

Kvantumalgoritmusok

Matematikai alapok II

Dirac féle jelölés - 2. rész

- ▶ $|a\rangle$ jelöli azt az oszlopvektort, melynek 1 van azon a helyen, mely $a \in \Sigma$ -ra vonatkozik
- ▶ $\langle a|$ jelöli azt a sorvektort, melynek 1 van azon a helyen, mely $a \in \Sigma$ -ra vonatkozik

Példa: $\Sigma = \{0, 1\}$. Ekkor $|0\rangle \langle 1| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Lineáris leképezések

Legyen V, W két vektortér ugyanazon test felett.
Egy leképezés $T : V \rightarrow W$ **lineáris** ha

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

minden $u, v \in V$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

Példák

- ▶ Legyen $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ és $T(x) = Ax$, ahol A egy $m \times n$ mátrix
- ▶ Deriválás: $D(f) = f'$
- ▶ Integrál operátor: $T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$

Mag és kép

Egy lineáris leképezés $T : V \rightarrow W$:

$$\ker T = \{v \in V \mid T(v) = 0\}, \quad \operatorname{Im} T = \{T(v) \mid v \in V\}$$

Rang–Nullitás Tétel (Dimenziótétel):

$$\dim V = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T)$$

Feladatok

1. Mutassa meg, hogy az összes lineáris leképezés $V \rightarrow W$ vektorteret alkot.
2. Legyen $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ adott

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x).$$

Határozza meg $\ker T$ -t és $\operatorname{Im} T$ -t.

Belső szorzat

Egy **belső szorzat** egy V vektortéren egy leképezés

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$$

melyre teljesülnek a következő tulajdonságok:

- ▶ Lineáris az első argumentumban
- ▶ Konjugált szimmetria: $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$
- ▶ Pozitív definít: $\langle v, v \rangle \geq 0$, egyenlőség akkor és csak akkor ha $v = 0$

Példák

- ▶ Euklideszi belső szorzat valós vektortéren $\mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

- ▶ Belső szorzat komplex vektortéren $\mathbb{C}^n$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$$

- ▶ Függvénytér:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

Norma és ortogonalitás

Egy vektor normája a saját magával vett belső szorzatából származik:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Két vektor u, v **ortogonális (merőleges)** ha

$$\langle u, v \rangle = 0$$

Feladatok

1. Mutassa meg, hogy $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ teljesíti a háromszögegyenlőtlenséget.
2. Adjunk meg $\mathbb{R}^2$ egy ortonormált bázisát, ha $(1, 1)$ és $(1, 0)$ -ból indulunk.

Tenzorszorzat

A tenzorszorzat segítségével:

- ▶ leírhatunk multilineáris leképezések lineáris leképezésekként
- ▶ konstruálhatunk összetett rendszereket (például fizikában)
- ▶ építhetünk magasabb dimenziós tereket egyszerűbbekből

Tulajdonságok

- ▶ $\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$
- ▶ Ha $\{v_i\}$ a V egy bázisa és $\{w_j\}$ a W egy bázisa, akkor

$$\{v_i \otimes w_j\}$$

a $V \otimes W$ egy bázisa.

Mátrixok

- ▶ $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^6$
- ▶ Egy rangú tenzorok: $v \otimes w$
- ▶ Mátrixok tenzorként: $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m \times n}$

Feladatok

1. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ egy bázisa $\{e_1, e_2\}$. Adjon meg $V \otimes V$ egy bázisát.
2. Mutassa meg, hogy nem minden tenzort $V \otimes W$ -ben lehet $v \otimes w$ -ként felírni.

Lineáris operátorok

Egy **lineáris operátor** egy lineáris leképezés

$$T : V \rightarrow V$$

egy vektorterről saját magára.

Mátrix Reprezentáció

Adott V egy bázisa $\{e_i\}$, ekkor a T operátor reprezentálható az A mátrix segítségével:

$$T(v) = Av$$

Báziscsere hasonlósági transzformációkhoz vezet:

$$A \mapsto P^{-1}AP$$

Adjungált operátorok

Egy belyőszorlat teryn az **adjungált** $T^\dagger$ definiálható a következőképpen:

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^\dagger w \rangle$$

- ▶ Önadjungált (Hermit): $T = T^\dagger$
- ▶ Unitér: $T^\dagger T = I$

Sajátértékek és sajátvektorok

Legyen $T : V \rightarrow V$ egy lineáris operátor egy V vektortéren.

- ▶ Egy skálár $\lambda \in \mathbb{F}$ egy **sajátérték** ha létezik $v \neq 0$ úgy hogy

$$T(v) = \lambda v$$

- ▶ Ekkor $v \neq 0$ egy **sajátvektor**.
- ▶ A λ összes sajátvektora generálja a **sajátteret**:

$$E_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}.$$

Sajátértékek keresése

Egy $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ mátrix esetén

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

a **karakterisztikus polinom**.

Ezt meg kell oldani λ -ra hogy megtaláljuk a sajátértékeket.

Utána meg kell oldani $(A - \lambda I)v = 0$ a sajátvektorok kiszámításához.

Dirac féle jelölés II

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle 1| = (0 \quad 1)$$

Tehát

$$|0\rangle \langle 0| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \quad 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Példák

$$\blacktriangleright |1\rangle \langle 0| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\blacktriangleright |1\rangle \langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinisztikus leképezések

Jelölje Σ egy állapotokból álló halmazt. Minden $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ függvény leír egy determinisztikus leképezést, mely egy α klasszikus állapot leképezi $f(\alpha)$ -ba, minden $\alpha \in \Sigma$ esetén. Adott egy $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ függvény, létezik egyértelműen egy mátrix M , melyre

$$M |\alpha\rangle = |f(\alpha)\rangle \quad \forall \alpha \in \Sigma.$$

Valószínűségi leképezések

Klasszikus leképezések, melyek bizonytalanságot és véletlent bevezetnek.

Példa: Ha a klasszikus állapot 0, akkor ne csinálj semmit. Ha a klasszikus állapot 1, akkor dobjunk fel egy érmét $\frac{1}{2}$ valószínűséggel.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Sztochasztikus mátrix: Minden eleme nemnegatív valós szám, minden oszlop elemei összeadva 1-et adnak vissza.

Leképezések kompozíciója

Legyen X egy rendszer és $M_1, \dots, M_n$ sztochasztikus mátrixok, melyek valószínűségi leképezéseket reprezentálnak. Ekkor egymás után lehet ezeket a leképezéseket végre hajtani.

$$M_2(M_1 v) = (M_2 M_1) v$$

Példa:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figyelem: $M_2 M_1 \neq M_1 M_2$

Feladat 1

Találjuk meg a következő mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution 1

Characteristic equation:

$$\det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = 0$$

$$(2 - \lambda)^2 = 1 \implies 2 - \lambda = \pm 1$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3$$

Eigenvectors:

$$\lambda_1 = 1 : (A - I)v = 0 \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v = 0 \implies v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 : (A - 3I)v = 0 \implies \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v = 0 \implies v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fontos tulajdonságok

- ▶ Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.
- ▶ Önadjungált mátrix esetén:
 - ▶ Minden sajátérték valós szám.
 - ▶ Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok ortogonálisak egymásra.

Gram-Schmidt ortogonalizálás

Adott néhány lineárisan független vektor $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,
Gram-Schmidt algoritmussal egy ortonormált vektorokból álló
halmazt konstruálunk $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

Algoritmus:

$$u_1 = v_1, \quad e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

$$u_2 = v_2 - \text{proj}_{e_1}(v_2), \quad e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$$

$$u_3 = v_3 - \text{proj}_{e_1}(v_3) - \text{proj}_{e_2}(v_3), \dots$$

$$\text{proj}_e(v) = \langle v, e \rangle e$$

Feladat 2

Találjunk $\mathbb{R}^3$ egy ortonormált bázisát ha a következő vektorok vannak adva:

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (1, 0, 1), \quad v_3 = (0, 1, 1)$$

Solution 2

Step 1: $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$

Step 2:

$$u_2 = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1$$

$$\langle v_2, e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 0 + 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$u_2 = (1, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) = (1, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$$

Solution 2 (continued)

Step 3:

$$u_3 = v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle e_2$$

$$\langle v_3, e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 + 1 + 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle v_3, e_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(0 - 1 + 2) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$u_3 = (0, 1, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}e_2 = (0, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) - \frac{1}{6}(1, -1, 2)$$

$$u_3 = (-2/3, 2/3, 2/3), \quad e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$$

Orthonormal basis: e_1, e_2, e_3

Exercise 3 (Eigen + Orthogonalization)

Diagonalize the symmetric matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

and produce an orthonormal basis of eigenvectors.

Solution 3

Characteristic equation:

$$\det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - 7\lambda + 11 = 0$$

$$\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 44}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Eigenvectors:

$$\lambda_1 = \frac{7 - \sqrt{5}}{2} \implies (4 - \lambda_1)x + y = 0 \implies y = (\lambda_1 - 4)x$$

$$\lambda_2 = \frac{7 + \sqrt{5}}{2} \implies y = (\lambda_2 - 4)x$$

Normalize each vector to get orthonormal basis:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{(\lambda_1 - 4)^2 + 1}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 - 4 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{(\lambda_2 - 4)^2 + 1}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 - 4 \end{pmatrix}$$

Spektráltétel (Véges dimenziós)

Ha T önadjungált egy véges dimenziós belsőszorzat téren, akkor:

- ▶ Minden sajátérték valós szám.
- ▶ Létezik a sajátértékek ortonormált bázisa.

Feladatok

1. Találjuk meg egy 2×2 -es mátrix adjungáltját.
2. Mutassuk meg, hogy egy önadjungált operátor különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak!

Összefoglalás

- ▶ Lineáris leképezések adnak struktúrát egy vektortéren
- ▶ Belső szorzatok lehetővé teszik a geometria bevezetését
- ▶ Tenzor szorzatok felépítik az összetett tereket
- ▶ Operátorok dinamikát és transzformációt írnak le

Exercise 1

Problem: Show that the set of all linear maps $V \rightarrow W$ is a vector space.

Solution

Let $\mathcal{L}(V, W)$ be the set of linear maps from V to W .

Define:

$$(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v), \quad (\alpha T)(v) = \alpha T(v).$$

- ▶ Closure: sum and scalar multiple of linear maps are linear
- ▶ Zero element: $0(v) = 0$
- ▶ Inverse: $(-T)(v) = -T(v)$

All vector space axioms are satisfied.

$\mathcal{L}(V, W)$ is a vector space

Exercise 2

Problem: Let

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x).$$

Find $\ker T$ and $\operatorname{Im} T$.

Solution: Kernel

Solve $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$:

$$x + y = 0, \quad y + z = 0, \quad z + x = 0.$$

From the first two equations:

$$y = -x, \quad z = x.$$

Third equation:

$$z + x = 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$\ker T = \{(0, 0, 0)\}$$

Solution: Image

Since $\ker T = \{0\}$, the map is injective.
By the rank–nullity theorem:

$$\dim(\operatorname{Im} T) = 3.$$

$$\boxed{\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^3}$$

Exercise 3

Problem: Verify that the norm

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

satisfies the triangle inequality.

Solution

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle u, v \rangle + \|v\|^2.\end{aligned}$$

By Cauchy–Schwarz:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

Thus:

$$\|u + v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2.$$

$$\boxed{\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|}$$

Exercise 4

Problem: Find an orthonormal basis of $\mathbb{R}^2$ starting from $(1, 1)$ and $(1, 0)$.

Solution (Gram–Schmidt)

Let:

$$v_1 = (1, 1), \quad v_2 = (1, 0).$$

Normalize:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1).$$

Orthogonalize:

$$u_2 = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 = (1, 0) - \frac{1}{2}(1, 1).$$

Normalize:

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1).$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) \right\}$$

Exercise 5

Problem: Let $V = \mathbb{R}^2$ with basis $\{e_1, e_2\}$. Write a basis of $V \otimes V$.

Solution

A basis is given by all tensor products of basis vectors:

$$\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$$

$$\dim(V \otimes V) = 2 \cdot 2 = 4.$$

Exercise 6

Problem: Show that not every tensor can be written as $v \otimes w$.

Solution

Consider:

$$T = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2.$$

Assume:

$$T = (ae_1 + be_2) \otimes (ce_1 + de_2).$$

Expanding gives mixed terms:

$$ad e_1 \otimes e_2 + bc e_2 \otimes e_1.$$

These cannot vanish while keeping

$$ac = bd = 1.$$

T is not of the form $v \otimes w$

Exercise 7

Problem: Find the adjoint of a 2×2 matrix.

Solution

Let:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Over $\mathbb{R}$:

$$A^\dagger = A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Over $\mathbb{C}$:

$$A^\dagger = \overline{A}^T.$$

Exercise 8

Problem: Show that eigenvectors of a self-adjoint operator with distinct eigenvalues are orthogonal.

Solution

Let:

$$Tv_1 = \lambda_1 v_1, \quad Tv_2 = \lambda_2 v_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Since $T = T^\dagger$:

$$\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \langle Tv_1, v_2 \rangle = \langle v_1, Tv_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Thus:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle = 0.$$

$$\boxed{\langle v_1, v_2 \rangle = 0}$$