Operációkutatás előadáshoz, Szállítási feladt megoldása magyar módszerrel **segédanyag**

Burai Pál

2014. április 22.

Szállítási feladat

$$\sum_{s=1}^{m} x_{is} = a_i \,, \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$\sum_{t=1}^{n} x_{tj} = b_j \,, \qquad j = 1, \cdots, m$$

$$\underline{x_{ij} \geq 0 \,,\; i = 1, \cdots, n \,;\; j = 1, \cdots, m}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} = z(X) \longrightarrow \min$$

Szállítási feladat

$$\sum_{s=1}^{m} x_{is} = a_i \,, \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$\sum_{t=1}^{n} x_{tj} = b_j \,, \qquad j = 1, \cdots, m$$

$$\underline{x_{ij} \geq 0 \,,\ i = 1, \cdots, n \,;\ j = 1, \cdots, m}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} = z(X) \longrightarrow \min$$

Állítás

A szállítási feladatnak pontosan akkor létezik optimális megoldása, ha a feladóhelyeken lévő összes anyag mennyisége megegyezik az összes felvevőhely szükséges anyagmennyiségének összegével.

Szállítási feladat, Lehetséges megoldás keresése észak-nyugat módszerrel

$$x_{11}^{(0)} = \min\{a_1, b_1\}$$

$$x_{1t}^{(0)} = \min\left\{a_1 - \sum_{s=1}^{t-1} x_{1s}^{(0)}, b_1\right\}, \qquad t = 2, \cdots, m$$

$$x_{i1}^{(0)} = \min\left\{a_i, b_1 - \sum_{s=1}^{i-1} x_{s1}^{(0)}\right\}$$

$$x_{ij}^{(0)} = \min\left\{a_i - \sum_{t=1}^{j-1} x_{it}^{(0)}, b_j - \sum_{s=1}^{i-1} x_{sj}^{(0)}\right\},$$

$$j = 2, \cdots, m, \qquad i = 2, \cdots, n.$$

Szállítási feladat

$$x_{11}^{(0)} = x_{12}^{(0)} = 2\,,\; x_{13}^{(0)} = x_{14}^{(0)} = 0$$

$$x_{21}^{(0)} = x_{22}^{(0)} = 0,\; x_{23}^{(0)} = 3,\; x_{24}^{(0)} = 0$$

$$x_{31}^{(0)} = x_{32}^{(0)} = 0,\; x_{33}^{(0)} = 1,\; x_{43}^{(0)} = 2$$

Kitüntetett változók

$$x_{ij}^{(0)} > 0, \quad \text{és} \quad x_{ts}^{(0)} = 0\,,$$

amelyre

$$x_{t+1s-1}^{(0)} = 0,\; x_{ts-1}^{(0)} > 0,\; x_{t+1s}^{(0)} > 0.$$

Szállítási feladat, Példa

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$b = (\ 2, \quad 2, \quad 4, \quad 2,\ ) \qquad \Gamma_0 = \left\{ (1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,3),\ (3,3),\ (3,4) \right\}$$

Szállítási feladat, Példa

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2, & 2, & 4, & 2, \end{pmatrix} \qquad \Gamma_0 = \left\{ (1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,3),\ (3,3),\ (3,4) \right\}$$

$$u_i + v_j = c_{ij}, \qquad (i,j) \in \Gamma$$

Szállítási feladat, Példa

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2, & 2, & 4, & 2, \end{pmatrix} \qquad \Gamma_0 = \left\{ (1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,3),\ (3,3),\ (3,4) \right\}$$

$$u_i + v_j = c_{ij}, \qquad (i,j) \in \Gamma$$

	$v_1 = 0$	$v_2 = 2$	$v_3 = 3$	$v_4 = 3$
$u_1 = 1$	2 / 1	2 / 3	0 / 4	3
$u_2 = -1$	3	3	3 / 2	1
$u_3 = 0$	5	4	1 / 3	2 / 3

Szállítási feladat, Disztribúciós módszer lépései

1. Ha $u_i + v_j \leq c_{ij}$ minden indexpárra, akkor a tábla optimális. Ellenkező esetben a második lépés következik.

1. Ha $u_i + v_j \leq c_{ij}$ minden indexpárra, akkor a tábla optimális. Ellenkezõ esetben a második lépés következik.

2. Válasszunk egy olyan indexpárt, amelyik nincs a kitüntetett elemek halmazában. Legyen ez x_{rs}. Továbbá $u_r + v_s > c_{rs}$ és $u_r + v_s - c_{rs}$ maximális.
   Képezzünk x_{rs}-bõl induló olyan zárt ciklust, amelyben csak kitüntetett elemek szerepelnek x_{rs}-n kívûl. Legyen δ az x_{rs}-tõl páratlan távolságra elhelyezkedõ ciklusbeli cellákhoz tartozó értékek minimuma.
   Az új disztribúciós táblában legyen $x_{rs} = \delta$, a ciklusban tõle páratlan távolságra lévõ értékeket δ-val csökkentjük, a párosra lévõket δ-val növeljük, a többit nem változtatjuk.

Szállítási feladat

	$v_1 = 0$	$v_2 = 2$	$v_3 = 3$	$v_4 = 2$
$u_1 = 1$	2 / 1	2 / 3	4	0 / 3
$u_2 = 0$	3	3	3 / 2	1
$u_3 = 1$	5	4	1 / 3	2 / 3

Szállítási feladat

	$v_1 = 0$	$v_2 = 2$	$v_3 = 3$	$v_4 = 2$
$u_1 = 1$	2 / 1	2 / 3	4	0 / 3
$u_2 = 0$	3	3	3 / 2	1
$u_3 = 1$	5	4	1 / 3	2 / 3

	$v_1 = 0$	$v_2 = 2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 2$
$u_1 = 1$	2 / 1	2 / 3	4	0 / 3
$u_2 = -1$	3	3	1 / 2	2 / 1
$u_3 = 0$	5	4	3 / 3	3

Minimális költség módszer

1. Keressük meg a minimális szállítási költséget, válasszuk azt a mezőt, amelyiknek a legkisebb a sorindexe, ha egy sorban több ilyen van, akkor azok közül azt, amelyiknek legkisebb az oszlopindexe. Ennek a mezőnek adjuk a lehetséges maximális értéket és a megfelelő oszlopot vagy sort kinullázzuk.
2. Az értékkel még nem rendelkező mezőkre végezzük el az előző lépést addig, míg minden mezőnek értéket nem adunk.

Szállítási feladat, Lehetséges megoldás keresése

Minimális költség módszer

1. Keressük meg a minimális szállítási költséget, válasszuk azt a mezőt, amelyiknek a legkisebb a sorindexe, ha egy sorban több ilyen van, akkor azok közül azt, amelyiknek legkisebb az oszlopindexe. Ennek a mezőnek adjuk a lehetséges maximális értéket és a megfelelő oszlopot vagy sort kinullázzuk.
2. Az értékkel még nem rendelkező mezőkre végezzük el az előző lépést addig, míg minden mezőnek értéket nem adunk.

Vogel módszer

1. Minden sorhoz és oszlophoz számítsuk ki a két legkisebb szállítási költség különbségét (büntetések).
2. Válasszuk ki a legnagyobb számmal rendelkező sor vagy oszlop legkisebb szállítási költségű mezőjét, majd adjuk ennek a lehetséges legnagyobb értéket. A megfelelő sort vagy oszlopot nullázzuk ki, és az *a* vagy *b* vektor szóban forgó komponensét módosítsuk.
3. Számítsuk ki újra a sorok és oszlopok büntetését, kivéve a kinullázottakét, majd az eljárást folytassuk addig míg lehetséges.

Ha az összkínálat meghaladja az összkeresletet

Ekkor vezessünk be egy fiktív keresleti pontot, melynek igénye megegyezik a túlkínálattal és ehhez rendeljünk nulla szállítási költséget.

Ha az összkínálat meghaladja az összkeresletet

Ekkor vezessünk be egy fiktív keresleti pontot, melynek igénye megegyezik a túlkínálattal és ehhez rendeljünk nulla szállítási költséget.

Ha az összkínálat kevesebb, mint az összkereslet

Ekkor vezessünk be egy fiktív kínálati pontot, majd az innen a j. keresleti helyre való szállítás költsége legyen a szóban forgó szállítási ponton keletkező kielégítetlen igényre vonatkozó büntetés.

Ha az összkínálat meghaladja az összkeresletet

Ekkor vezessünk be egy fiktív keresleti pontot, melynek igénye megegyezik a túlkínálattal és ehhez rendeljünk nulla szállítási költséget.

Ha az összkínálat kevesebb, mint az összkereslet

Ekkor vezessünk be egy fiktív kínálati pontot, majd az innen a j. keresleti helyre való szállítás költsége legyen a szóban forgó szállítási ponton keletkező kielégítetlen igényre vonatkozó büntetés.

Megjegyzés

Mivel a hozzárendelési feladatokat is tekinthetjük speciális szállítási feladatnak, a fentiekhez hasonló módon azokat is megoldhatjuk, ha a feladat mátrixa nem $n \times n$-es.

A korábbiak mellett most még azt is feltesszük, hogy az a, b vektorok nemnegatív egész elemű́ek, és a feladat kiegyensúlyozott.

Állítás

Ha a $C, D \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mátrixok ekvivalensek, akkor az $S(a, b, C)$ és $S(a, b, C)$ szállítási feladatok optimális megoldásai megegyeznek.

Megoldási stratégia

$(C^0, X^0), \ldots, (C^k, X^k),\ k \le \sum a_1$

1. $C \sim C^0$,
2. $C^t \sim C^{t+1},\ t = 0, \ldots, k-1$,
3. $C^t \ge 0,\ t = 0, \ldots, k$,
4. $X^t \ge 0$ egész elemű mátrix , $t = 0, \ldots, k$,
5. minden $t = 0, \ldots, k$-ra $\sum_{s=1}^{m} x_{is}^t \le a_i,\ i = 1, \ldots, n$ és $\sum_{s=1}^{n} x_{sj}^t \le b_j,\ j = 1, \ldots, m$,
6. tetszőleges (i, j, t) indexhármasra, ha $x_{ij}^t > 0$, akkor $c_{ij}^t = 0$,
7. $\Delta_t := \sum a_i - \sum\sum x_{ij}^t$ nemnegatív, szigorúan monoton csökkenő sorozat úgy, hogy $\Delta_k = 0$.

Előkészítő rész: A C mátrix minden sorából vonjuk ki az illető sor minimumát, majd ugyanezt végezzük el a sorokkal is. A kapott mátrix C^0. Ezek után X^0 elemeit képezzük oszlopfolytonosan úgy, hogy amennyiben a soron következő C^0-beli elem pozitív, akkor a megfelelő X^0-beli elem 0, egyébként pedig a lehető legnagyobb érték, amely a neki megfelelő a illetve b vektorkomponensből következik.

$$x_{11}^0 = \begin{cases} \min\{a_1, b_1\}, & \text{ha } c_{11}^0 = 0 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases},$$

$$x_{i1}^0 = \begin{cases} \min\{a_i, b_1 - \sum_{s=1}^{i-1} x_{s1}^0\}, & \text{ha } c_{i1}^0 = 0 \\ 0, & \text{egyébként}, \end{cases} \qquad i = 2, \dots, n.$$

$$x_{1j}^0 = \begin{cases} \min\{a_1 - \sum_{s=1}^{j-1} x_{1s}^0, b_j\}, & \text{ha } c_{1j}^0 = 0 \\ 0, & \text{egyébként}, \end{cases}$$

$$x_{ij}^0 = \begin{cases} \min\{a_i - \sum_{s=1}^{j-1} x_{is}^0, b_j - \sum_{s=1}^{i-1} x_{sj}^0\}, & \text{ha } c_{ij}^0 = 0 \\ 0, & \text{egyébként}, \end{cases} \qquad i = 2, \dots, n.$$

Legyen $r := 0$, és az előbb előállított (C^0, X^0) párral folytassuk az iterációt.

Iterációs rész:

1. lépés: Legyen $\Delta_r := \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij}^r$. Ha ez nulla, akkor X^r optimális megoldás. Egyébként kössük le a C^r mátrix j. oszlopát, ha $\delta_j = b_j - \sum_{s=1}^n x_{sj}^r = 0, \ j = 1, \ldots, m$.
2. lépés: Keressünk sorfolytonosan szabad nullát C^r-ben. Ha nincs, akkor az 5. lépés következik. Ellenkező esetben legyen a szabad nulla sorindexe i. Ha X^r i. sorában, ha $\bar{\delta} = a_i - \sum_{s=1}^m x_{sj}^r = 0$, akkor a 3. lépés következik, különben pedig a 4. lépéssel folytatódik az eljárás.
3. lépés: Lássuk el vesszővel a tekintett szabad nullát, kössük le a sorát, majd vizsgáljuk meg a szóban forgó sor elemeit. Ha valamelyik olyan elem, amelynek oszlopa le van kötve, egyenlő nullával, és a neki megfelelő X^r-beli elem pedig pozitív, akkor oldjuk fel ezen oszlop kötését, a nullát pedig csillagozzuk meg. Folytassuk a 2. lépéssel.
4. lépés: Lássuk el a nullát vesszővel, majd képezzünk innen indulva láncot a hozzárendelési feladat algoritmusához hasonlóan. Az X^{r+1} mátrix eleme legyen az r. mátrix megfelelő elemével egyenlő, ha a szóban forgó elem nem eleme a láncnak. A láncbeli elemeknek megfelelőkhöz adjunk hozzá Θ-t, ha a láncban nekik megfelelő helyen vesszős nulla állt, ha csillagos, akkor pedig vonjunk le Θ-t, ahol $\Theta = \min\{\bar{\delta}_{i_1}, \delta_{\lambda_v}, \rho\}$. Itt i_1 a lánc első elemének λ_v pedig az utolsó elemének az indexét jelöli. ρ a láncban található csillagos nulláknak megfelelő X^r-beli elemek minimuma, ha a lánc nem elfajuló, egyébként a lánc első elemének megfelelő X^r-beli komponenssel egyenlő. Legyen C^{r+1} a jelölések nélküli C^r mátrix.
5. lépés: Képezzük az aktuális C^r mátrixban a szabad elemek minimumát, amit vonjunk le a szabad elemekből és adjunk hozzá a kétszer kötöttekhez. Folytassuk a 2. lépéssel.