

Operációkutatás előadáshoz **segédanyag**

Burai Pál

2014. február 27.

Szimplex módszer (kétfázisú szimplex algoritmus)

Egy adott standard alakú feladatból fogunk kanonikus alakú feladatot készíteni.

$$\begin{array}{ll} \text{(LP-M1)} & \begin{array}{ll} v^T \cdot 1 = w & \longrightarrow \quad \min \\ f.h. & \\ Ev + Ax & = \quad b \\ x \geq 0, & v \geq 0, \quad (b \geq 0) \end{array} \end{array}$$

Szimplex módszer (kétfázisú szimplex algoritmus)

Egy adott standard alakú feladatból fogunk kanonikus alakú feladatot készíteni.

$$\begin{array}{ll} \text{(LP-M1)} & \begin{array}{l} f.h. \quad v^T \cdot 1 = w \longrightarrow \min \\ Ev + Ax = b \\ x \geq 0, \quad v \geq 0, \quad (b \geq 0) \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(LP-M2)} & \begin{array}{l} f.h. \quad -(1 \cdot A)x = w - 1 \cdot b \longrightarrow \min \\ Ev + Ax = b \\ x \geq 0, \quad v \geq 0, \quad (b \geq 0) \end{array} \end{array}$$

Szimplex módszer (kétfázisú szimplex algoritmus)

Egy adott standard alakú feladatból fogunk kanonikus alakú feladatot készíteni.

$$\begin{array}{ll} \text{(LP-M1)} & \begin{array}{ll} f.h. & v^T \cdot 1 = w \longrightarrow \min \\ & Ev + Ax = b \\ & x \geq 0, \quad v \geq 0, \quad (b \geq 0) \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(LP-M2)} & \begin{array}{ll} f.h. & -(1 \cdot A)x = w - 1 \cdot b \longrightarrow \min \\ & Ev + Ax = b \\ & x \geq 0, \quad v \geq 0, \quad (b \geq 0) \end{array} \end{array}$$

Állítás

A (??) feladatnak pontosan akkor létezik lehetséges megoldása, ha a (??) feladatnak optimális megoldásán a célfüggvény nulla.

Szimplex módszer (kétfázisú szimplex algoritmus)

1. Konstruáljuk meg a szóban forgó standard alakú feladathoz a megfelelő (??) feladatot, és ezt oldjuk meg a szimplex algoritmussal. Ha az optimum értéke pozitív, akkor a feladatnak nincs lehetséges megoldása. Ellenkező esetben folytassuk a második lépéssel.

Szimplex módszer (kétfázisú szimplex algoritmus)

1. Konstruáljuk meg a szóban forgó standard alakú feladathoz a megfelelő (??) feladatot, és ezt oldjuk meg a szimplex algoritmussal. Ha az optimum értéke pozitív, akkor a feladatnak nincs lehetséges megoldása. Ellenkező esetben folytassuk a második lépéssel.
2. Ha az első lépés után kapott feladat bázisváltozói között nem szerepel mesterséges változó (v_i), akkor a harmadik lépés következik. Ellenkező esetben távolítsuk el a mesterséges változókat a bázisváltozók közül a következő szerint.

Szimplex módszer (kétfázisú szimplex algoritmus)

- 1 Konstruáljuk meg a szóban forgó standard alakú feladathoz a megfelelő (??) feladatot, és ezt oldjuk meg a szimplex algoritmussal. Ha az optimum értéke pozitív, akkor a feladatnak nincs lehetséges megoldása. Ellenkező esetben folytassuk a második lépéssel.
- 2 Ha az első lépés után kapott feladat bázisváltozói között nem szerepel mesterséges változó (v_i), akkor a harmadik lépés következik. Ellenkező esetben távolítsuk el a mesterséges változókat a bázisváltozók közül a következő szerint.
 - (i) Az eltávolítandó mesterséges változók közül vegyük az olyan legkisebb indexűt, amelynek egyenlete tartalmaz nullától különböző, természetes változóhoz tartozó együttthatót. Ha ilyen nincs, akkor folytassuk az eljárást a következő alponthall. Ha létezik ilyen tulajdonságú mesterséges változó, akkor a kiválasztott egyenletekben vegyük a nullától különböző, természetes változókhoz tartozó együttthatók közül a legkisebb indexűt. Ezzel, mint generáló elemmel hajtsuk végre a bázistranszformációs tételbeli átalakításokat. Ha az előállított új feladat bázisváltozói között nincs mesterséges változó, akkor folytassuk az eljárást a harmadik lépéssel. Ellenkező esetben az algoritmus ezen alpont ismételt végrehajtásával folytatódik.

Szimplex módszer (kétfázisú szimplex algoritmus)

- 1 Konstruáljuk meg a szóban forgó standard alakú feladathoz a megfelelő (??) feladatot, és ezt oldjuk meg a szimplex algoritmussal. Ha az optimum értéke pozitív, akkor a feladatnak nincs lehetséges megoldása. Ellenkező esetben folytassuk a második lépéssel.
- 2 Ha az első lépés után kapott feladat bázisváltozói között nem szerepel mesterséges változó (v_i), akkor a harmadik lépés következik. Ellenkező esetben távolítsuk el a mesterséges változókat a bázisváltozók közül a következő szerint.
 - (i) Az eltávolítandó mesterséges változók közül vegyük az olyan legkisebb indexűt, amelynek egyenlete tartalmaz nullától különböző, természetes változóhoz tartozó együttthatót. Ha ilyen nincs, akkor folytassuk az eljárást a következő alponttal. Ha létezik ilyen tulajdonságú mesterséges változó, akkor a kiválasztott egyenletekben vegyük a nullától különböző, természetes változókhoz tartozó együttthatók közül a legkisebb indexűt. Ezzel, mint generáló elemmel hajtsuk végre a bázistranszformációs tételbeli átalakításokat. Ha az előállított új feladat bázisváltozói között nincs mesterséges változó, akkor folytassuk az eljárást a harmadik lépéssel. Ellenkező esetben az algoritmus ezen alpont ismételt végrehajtásával folytatódik.
 - (ii) Hagyjuk el az eltávolítandó mesterséges változókat egyenleteikkel együtt a feltételrendszerből, majd folytassuk az eljárást a harmadik lépéssel.

Szimplex módszer (kétfázisú szimplex algoritmus)

- 1 Konstruáljuk meg a szóban forgó standard alakú feladathoz a megfelelő (??) feladatot, és ezt oldjuk meg a szimplex algoritmussal. Ha az optimum értéke pozitív, akkor a feladatnak nincs lehetséges megoldása. Ellenkező esetben folytassuk a második lépéssel.
- 2 Ha az első lépés után kapott feladat bázisváltozói között nem szerepel mesterséges változó (v_i), akkor a harmadik lépés következik. Ellenkező esetben távolítsuk el a mesterséges változókat a bázisváltozók közül a következő szerint.
 - (i) Az eltávolítandó mesterséges változók közül vegyük az olyan legkisebb indexűt, amelynek egyenlete tartalmaz nullától különböző, természetes változóhoz tartozó együttthatót. Ha ilyen nincs, akkor folytassuk az eljárást a következő alponttal. Ha létezik ilyen tulajdonságú mesterséges változó, akkor a kiválasztott egyenletekben vegyük a nullától különböző, természetes változókhoz tartozó együttthatók közül a legkisebb indexűt. Ezzel, mint generáló elemmel hajtsuk végre a bázistranszformációs tételbeli átalakításokat. Ha az előállított új feladat bázisváltozói között nincs mesterséges változó, akkor folytassuk az eljárást a harmadik lépéssel. Ellenkező esetben az algoritmus ezen alpont ismételt végrehajtásával folytatódik.
 - (ii) Hagyjuk el az eltávolítandó mesterséges változókat egyenleteikkel együtt a feltételrendszerből, majd folytassuk az eljárást a harmadik lépéssel.
- 3 Hagyjuk el a feltételrendszerből a mesterséges változókat és együttthatóikat. Az így kapott feltételrendszerhez vegyük hozzá az $\alpha + c^T x = z$ elsődleges célfüggvényt, majd a z célfüggvény egyenletéhez rendre adjuk hozzá a t . egyenlet $-c_{i_t}$ -szeresét, ahol i_t a t . egyenletben szereplő bázisváltozó indexe. Az így előállított lehetséges kanonikus alakú feladatot oldjuk meg szimplex algoritmussal.

Reddy Mikks Company

A Reddy Mikks vállalat házak külső és belső festésére gyárt festéket. A gyártáshoz kétféle alapanyagot használnak fel, jelölje ezeket A és B . Az anyagokból naponta korlátozott mennyiség áll rendelkezésre; 6 ill. 8 tonna. A belső festék egy tonnájához A -ból két tonna B -ből egy tonna szükséges, a B -hez egy ill. két tonna. A piackutatás azt mutatja, hogy a napi kereslet a belső festékre legfeljebb egy tonnával több, mint a külső festékre, továbbá, a belső festék iránti kereslet nem haladja meg a napi két tonnát. A nagykereskedelmi ár a külső festék esetén 3000\$/tonna a belső festék esetén pedig 2000\$/tonna. Maximalizáljuk a bevételt! Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a külső festék ára 5000\$/tonna!

Reddy Mikks Company

A Reddy Mikks vállalat házak külső és belső festésére gyárt festéket. A gyártáshoz kétféle alapanyagot használnak fel, jelölje ezeket A és B . Az anyagokból naponta korlátozott mennyiség áll rendelkezésre; 6 ill. 8 tonna. A belső festék egy tonnájához A -ból két tonna B -ből egy tonna szükséges, a B -hez egy ill. két tonna. A piackutatás azt mutatja, hogy a napi kereslet a belső festékre legfeljebb egy tonnával több, mint a külső festékre, továbbá, a belső festék iránti kereslet nem haladja meg a napi két tonnát. A nagykereskedelmi ár a külső festék esetén 3000\$/tonna a belső festék esetén pedig 2000\$/tonna. Maximalizáljuk a bevételt! Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a külső festék ára 5000\$/tonna!

Ha a célfüggvényben a $-\frac{c_1}{c_2}$ hányados $-\frac{1}{2}$ és -2 között marad, akkor az optimális megoldás nem változik, egyébként igen. Tehát ha az előbbi hányados a kijelölt intervallumban marad, akkor arra a megoldás nem "érzékeny".

(LP-S)

$$\begin{array}{ll} f.h. & c^T x + \alpha \longrightarrow \min \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \quad (b \geq 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(LP-S)} & \begin{array}{ll} c^T x + \alpha & \longrightarrow \min \\ \text{f.h.} & \\ Ax & = b \\ x \geq 0, & (b \geq 0) \end{array} \end{array}$$

Tétel

Tegyük fel, hogy (??)-ben az $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ változókhoz tartozó B mátrix reguláris, és $B^{-1}b \geq 0$. Ekkor a

$$\begin{array}{ll} \text{f.h.} & \begin{array}{ll} d^T B^{-1}b + (c - d^T B^{-1}A)^T x + \alpha & \longrightarrow \min \\ B^{-1}Ax & = B^{-1}b \\ x \geq 0, & (B^{-1}b \geq 0) \end{array} \end{array}$$

feladat (??)-el ekvivalens lehetséges kanonikus alakú feladat, ahol $d^T = (c_{i_1}, \dots, c_{i_m})$.

Jelöljük a v . transzformáció után előálló feladatot a következőképpen:

$$\begin{array}{ll} \text{(LP-S-}v\text{.)} & \begin{array}{ll} f.h. & (c^{(v)})^T x + \alpha^{(v)} \longrightarrow \min \\ & A^{(v)} x = b^{(v)} \\ & x \geq 0, \quad (b^{(v)} \geq 0) \end{array} \end{array}$$

Jelöljük a v . transzformáció után előálló feladatot a következőképpen:

$$\begin{array}{ll} \text{(LP-S-}v\text{.)} & f.h. \\ & (c^{(v)})^T x + \alpha^{(v)} \longrightarrow \min \\ & A^{(v)} x = b^{(v)} \\ & x \geq 0, \quad (b^{(v)} \geq 0) \end{array}$$

Tegyük fel, hogy v . feladat bázisváltozói $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$, B pedig az ezen változókhoz tartozó, az eredeti feladatban szereplő együtthatókból álló mátrix, továbbá $d_v^T = (c_{i_1}^{(0)}, \dots, c_{i_m}^{(0)})$. Ekkor a v . feladat megegyezik az alábbival:

$$\begin{array}{ll} f.h. & d_v^T B_v^{-1} b^{(0)} + (c^{(0)} - d_v^T B_v^{-1} A^{(0)})^T x + \alpha^{(0)} \longrightarrow \min \\ & B_v^{-1} A^{(0)} x = B_v^{-1} b^{(0)} \\ & x \geq 0, \quad (B_v^{-1} b^{(0)} \geq 0) \end{array}$$

Legyen $c_j^{(0)}$ az induló feladat célfüggvényének j . együtthatója.

1. **eset:** x_j nincs benne a bázisban. Ekkor $c_j^{(0)}$ nem eleme a d_v vektornak. Ekkor az utolsó feladatban a j . célfüggvény együttható: $c_j^{(0)} - d_v^T B_v^{-1} A_j$, ahol A_j a j . oszlopot jelöli. Ez a kifejezés nemnegatív, ellenkező esetben folytatódna az algoritmus. Így a

$$c_j^{(0)} \geq d_v^T B_v^{-1} A_j,$$

becslés adódik.

2. **eset:** Ha x_j benne van a bázisban, akkor $c_j^{(0)}$ eleme a d_v vektornak. Így a v . feladat minden nem nulla célfüggvény együtthatóját megváltoztathatja $c_j^{(0)}$ megváltozása. Így az összes célfüggvény együttható nemnegativitását vizsgálni kell.

A v . feladat jobb oldalának nemnegatívnak kell lennie. Azaz, a

$$B_v^{(-1)}b \geq 0$$

becslést kapjuk. Ebben a b vektor valamelyik komponensét változónak véve alsó ill. felső becsléseket kapunk. Ebben a tartományban maradva a nem változik az optimumhely. Ellenben az optimum értéke változik. Ezt is ki lehet számítani a megfelelő komponens függvényeként az

$$\alpha + d_v B_v^{-1} b$$

képlettel.

Minimum feladat esetén, a szóban forgó b_i komponens egy egységnyi növeléséből származó csökkenést a céfüggvény értékében *árnyékárnak* nevezzük, amennyiben az optimális bázis nem változik.

Legyenek $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges vektorok. Ekkor a $K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}$ halmazt az $a_1, \dots, a_m$ vektorok által generált kúpnek nevezzük. Könnyű látni, hogy K konvex részhalmaza $\mathbb{R}^n$ -nek.

Legyenek $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges vektorok. Ekkor a $K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}$ halmazt az $a_1, \dots, a_m$ vektorok által generált kúpnak nevezzük. Könnyű látni, hogy K konvex részhalmaza $\mathbb{R}^n$ -nek.

Lemma

Legyen $a \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $b \in K$ vektor, hogy

$$\|b - a\| = \min_{v \in K} \|v - a\|.$$

Ez K -ban a a -hoz legközelebbi elem. Belátható az is, hogy pontosan egy ilyen b vektor létezik, de erre a Farkas lemma bizonyításához nem lesz szükségünk.