Operációkutatás előadáshoz **segédanyag**

Burai Pál

2014. február 27.

Legyenek $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges vektorok. Ekkor a $K := \{x \in \mathbb{R}^n | x = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i,\ \lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, m\}$ halmazt az $a_1, \ldots, a_m$ *vektorok által generált kúp*nak nevezzük.
Könnyű látni, hogy K konvex részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek.

Legyenek $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges vektorok. Ekkor a $K := \{x \in \mathbb{R}^n | x = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i,\ \lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, m\}$ halmazt az $a_1, \ldots, a_m$ *vektorok által generált kúp*nak nevezzük.
Könnyű látni, hogy K konvex részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek.

Lemma

Legyen $a \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $b \in K$ vektor, hogy

$$\|b - a\| = \min_{v \in K} \|v - a\|.$$

Ez K-ban a a-hoz legközelebbi elem. Belátható az is, hogy pontosan egy ilyen b vektor létezik, de erre a Farkas lemma bizonyításához nem lesz szükségünk.

Tétel (Farkas-lemma)

Legyenek $a, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ *tetszőleges vektorok. Ekkor az* $a^T x \leq 0$ *egyenlőtlenség pontosan akkor következménye a* $a_1^T x \leq 0, \ldots a_m^T x \leq 0$ *egyenlőtlenség rendszernek, ha* $a \in K$*, azaz, a előáll az* $a_1, \ldots, a_m$ *vektorok nemnegatív lineáris kombinációjaként.*

Tétel (Farkas-lemma)

Legyenek $a, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges vektorok. Ekkor az $a^T x \le 0$ egyenlőtlenség pontosan akkor következménye a $a_1^T x \le 0, \dots a_m^T x \le 0$ egyenlőtlenség rendszernek, ha $a \in K$, azaz, a előáll az $a_1, \dots, a_m$ vektorok nemnegatív lineáris kombinációjaként.

Farkas Gyula (Pusztasárosd, 1847. március 28. – Pestszentlőrinc, 1930. december 27.) matematikus, fizikus, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja. A magyarországi alkalmazott matematika és elméleti fizika jelentős alakja.

Tétel (Farkas-lemma)

Legyenek $a, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges vektorok. Ekkor az $a^T x \leq 0$ egyenlőtlenség pontosan akkor következménye a $a_1^T x \leq 0, \ldots a_m^T x \leq 0$ egyenlőtlenség rendszernek, ha $a \in K$, azaz, a előáll az $a_1, \ldots, a_m$ vektorok nemnegatív lineáris kombinációjaként.

Farkas Gyula (Pusztasárosd, 1847. március 28. – Pestszentlőrinc, 1930. december 27.) matematikus, fizikus, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja. A magyarországi alkalmazott matematika és elméleti fizika jelentős alakja.

Következmény

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $c \in \mathbb{R}^n$. Ekkor az $y^T A = c$ egyenletrendszernek pontosan akkor létezik nemnegatív megoldása, ha $c^T x \geq 0$ minden olyan x-re, amelyre $Ax \geq 0$.

Dualitás

(LP-P)

$$\begin{array}{lccc} & c^T x = z(x) & \longrightarrow & \max \\ f.h. & & & \\ & Ax & \leq & b \\ & x \geq 0, & & \end{array}$$

(LP-D)

$$\begin{array}{lccc} & y^T b = w(y) & \longrightarrow & \min \\ f.h. & & & \\ & y^T A & \geq & c \\ & y \geq 0, & & \end{array}$$

Dualitás

(LP-P)

$$\begin{array}{llll} & c^T x = z(x) & \longrightarrow & \max \\ f.h. & & & \\ & Ax & \leq & b \\ & x \geq 0, & & \end{array}$$

(LP-D)

$$\begin{array}{llll} & y^T b = w(y) & \longrightarrow & \min \\ f.h. & & & \\ & y^T A & \geq & c \\ & y \geq 0, & & \end{array}$$

Tétel (gyenge dualitás)

Tegyük fel, hogy x lehetséges megoldása a primál feladatnak, y pedig lehetséges megoldása a duál feladatnak. Ekkor $z(x) \leq w(y)$.

Dualitás

(LP-P)

$$\begin{array}{llll} & c^T x = z(x) & \longrightarrow & \max \\ f.h. & & & \\ & Ax & \leq & b \\ & x \geq 0, & & \end{array}$$

(LP-D)

$$\begin{array}{llll} & y^T b = w(y) & \longrightarrow & \min \\ f.h. & & & \\ & y^T A & \geq & c \\ & y \geq 0, & & \end{array}$$

Tétel (gyenge dualitás)

Tegyük fel, hogy x lehetséges megoldása a primál feladatnak, y pedig lehetséges megoldása a duál feladatnak. Ekkor $z(x) \leq w(y)$.

Következmény

Ha a primál feladat célfüggvénye felülről nem korlátos, akkor a duális feladatnak nincs lehetséges megoldása.

Dualitás

(LP-P)

$$\begin{array}{llll} & c^T x = z(x) & \longrightarrow & \max \\ f.h. & & & \\ & Ax & \leq & b \\ & x \geq 0, & & \end{array}$$

(LP-D)

$$\begin{array}{llll} & y^T b = w(y) & \longrightarrow & \min \\ f.h. & & & \\ & y^T A & \geq & c \\ & y \geq 0, & & \end{array}$$

Tétel (gyenge dualitás)

Tegyük fel, hogy x lehetséges megoldása a primál feladatnak, y pedig lehetséges megoldása a duál feladatnak. Ekkor $z(x) \leq w(y)$.

Következmény

Ha a primál feladat célfüggvénye felülről nem korlátos, akkor a duális feladatnak nincs lehetséges megoldása.

Következmény

Ha a duál feladat célfüggvénye alulról nem korlátos, akkor a primál feladatnak nincs lehetséges megoldása.

Tétel (erős dualitás)

Ha a primál-duál feladatpárból valamelyiknek létezik optimális megoldása, akkor mindkettőnek létezik, és az optimumértékek megegyeznek.

Bizonyítás vázlat:
Tegyük fel, hogy a (**??**) feladatnak létezik $\bar{x}$ optimális megoldása.
Tekintsük a következő egyenlőtlenség rendszert és vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\begin{array}{lcl} Ax - tb & \leq & 0 \\ -Ex & \leq & 0 \\ -t & \leq & 0 \end{array} \qquad \hat{A} := \begin{pmatrix} A & -b \\ -E & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{c}^T := (c^T, -c^T\bar{x})$$

Bebizonyítható, hogy tetszőleges $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$ esetén, ha $\hat{A}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \leq 0$, akkor $\hat{c}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \leq 0$ is fennáll. Ekkor a Farkas lemmából és a gyenge dualitási tételből már következik az állítás.

$$
\begin{array}{llll}
 & c^T x = w(y) & \longrightarrow & \min \\
f.h. & & & \\
 & [E, A](y, x) & = & b \\
 & y, x \geq 0, & (c \geq 0) &
\end{array}
$$

1. Ha az egyenlet jobboldala nemnegatív, akkor a bázismegoldás optimális. Ellenkező esetben a következő lépés.
2. Vegyük a negatív jobboldali elemek minimumát, majd ezek közül a legkisebb indexűt, jelölje ezt b_j. Ha ennek a sorában minden elem nemnegatív, akkor a feladatnak nincsen lehetséges megoldása. Egyébként a következő lépés.
3. Tekintsük a negatív a_{rj}, $r = 1, \ldots, m$ elemek esetén a $\frac{c_r}{-a_{rj}}$, $r = 1, \ldots, m$, $a_{rj} < 0$ alakú törtek minimumát. Azon indexek közül, ahol ez felvétetik, válasszuk a legkisebbet, jelölje ezt a_{kj}. Ezzel az elemmel hajtsuk végre a transzformációs formulák által előírtakat, majd folytassuk az első lépéssel.