow Y, X \rightarrow Z\} \models X \rightarrow YZ$.
- 6 a **pszeudotranzitivitás** szabálya:

$$\{X \rightarrow Y, WY \rightarrow Z\} \models WX \rightarrow Z.$$

Definíció

Egy $X \rightarrow Y$ funkcionális függés **triviális**, ha $X \supseteq Y$, egyébként **nemtriviális**.



Megjegyzés

$X \rightarrow A$ és $X \rightarrow B$ az additivitás szabálya miatt implikálja $X \rightarrow AB$ -t, azonban $XY \rightarrow A$ **nem** implikálja szükségképpen sem $X \rightarrow A$ -t, sem $Y \rightarrow A$ -t. Viszont $X \rightarrow A$ és $Y \rightarrow B$ -ből következik, hogy $XY \rightarrow AB$ az additivitás és tranzitivitás alapján.

- A reflexivitás szabálya szerint egy attribútumhalmaz mindig meghatározza önmagát, vagy saját maga bármelyik részhalmazát.
- Az augmentativitás szabálya szerint egy funkcionális függés mindkét oldalának ugyanazzal az attribútumhalmazzal történő bővítése újabb érvényes funkcionális függést eredményez.
- A tranzitivitás szabálya szerint a funkcionális függések tranzitívak.



- A dekompozíció szabálya azt mondja, hogy egy funkcionális függés jobb oldaláról eltávolíthatunk attribútumokat.
- Az additivitás szabálya szerint funkcionális függések egy

$$\{ X \rightarrow A_1, X \rightarrow A_2, \dots, X \rightarrow A_n \}$$

halmazát összevonhatjuk egyetlen

$$X \rightarrow \{ A_1, A_2, \dots, A_n \}$$

funkcionális függéssé.



A reflexivitás bizonyítása

Tegyük fel, hogy $X \supseteq Y$, és hogy léteznek t_1 és t_2 rekordok R valamely r relációjában úgy, hogy $t_1[X] = t_2[X]$. Ekkor $t_1[Y] = t_2[Y]$, mivel $X \supseteq Y$; ezért $X \rightarrow Y$ -nak teljesülnie kell r -ben.



Az augmentivitás bizonyítása (indirekt módon)

Tegyük fel, hogy $X \rightarrow Y$ fennáll R egy r relációjában, de $XZ \rightarrow YZ$ nem áll fenn. Ekkor léteznie kell t_1 és t_2 rekordoknak úgy, hogy

1 $t_1[X] = t_2[X],$

2 $t_1[Y] = t_2[Y],$

3 $t_1[XZ] = t_2[XZ]$ és

4 $t_1[YZ] \neq t_2[YZ].$

Ez nem lehetséges, mert (3)-ból kapjuk, hogy

5 $t_1[Z] = t_2[Z],$

míg (2)-ből és (5)-ből kapjuk, hogy

6 $t_1[YZ] = t_2[YZ],$

ami ellentmond (4)-nek.



A tranzitivitás bizonyítása

Tegyük fel, hogy

1 $X \rightarrow Y$ és

2 $Y \rightarrow Z$

fennáll egy r relációban. Ekkor tetszőleges t_1 és t_2 r -beli rekordokra, melyekre igaz, hogy $t_1[X] = t_2[X]$, (1) miatt kapjuk, hogy

3 $t_1[Y] = t_2[Y]$;

így (3)-ból és a (2)-es feltevésünkből azt is kapnunk kell, hogy

4 $t_1[Z] = t_2[Z]$;

ezért $X \rightarrow Z$ -nek fenn kell állnia r -ben.



A dekompozíció bizonyítása

- 1 $X \rightarrow YZ$ adott.
- 2 $YZ \rightarrow Y$, felhasználva a reflexivitás szabályát, és tudva, hogy $YZ \supseteq Y$.
- 3 $X \rightarrow Y$, alkalmazva a tranzitivitás szabályát (1)-re és (2)-re.



Az additivitás bizonyítása

- 1 $X \rightarrow Y$ adott.
- 2 $X \rightarrow Z$ adott.
- 3 $X \rightarrow XY$, alkalmazva az augmentivitás szabályát (1)-re, azt X -szel bővítve; megjegyezve, hogy $XX = X$.
- 4 $XY \rightarrow YZ$, alkalmazva az augmentivitás szabályát (2)-re, azt Y -nal bővítve.
- 5 $X \rightarrow YZ$, alkalmazva a tranzitivitás szabályát (3)-ra és (4)-re.



5. előadás: Funkcionális függés

Adatbázis-
tervezés

Funkcionális
függés

Tulajdonságok

Tulajdonságok
bizonyítása

Armstrong-
axiómák

Attribútum-
halmaz
lezártja

Funkcionális
függések ek-
vivalenciája

Funkcionális
függések
minimális
halmaza

A pszeudotranzitivitás bizonyítása

- 1 $X \rightarrow Y$ adott.
- 2 $WY \rightarrow Z$ adott.
- 3 $WX \rightarrow WY$, alkalmazva az augmentitás szabályát (1)-re, azt W -vel bővítve.
- 4 $WX \rightarrow Z$, alkalmazva a tranzitivitás szabályát (3)-ra és (2)-re.



5. előadás: Funkcionális függés

Adatbázis-
tervezés

Funkcionális
függés

Tulajdonságok

Tulajdonságok
bizonyítása

Armstrong-
axiómák

Attribútum-
halmaz
lezártja

Funkcionális
függések ek-
vivalenciája

Funkcionális
függések
minimális
halmaza

Definíció

A reflexivitás, az augmentivitás és a tranzitivitás szabályait együtt **Armstrong-axiómáknak** nevezzük.

William Ward Armstrong 1974-ben bizonyította be, hogy a **reflexivitás**, az **augmentivitás** és a **tranzitivitás** szabálya együtt helyes és teljes.



Helyesség alatt azt értjük, hogy ha adott egy R relációsémán fennálló funkcionális függéseknek egy F halmaza, akkor bármilyen függés, amely levezethető F -ből a három szabály segítségével, fenn fog állni R minden olyan r relációjában, amely **kielégíti** az F -beli **függéseket**.

Teljesség alatt azt értjük, hogy a három szabályt mindaddig ismételten alkalmazva, míg már nem kapunk újabb függéseket, előállítható az F -ből levezethető **összes lehetséges függés** teljes halmaza. Más szavakkal, F -ből kiindulva kizárólag a három szabály alkalmazásával meghatározható az F^+ függések halmaza, amit F **lezártjának** hívunk.



Az adatbázis-tervező először megadja azon funkcionális függések F halmazát, amelyek könnyen meghatározhatók R attribútumainak a szemantikájából. Ezután az Armstrong-axiómák segítségével további funkcionális függéseket vezet le, amelyek szintén fennállnak R -en. Szisztematikusan ezeket a funkcionális függéseket úgy lehet meghatározni, hogy először meghatározzuk azon X attribútumhalmazokat, amelyek megjelennek valamely F -beli funkcionális függés bal oldalán, és azután meghatározzuk az **összes olyan attribútumot**, amelyek függnek X -től.

Definíció

Minden egyes X attribútumhalmazra meghatározzuk az attribútumoknak egy olyan X_F halmazát, amelyet X funkcionálisan meghatároz F alapján; X_F -et **X F alatti lezártjának** nevezzük.



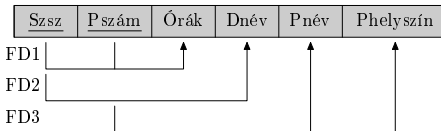
```
 $X_F := X$   
repeat  
   $\text{old}X_F := X_F$ ;  
  for minden  $F$ -beli  $Y \rightarrow Z$  funkcionális függésre do  
    if  $X_F \supseteq Y$  then  $X_F := X_F \cup Z$ ;  
until ( $X_F = \text{old}X_F$ );
```

Megjegyzés

A fenti algoritmus négyzetes idejű. Létezik egy vele ekvivalens lineáris idejű algoritmus is, amely azonban ennél jóval összetettebb.



DOLG _ PROJ



Példa

Legyen

$$F = \{ \{ Szsz, Pszaam \} \rightarrow Órák, \\ Szsz \rightarrow Dnév, \\ PSzaam \rightarrow \{ Pnév, Phelyszín \} \}!$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \{ Szsz \}_F &= \{ Szsz, Dnév \}, \\ \{ PSzaam \}_F &= \{ Pszaam, Pnév, Phelyszín \}, \\ \{ Szsz, Pszaam \}_F &= \{ Szsz, Pszaam, Dnév, Pnév, Phelyszín, Órák \}. \end{aligned}$$



Funkcionális függések halmazainak ekvivalenciája 22

5. előadás: Funkcionális függés

Adatbázis-
tervezés

Funkcionális
függés

Tulajdonságok

Tulajdonságok
bizonyítása

Armstrong-
axiómák

Attribútum-
halmaz
lezártja

Funkcionális
függések ek-
vivalenciája

Funkcionális
függések
minimális
halmaza

Definíció

Azt mondjuk, hogy a funkcionális függések F halmaza **lefedi** a funkcionális függések egy másik, E halmazát, ha minden E -beli funkcionális függés benne van F^+ -ban; azaz ha minden E -beli függés levezethető F -ből.

Definíció

A funkcionális függések E és F halmaza **ekvivalens** egymással, ha $E^+ = F^+$. Így az ekvivalencia azt jelenti, hogy minden E -beli funkcionális függés levezethető F -ből, és minden F -beli funkcionális függés levezethető E -ből; azaz E ekvivalens F -fel, ha E lefedti F -et **és** F lefedti E -t.



Definíció

Funkcionális függések egy F halmazát minimálisnak nevezzük, ha

- Minden $X \rightarrow Y$ funkcionális függésre F -ben Y egyszerű, azaz egy attribútumból áll.
- Nem hagyhatunk el egyetlen funkcionális függést sem F -ből úgy, hogy F -fel ekvivalens halmazt kapjunk.
- Nem helyettesíthetünk egyetlen egy $X \rightarrow A$ funkcionális függést F -ben egy $Y \rightarrow A$ funkcionális függéssel, ahol $Y \subset X$, úgy, hogy F -fel ekvivalens halmazt kapjunk.

Definíció

Funkcionális függések egy E halmazának **minimális lefedése** alatt (standard kanonikus alakban lévő redundancia mentes) funkcionális függések egy olyan halmazát értjük, amely minimális és ekvivalens E -vel.



5. előadás: Funkcionális függés

Adatbázis-
tervezés

Funkcionális
függés

Tulajdonságok

Tulajdonságok
bizonyítása

Armstrong-
axiómák

Attribútum-
halmaz
lezártja

Funkcionális
függések ek-
vivalenciája

Funkcionális
függések
minimális
halmaza

- Funkcionális függések minden halmazának van vele ekvivalens minimális halmaza.
- Több, egymással is ekvivalens minimális halmaz létezhet.
- A minimális halmaz (nem egyértelmű) standard kanonikus alak, redundanciák nélkül.
- Amikor attribútumok egy halmazából relációkat állítunk elő a tervezés folyamán, akkor feltételezzük, hogy funkcionális függések egy minimális halmazából indulunk ki. Pontosabban, először előállítjuk ezt a minimális halmazt a szemantika által adott funkcionális függésekből.



Algoritmus a minimális halmaz meghatározására 25

5. előadás: Funkcionális függés

Adatbázis-
tervezés

Funkcionális
függés

Tulajdonságok

Tulajdonságok
bizonyítása

Armstrong-
axiómák

Attribútum-
halmaz
lezártja

Funkcionális
függések ek-
vivalenciája

Funkcionális
függések
minimális
halmaza

Input: Funkcionális függések egy E halmaza

- 1 **Legyen** $F := E$.
- 2 **Helyettesítsünk** minden $X \rightarrow \{A_1, \dots, A_n\}$ funkcionális függést n számú $X \rightarrow A_1, \dots, X \rightarrow A_n$ funkcionális függéssel.
- 3 Minden olyan F -beli $X \rightarrow A$ funkcionális függésre és X -beli B attribútumra, amelyre $\{F \setminus \{X \rightarrow A\}\} \cup \{(X \setminus \{B\}) \rightarrow A\}$ ekvivalens F -fel, **helyettesítsük** $X \rightarrow A$ -t $(X \setminus \{B\}) \rightarrow A$ -val F -ben.
- 4 Minden fennmaradó F -beli $X \rightarrow A$ funkcionális függésre ha $\{F \setminus \{X \rightarrow A\}\}$ ekvivalens F -fel, akkor **töröljük** $X \rightarrow A$ -t F -ből.



Legyen adott $E := \{B \rightarrow A, D \rightarrow A, AB \rightarrow D\}$. Határozzuk meg az F minimális lefedést.

- 1 Minden funkcionális függés kanonikus alakban van, a 2. lépéssel készen vagyunk.
- 2 Lehet-e a $AB \rightarrow D$ -t kiváltani $B \rightarrow D$ vagy $A \rightarrow D$ valamelyikével. Mivel $B \rightarrow A$ így az augmentálás szabálya alapján $B \rightarrow AB$, ami a tranzitivitással együtt adja $B \rightarrow D$. Ezért $AB \rightarrow D$ helyettesíthető $B \rightarrow D$ -vel. Eredményül $F = \{B \rightarrow A, D \rightarrow A, B \rightarrow D\}$ -t kapunk, ahol a baloldalon már mindenütt csak egy attribútum szerepel, a 3. lépéssel készen vagyunk.
- 3 Végül redundáns funkcionális függéseket keresünk F -ben. A tranzitivitás alapján látszik, hogy $B \rightarrow D$ és $D \rightarrow A$ -ból következik $B \rightarrow A$, így ez elhagyható. Ezzel végeztünk a 4. lépéssel is.

Eredmény: $F = \{D \rightarrow A, B \rightarrow D\}$