

Operációkutatás előadáshoz **segédanyag**

Burai Pál

2014. február 27.

Tegyük fel, hogy a feltételben található A mátrix a következő alakú:

$$A = [E, B],$$

ahol E az $m \times m$ -es egységmátrix, B pedig egy $m \times (n - m)$ -es mátrix.
Ekkor az (??) feladat a következő alakot ölti:

$$\begin{array}{ll} \text{(LP-K)} & \begin{array}{ll} c^T x + \alpha & \longrightarrow \min \\ (c_1, \dots, c_m = 0) & \\ f.h. & \\ [E, B]x & = b \\ x \geq 0, & (b \geq 0) \end{array} \end{array}$$

melyet **kanonikus alakú lineáris programozási feladat**nak nevezünk.

Definíció (Megoldások)

A (LP-K) feladat feltételrendszerének eleget tevő vektorokat a (LP-K) **megengedett megoldás**aiknak nevezzük.

Definíció (Megoldások)

A (LP-K) feladat feltételrendszerének eleget tevő vektorokat a (LP-K) **megengedett megoldásainak** nevezzük.

Az $x = (b_1, \dots, b_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m \text{ db}})$ vektort **bázismegoldásnak**, az $x_1, \dots, x_m$ változókat pedig **bázisváltozóknak** nevezzük.

Definíció (Megoldások)

A (LP-K) feladat feltételrendszerének eleget tevő vektorokat a (LP-K) **megengedett megoldásainak** nevezzük.

Az $x = (b_1, \dots, b_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m \text{ db}})$ vektort **bázismegoldásnak**, az $x_1, \dots, x_m$

változókat pedig **bázisváltozóknak** nevezzük.

Ha valamelyik $b_i = 0$, $i = 1, \dots, m$, akkor a hozzá tartozó bázismegoldást **degenerált bázismegoldásnak** nevezzük.

Definíció (Megoldások)

A (LP-K) feladat feltételrendszerének eleget tevő vektorokat a (LP-K) **megengedett megoldásainak** nevezzük.

Az $x = (b_1, \dots, b_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m \text{ db}})$ vektort **bázismegoldásnak**, az $x_1, \dots, x_m$

változókat pedig **bázisváltozóknak** nevezzük.

Ha valamelyik $b_i = 0$, $i = 1, \dots, m$, akkor a hozzá tartozó bázismegoldást **degenerált bázismegoldásnak** nevezzük.

Definíció (Ekvivalencia)

Két standard alakú feladatot **ekvivalensnek** nevezünk, ha a megengedett megoldások halmazai megegyeznek és ezen a célfüggvények egyenlőek.

Ha a célfüggvények különbsége konstans a megengedett megoldások halmazán, akkor **gyengén ekvivalensek**.

Tétel (Optimalitás elegendő feltétele)

Ha a célfüggvény minden olyan együtthatója nemnegatív, amely nem bázisváltozóhoz tartozik, akkor a szóban forgó bázismegoldás egyben optimális is.

Tétel (Optimalitás elegendő feltétele)

Ha a célfüggvény minden olyan együtthatója nemnegatív, amely nem bázisváltozóhoz tartozik, akkor a szóban forgó bázismegoldás egyben optimális is.

Tétel (Feltétel a nem-megoldhatóságra)

Ha a célfüggvény valamely nem bázisváltozóhoz tartozó negatív együtthatója olyan, hogy a feltételi mátrixban a neki megfelelő oszlopban nincs pozitív elem, akkor a célfüggvény alulról nem korlátos a megengedett megoldások halmazán.

Tétel (Optimalitás elegendő feltétele)

Ha a célfüggvény minden olyan együtthatója nemnegatív, amely nem bázisváltozóhoz tartozik, akkor a szóban forgó bázismegoldás egyben optimális is.

Tétel (Feltétel a nem-megoldhatóságra)

Ha a célfüggvény valamely nem bázisváltozóhoz tartozó negatív együtthatója olyan, hogy a feltételi mátrixban a neki megfelelő oszlopban nincs pozitív elem, akkor a célfüggvény alulról nem korlátos a megengedett megoldások halmazán.

Példa

$$\begin{array}{rcccccccl} x_1 & & -2x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & 4 & \\ & x_2 & & -x_4 & +x_5 & = & 3 & \\ & & x_i & \geq 0 & & & i = 1, \dots, 5 & \\ \hline & & -x_3 & +x_4 & -2x_5 & = z(x) & \rightarrow \min & \end{array}$$

Tétel (Bázistranszformációs tétel)

Ha a célfüggvény minden nem bázisváltozóhoz tartozó negatív együtthatója olyan, hogy a feltételi mátrixban a neki megfelelő oszlopban van pozitív elem, akkor megadható egy, az eredetivel ekvivalens, kanonikus alakú feladat, amelynek bázismegoldásán a célfüggvény értéke nem nő. Amennyiben a megfelelő b_i pozitív, akkor az új bázismegoldáson a célfüggvény értéke szigorúan kisebb.

Tétel (Bázistranszformációs tétel)

Ha a célfüggvény minden nem bázisváltozóhoz tartozó negatív együtthatója olyan, hogy a feltételi mátrixban a neki megfelelő oszlopban van pozitív elem, akkor megadható egy, az eredetivel ekvivalens, kanonikus alakú feladat, amelynek bázismegoldásán a célfüggvény értéke nem nő. Amennyiben a megfelelő b_i pozitív, akkor az új bázismegoldáson a célfüggvény értéke szigorúan kisebb.

Tegyük fel, hogy $c_j < 0$ és legyen $a_{kj} = \min \{ \frac{b_r}{a_{rj}} \mid a_{rj} > 0, r = 1, \dots, m \}$.

Az így kiválasztott a_{kj} elemet **generáló elem**nek nevezzük.

Jelölje a feltételt leíró egyenletrendszer i . sorát r_i , a célfüggvény sorát pedig z . Ekkor a transzformációs formulák a következők:

$$r'_k = \frac{1}{a_{kj}} r_k,$$

$$r'_i = r_i - \frac{a_{ij}}{a_{kj}} r_k \quad i = 1, \dots, m, \quad i \neq k,$$

$$z' = z - \frac{c_j}{a_{kj}} r_k.$$

- ❶ Ha a célfüggvény nem tartalmaz olyan negatív együtthatót, amely nem bázisváltozóhoz tartozik, akkor a bázismegoldás optimális. Ha ez nem áll, akkor a második lépés következik.
- ❷ Tekintsük a negatív célfüggvényegyütthatók minimumát, majd ezek közül a legkisebb indexűt jelölje c_j . Ha $a_{rj} \leq 0$, $r = 1, \dots, m$, akkor a célfüggvény alulról nem korlátos a megengedett megoldások halmozán, így vége az eljárásnak. Ha ez nem áll, akkor a harmadik lépés következik.
- ❸ Tekintsük a pozitív a_{rj} , $r = 1, \dots, m$ elemek esetén a $\frac{b_r}{a_{rj}}$, $r = 1, \dots, m$, $a_{rj} > 0$ alakú törtek minimumát. Azon indexek közül, ahol ez felvétetik, válasszuk a legkisebbet, jelölje ezt a_{kj} . Ezzel az elemmel hajtsuk végre a transzformációs formulák által előírtakat, majd folytassuk az első lépéssel.

Szimplex algoritmus, Ciklizálás elkerülése

Lemma

A bázistranszformációs tétel bizonyításában leírtak végrehajtása után az új feladat alakja

$$\begin{array}{rcl} QA x & = & Qb \\ x \geq 0 & & (Qb \geq 0) \end{array}$$

$$\alpha + d^T Qb + (c^T - d^T QA)x = z(x) \rightarrow \min,$$

ahol

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & & \frac{-a_{1j}}{a_{kj}} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ & & \frac{1}{a_{kj}} & & \\ & & \vdots & 1 & \\ & & & & \ddots \\ \frac{-a_{mj}}{a_{kj}} & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad d = (0, \dots, 0, c_j, 0, \dots, 0)$$

Tétel

Legyenek a v . feladat bázisváltozói $x_{v_1}, \dots, x_{v_m}$, B_v az ezen változókhoz tartozó eredeti feladatban szereplő együtthatókból álló mátrix, és $d_v = (c_{v_1}, \dots, c_{v_m})$, akkor a v . feladat az alábbi alakot ölti:

$$\begin{array}{rcl} B_v^{-1}Ax & = & B_v^{-1}b \\ x \geq 0 & & (B_v^{-1}b \geq 0) \end{array}$$

$$\alpha + d_v^T B_v^{-1}b + (c^T - d_v^T B_v^{-1}A)x = z(x) \rightarrow \min,$$

Tétel

Legyenek a v . feladat bázisváltozói $x_{v_1}, \dots, x_{v_m}$, B_v az ezen változókhoz tartozó eredeti feladatban szereplő együtthatókból álló mátrix, és $d_v = (c_{v_1}, \dots, c_{v_m})$, akkor a v . feladat az alábbi alakot ölti:

$$\begin{array}{rcl} B_v^{-1}Ax & = & B_v^{-1}b \\ x \geq 0 & & (B_v^{-1}b \geq 0) \end{array}$$

$$\alpha + d_v^T B_v^{-1}b + (c^T - d_v^T B_v^{-1}A)x = z(x) \rightarrow \min,$$

Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$, ekkor x **lexikografikusan kisebb vagy egyenlő, mint** y , ha az $y - x$ vektor első nem nulla komponense pozitív.

Tétel

Legyenek a v . feladat bázisváltozói $x_{v_1}, \dots, x_{v_m}$, B_v az ezen változókhoz tartozó eredeti feladatban szereplő együtthatókból álló mátrix, és $d_v = (c_{v_1}, \dots, c_{v_m})$, akkor a v . feladat az alábbi alakot ölti:

$$\begin{array}{rcl} B_v^{-1}Ax & = & B_v^{-1}b \\ x \geq 0 & & (B_v^{-1}b \geq 0) \end{array}$$

$$\alpha + d_v^T B_v^{-1}b + (c^T - d_v^T B_v^{-1}A)x = z(x) \rightarrow \min,$$

Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$, ekkor x **lexikografikusan kisebb vagy egyenlő, mint** y , ha az $y - x$ vektor első nem nulla komponense pozitív. Lexikografikusan szigorúan nagyobb/kisebb, lexikografikusan pozitív/nemnegatív/stb., lexikografikusan pozitív mátrix, halmaz lexikografikus minimuma. Tulajdonságai.

Lexikografikus szimplex algoritmus

- ➊ Az első két lépés megegyezik a szimplex algoritmus első két lépésével.

Lexikografikus szimplex algoritmus

- 1 Az első két lépés megegyezik a szimplex algoritmus első két lépésével.
- 2 Válasszuk ki a

$$h_{k_t} = (b_{k_t}, a_{k_t1}, \dots, a_{k_t1}), \quad t = 1, \dots, s$$

alakú vektorokból a lexikografikusan legkisebbet. Ez jelöli ki a generáló elemet. Itt a $\frac{b_{k_t}}{a_{k_tj}}$, $t = 1, \dots, s$ hányadosok a korábban jelzett minimum tulajdonsággal rendelkeznek.

Lexikografikus szimplex algoritmus

- 1 Az első két lépés megegyezik a szimplex algoritmus első két lépésével.
- 2 Válasszuk ki a

$$h_{k_t} = (b_{k_t}, a_{k_t1}, \dots, a_{k_t1}), \quad t = 1, \dots, s$$

alakú vektorokból a lexikografikusan legkisebbet. Ez jelöli ki a generáló elemet. Itt a $\frac{b_{k_t}}{a_{k_tj}}$, $t = 1, \dots, s$ hányadosok a korábban jelzett minimum tulajdonsággal rendelkeznek.

Állítás

A lexikografikus szimplex algoritmus véges sok lépésben véget ér.