

Kvantumalgoritmusok

Kvantuminformáció, kvantumállapotok, leképezések

Véges dimenziós Hilbert tér

Egy véges dimenziós Hilbert tér $\mathbb{H}$ egy pár $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, ahol V egy véges dimenziós valós vagy komplex vektortér és $\langle \cdot | \cdot \rangle$ egy belső szorzat.

Kvantum bitek

Egy kvantum bit, vagy **qubit** egy fizikai rendszer, melynek állapottere egy két dimenziós Hilbert tér és $(|0\rangle, |1\rangle)$ ennek a térnek egy ortonormált bázisa.

Minden qubit leírható állapotvektorral

$$|\varphi\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle,$$

ahol α_0, α_1 komplex együtthatók, melyekre

$$\|\varphi\|^2 = |\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1.$$

Kvantumállapot

Egy **kvantumállapot** egy oszlopvektorral reprezentálható, melynek indexei kapcsolatban állnak a klasszikus állapotokkal.

- ▶ A bemenetek komplex számok.
- ▶ A bemenetek abszolút értékei négyzeteinek összege 1

Kvantumállapot vektorok

Egy komplex számokat tartalmazó vektor euklideszi normáját a következőképpen számoljuk ki:

$$v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \text{ ekkor } \|v\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2}$$

Kvantumállapot vektorok tehát egységvektorok erre a normára nézve.

Qubit állapotok

- ▶ Standard bázis állapotok: $|0\rangle$ és $|1\rangle$
- ▶ plus/minus állapotok:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \text{ and } |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

- ▶ egy tetszőleges állapot:

$$\frac{1+2i}{3} |0\rangle - \frac{2}{3} |1\rangle$$

Kvantum állapotok Dirac féle jelölése

$$|\psi\rangle = \frac{1+2i}{3} |0\rangle - \frac{2}{3} |1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1+2i}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\langle\psi| = \frac{1-2i}{3} \langle 0| - \frac{2}{3} \langle 1| = \left(\frac{1-2i}{3} \quad -\frac{2}{3} \right)$$

$$\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger$$

Bell állapotok

Négy Bell állapot létezik. Együttesen a Bell bázist alkotják.

$$\blacktriangleright |\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$$

$$\blacktriangleright |\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$$

$$\blacktriangleright |\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle$$

$$\blacktriangleright |\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle$$

A Bell bázis egy ortonormált bázisa a 4 dimenziós térnek két qubitra vonatkozóan.

Klasszikus állapotok

Ha X -nek a klasszikus állapottere Σ és Y -nak a klasszikus állapottere Γ , akkor (X, Y) klasszikus állapottere a következő Descartes szorzat:

$$\Sigma \times \Gamma = \{(a, b) \mid a \in \Sigma, b \in \Gamma\}$$

Általánosan

Legyen $X_1, \dots, X_n$ klasszikus állapotterei $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$, akkor $(X_1, \dots, X_n)$ állapottere

$$\Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in \Sigma_1, \dots, a_n \in \Sigma_n\}$$

Példák

1. Ha $\Sigma = \{0, 1\}$ és $\Gamma = \{\blacklozenge, \star, \diamond\}$, akkor

$$\Sigma \times \Gamma = \{(0, \blacklozenge), (0, \star), (0, \diamond), (1, \blacklozenge), (1, \star), (1, \diamond)\}$$

2. Ha $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = \{0, 1\}$, akkor $\Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \Sigma_3 =$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} (0, 0, 0), & (0, 0, 1), & (0, 1, 0), & (1, 0, 0), \\ (1, 1, 0), & (1, 0, 1), & (0, 1, 1), & (1, 1, 1) \end{array} \right\}$$

Valószínűségi állapotok

A összetett rendszerek valószínűségi állapota a valószínűségeket az egyedi rendszerek klasszikus állapotkészletének Descartes szorzatával társítja.

Példa:

$$Pr((X, Y) = (0, 0)) = \frac{1}{2}$$

$$Pr((X, Y) = (0, 1)) = 0$$

$$Pr((X, Y) = (1, 0)) = 0$$

$$Pr((X, Y) = (1, 1)) = \frac{1}{2}$$

vagy vektorként megadva: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Független rendszerek

Egy adott valószínűségi állapot (X, Y) esetén azt mondjuk, hogy X és Y *független* ha

$$Pr((X, Y) = (a, b)) = Pr(X = a)Pr(Y = b)$$

minden $a \in \Sigma$ és $b \in \Gamma$ esetén.

Ha ez az állapot vektorként van megadva:

$$|\pi\rangle = \sum_{(a,b) \in \Sigma \times \Gamma} p_{ab} |ab\rangle,$$

akkor két rendszer X és Y független, ha léteznek valószínűségi vektorok

$$|\phi\rangle = \sum_{a \in \Sigma} q_a |a\rangle \text{ és } |\psi\rangle = \sum_{b \in \Gamma} r_b |b\rangle$$

úgy hogy $p_{ab} = q_a r_b$ minden $a \in \Sigma$ és $b \in \Gamma$ esetén.

Példa

Legyen (X, Y) egy bitpár, melynek valószínűségi állapota reprezentálható a következő vektorral:

$$|\pi\rangle = \frac{1}{6} |00\rangle + \frac{1}{12} |01\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle + \frac{1}{4} |11\rangle$$

Ekkor X és Y független, mert pl. a következő két vektor teljesíti a feltételt:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{4} |0\rangle + \frac{3}{4} |1\rangle \text{ és } |\psi\rangle = \frac{2}{3} |0\rangle + \frac{1}{3} |1\rangle .$$

Kérdés

Lehet-e X és Y független, ha (X, Y) valószínűségi állapota

$$\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{2} |11\rangle?$$

Nem, mert akkor léteznének olyan számok q_0, q_1, r_0, r_1 , hogy

$$q_0 r_0 = \frac{1}{2}$$

$$q_0 r_1 = 0$$

$$q_1 r_0 = 0$$

$$q_1 r_1 = \frac{1}{2}$$

Kvantum állapotok mérése

Standard alap mérésekre koncentrálnak.

- ▶ A lehetséges kimenetek klasszikus állapotok.
- ▶ Minden klasszikus állapot olyan valószínűséggel lesz kimenet, amennyi a hozzátartozó kvantum állapot vektorbemenet abszolút értékének négyzete

A következő kvantum állapotot mérjük:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

Ekkor

$$P(0 \text{ a kimenet}) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

és

$$P(1 \text{ a kimenet}) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

Feladatok

Adjuk meg a következő kvantum állapotok esetén $P(0 \text{ a kimenet})$ -t és $P(1 \text{ a kimenet})$!

1. $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$

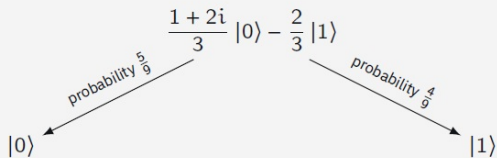
2. $\frac{1+2i}{3} |0\rangle - \frac{2}{3} |1\rangle$

3. $|0\rangle$

4. $|1\rangle$

Új kvantum állapot

Egy rendszer mérése megváltoztatja a kvantum állapotát: Ha $|\alpha\rangle$ klasszikus állapot lesz a kimenet, akkor $|\alpha\rangle$ lesz az új kvantum állapot.



Unitér leképezések

Egy kvantum állapoton csak bizonyos leképezéseket lehet végre hajtani. Azokat a leképezéseket, melyeket kvantum állapotvektorokon lehet végre hajtani, unitér mátrixokkal lehet reprezentálni.

U egy unitér mátrix ha $U^\dagger U = UU^\dagger = I$, ahol $U^\dagger$ a konjugált transzponált mátrixot jelent.

Ez ekvivalens azzal, hogy $U^{-1} = U^\dagger$

Qubit unitér leképezések

Pauli leképezések

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

σ_x : bit flip (vagy NOT leképezés) σ_z : phase flip

Példák Pauli leképezésre

- ▶ $\sigma_x |0\rangle = |1\rangle$
- ▶ $\sigma_x |1\rangle = |0\rangle$
- ▶ $\sigma_z |0\rangle = |0\rangle$
- ▶ $\sigma_z |1\rangle = -|1\rangle$

Hadamard leképezés

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Können bizonyítható, hogy H unitér, azaz $H^\dagger H = HH^\dagger = I$

Fázis leképezés

(Phase operation)

$$\mathcal{P}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

minden $\theta \in \mathbb{R}$

Fontos példák:

$$S = \mathcal{P}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$T = \mathcal{P}_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Példák

- ▶ $\mathcal{H} |0\rangle = |+\rangle$
- ▶ $\mathcal{H} |1\rangle = |-\rangle$
- ▶ $\mathcal{H} |+\rangle = |0\rangle$
- ▶ $\mathcal{H} |-\rangle = |1\rangle$
- ▶ $\mathcal{H} \left(\frac{1+2i}{3} |0\rangle - \frac{2}{3} |1\rangle \right) = \frac{-1+2i}{3\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{3+2i}{3\sqrt{2}} |1\rangle$

Valószínűségi állapot mérése

Tegyük fel, hogy két bit (X, Y) a következő valószínűségi állapotban van

$$\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{2} |11\rangle .$$

Ez azt jelenti, hogy méréskor $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 00 lesz a kimenet, és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 11 lesz a kimenet.

Ha csak X -et szeretnénk mérni, és Y -t békén hagyjuk, akkor mi a helyzet?

$$P(X = a) = \sum_{b \in \Gamma} P((X, Y) = (a, b))$$

Y klasszikus állapota még lehet bizonytalan, attól függően hogy mi lesz a mérés eredménye:

$$P(Y = b \mid X = a) = \frac{P((X, Y)(a, b))}{P(X = a)}$$

Dirac féle jelöléssel

Feltével, hogy (X, Y) tetszőleges valószínűségi állapotban van

$$\sum_{(a,b) \in \Sigma \times \Gamma} p_{ab} |ab\rangle = \sum_{(a,b) \in \Sigma \times \Gamma} p_{ab} |a\rangle \otimes |b\rangle = \sum_{a \in \Sigma} |a\rangle \otimes \left(\sum_{b \in \Gamma} p_{ab} |b\rangle \right)$$

A valószínűsége hogy X kimenete lesz $a \in \Sigma$

$$P(X = a) = \sum_{b \in \Gamma} p_{ab}$$

Feltéve, hogy X kimenete $a \in \Sigma$, Y valószínűségi állapota lesz

$$\frac{\sum_{b \in \Gamma} p_{ab} |b\rangle}{\sum_{c \in \Gamma} p_{ac}}$$

Példa

Legyen (X, Y) a következő valószínűségi állapotban:

$$\frac{1}{12} |00\rangle + \frac{1}{4} |01\rangle + \frac{1}{3} |10\rangle + \frac{1}{3} |11\rangle$$

Ezt a következőképpen is tudjuk írni:

$$|0\rangle \otimes \left(\frac{1}{12} |0\rangle + \frac{1}{4} |1\rangle \right) + |1\rangle \otimes \left(\frac{1}{3} |0\rangle + \frac{1}{3} |1\rangle \right)$$

Első eset

A mérés kimenete 0

$$P(\text{a kimenet } 0) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

Ezt a kimenetet feltéve, Y valószínűségi állapota lesz

$$\frac{\frac{1}{12} |0\rangle + \frac{1}{4} |1\rangle}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} |0\rangle + \frac{3}{4} |1\rangle$$

Második eset

A mérés kimenete 1

$$P(\text{a kimenet 1}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Ezt a kimenetet feltéve, Y valószínűségi állapota lesz

$$\frac{\frac{1}{3} |0\rangle + \frac{1}{3} |1\rangle}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} |0\rangle + \frac{1}{2} |1\rangle$$

Megjegyzés: Fordítva is működik, hogy Y -t mérjük X helyett.

Leképezések valószínűségi állapotokon

Leképezések valószínűségi állapotokon reprezentálhatóak olyan sztochasztikus mátrixokkal, melyek sorai és oszlopai a klasszikus állapotok Descartes szorzatának felelnek meg.

Példa

Kontrollált - NEM leképezés (controlled-NOT operation)

Ha $X = 1$, akkor hajts végre egy NEM leképezést (NOT operation), egyébként ne csinálj semmit.

X a kontrol bit, amely eldönti hogy a NEM leképezés végre lesz hajtva vagy sem az Y célbiten.

Controlled NOT leképezés hatása a bázison

$$|00\rangle \mapsto |00\rangle$$

$$|01\rangle \mapsto |01\rangle$$

$$|10\rangle \mapsto |11\rangle$$

$$|11\rangle \mapsto |10\rangle$$

Vagy mátrixként megadva:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Szimultán leképezések

Tegyük fel, van két valószínűségi leképezés, M hat X -en és N hat Y -n. Mi történik, ha mindkettőt egyszerre alkalmazzuk (X, Y) -n?

$M \otimes N$ (tenzorszorzata) hat (X, Y) -n.

Példa

$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ hat X -en és egy NOT leképezés hat Y -n. Ekkor

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Kvantum állapotok

Legyen X és Y két qubit. Ekkor (X, Y) klasszikus állapottere

$$\{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{00, 01, 10, 11\}.$$

Az (X, Y) pár kvantum állapot vektorai a következőképpen nézhetnek ki:

$$\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{i}{2} |01\rangle - \frac{1}{2} |10\rangle - \frac{i}{2} |11\rangle$$

$$\frac{3}{5} |00\rangle - \frac{4}{5} |11\rangle$$

$$|01\rangle$$

Kvantum állapotok

Legyen X és Y két qubit. Ekkor (X, Y) klasszikus állapottere

$$\{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{00, 01, 10, 11\}.$$

Az (X, Y) pár kvantum állapot vektorai a következőképpen nézhetnek ki:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |0\rangle |0\rangle + \frac{i}{2} |0\rangle |1\rangle - \frac{1}{2} |1\rangle |0\rangle - \frac{i}{2} |1\rangle |1\rangle \\ & \frac{3}{5} |0\rangle |0\rangle - \frac{4}{5} |1\rangle |1\rangle \\ & |0\rangle |1\rangle \end{aligned}$$

Kvantum állapotok

Legyen X és Y két qubit. Ekkor (X, Y) klasszikus állapottere

$$\{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{00, 01, 10, 11\}.$$

Az (X, Y) pár kvantum állapot vektorai a következőképpen nézhetnek ki:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |0\rangle \otimes |0\rangle + \frac{i}{2} |0\rangle \otimes |1\rangle - \frac{1}{2} |1\rangle \otimes |0\rangle - \frac{i}{2} |1\rangle \otimes |1\rangle \\ & \frac{3}{5} |0\rangle \otimes |0\rangle - \frac{4}{5} |1\rangle \otimes |1\rangle \\ & |0\rangle \otimes |1\rangle \end{aligned}$$

Kvantum állapotok

Legyen X és Y két qubit. Ekkor (X, Y) klasszikus állapottere

$$\{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{00, 01, 10, 11\}.$$

Az (X, Y) pár kvantum állapot vektorai a következőképpen nézhetnek ki:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |0\rangle_X |0\rangle_Y + \frac{i}{2} |0\rangle_X |1\rangle_Y - \frac{1}{2} |1\rangle_X |0\rangle_Y - \frac{i}{2} |1\rangle_X |1\rangle_Y \\ & \frac{3}{5} |0\rangle_X |0\rangle_Y - \frac{4}{5} |1\rangle_X |1\rangle_Y \\ & |0\rangle_X |1\rangle_Y \end{aligned}$$

Kvantum állapotok

Kvantumállapot vektorok tenzor szorzata is kvantumállapot vektor.
Tehát ha $|\varphi_1\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle$ kvantumállapot vektorok az $X_1, \dots, X_n$ rendszereknek, akkor

$$|\varphi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_n\rangle$$

egy kvantum állapot vektor mely reprezentálja az $(X_1, \dots, X_n)$ összetett rendszert.

Példa 1

A következő kvantum állapot vektor

$$\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{i}{2} |01\rangle - \frac{1}{2} |10\rangle - \frac{i}{2} |11\rangle$$

előáll szorzatként

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |1\rangle \right)$$

Példa 2

A kvantumállapot vektor

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$$

nem áll elő szorzatként. Ha létezne olyan φ és ψ , hogy

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle = \varphi \otimes \psi$$

akkor $\langle 0 | \varphi \rangle \langle 1 | \psi \rangle = \langle 01 | \varphi \otimes \psi \rangle = 0$, amiből $\langle 0 | \varphi \rangle = 0$ vagy $\langle 1 | \psi \rangle = 0$. Ekkor viszont $\langle 0 | \varphi \rangle \langle 0 | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ és $\langle 1 | \varphi \rangle \langle 1 | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nem teljesülhet.

Három qubit

Jól ismert kvantumállapot vektorok három qubit esetén:

- ▶ GHZ állapot: $\frac{1}{\sqrt{2}} |000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |111\rangle$
- ▶ W állapot: $\frac{1}{\sqrt{3}} |001\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |010\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |001\rangle$

Mérés

Mérés ugyanúgy működik mint egy rendszernél. Például

$$\frac{3}{5} |0\rangle |\triangle\rangle - \frac{4i}{5} |1\rangle |\square\rangle$$

méréskor $\frac{9}{25}$ a valószínűsége a $(0, \triangle)$ kimenetnek, és $\frac{16}{25}$ a valószínűsége az $(1, \square)$ kimenetnek.