

Operációkutatás előadáshoz **segédanyag**

Burai Pál

2014. február 27.

Fourier-Motzkin elimináció lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldására.



Jean Baptiste Joseph **Fourier**
(1768. március 21. – 1830.
május 16.) francia matematikus
és fizikus.

Fourier-Motzkin elimináció lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldására.



Jean Baptiste Joseph **Fourier**
(1768. március 21. – 1830.
május 16.) francia matematikus
és fizikus.



Theodore Samuel **Motzkin**
(1908. március 26. –
1970. december 15.)
izraeli-amerikai matematikus.

Fourier-Motzkin elimináció lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldására.



Jean Baptiste Joseph **Fourier**
(1768. március 21. – 1830.
május 16.) francia matematikus
és fizikus.



Theodore Samuel **Motzkin**
(1908. március 26. –
1970. december 15.)
izraeli-amerikai matematikus.

$$x + y - z \geq 2$$

$$2x - y \geq 3$$

$$-x + 2y + z \geq 0$$

Fourier-Motzkin elimináció lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldására.



Jean Baptiste Joseph **Fourier**
(1768. március 21. – 1830.
május 16.) francia matematikus
és fizikus.



Theodore Samuel **Motzkin**
(1908. március 26. –
1970. december 15.)
izraeli-amerikai matematikus.

$$\begin{array}{rcl} x + y - z \geq 2 & \implies & x + y - 2 \geq z \\ 2x - y \geq 3 & & x - 2y \leq z \\ -x + 2y + z \geq 0 & & 2x - y \geq 3 \end{array}$$

Fourier-Motzkin elimináció lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldására.



Jean Baptiste Joseph **Fourier**
(1768. március 21. – 1830.
május 16.) francia matematikus
és fizikus.



Theodore Samuel **Motzkin**
(1908. március 26. –
1970. december 15.)
izraeli-amerikai matematikus.

$$\begin{array}{rcl} x + y - z \geq 2 & \implies & x + y - 2 \geq z \implies x + y - 2 \geq x - 2y \\ 2x - y \geq 3 & & x - 2y \leq z \implies 2x - y \geq 3 \\ -x + 2y + z \geq 0 & & 2x - y \geq 3 \end{array}$$

Fourier-Motzkin elimináció lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldására.



Jean Baptiste Joseph **Fourier**
(1768. március 21. – 1830.
május 16.) francia matematikus
és fizikus.



Theodore Samuel **Motzkin**
(1908. március 26. –
1970. december 15.)
izraeli-amerikai matematikus.

$$\begin{array}{rclclcl} x + y - z \geq 2 & \implies & x + y - 2 \geq z & \implies & x + y - 2 \geq x - 2y \\ 2x - y \geq 3 & & x - 2y \leq z & & 2x - y \geq 3 \\ -x + 2y + z \geq 0 & & 2x - y \geq 3 & & \end{array}$$

És így tovább. Végül azt kapjuk, hogy $x \geq \frac{11}{6}$, melyből visszafejthetjük a többi változót is.

Lineáris programozás kezdetei.



Leonyid Vitaljevics **Kantorovics**
(1912. január 19. - 1986. április
7.) szovjet-orosz matematikus és
közgazdász. 1975-ben Tjalling
Koopmans holland közgazdással
megosztva közgazdasági
Nobel-emlékdíjban részesült.

Lineáris programozás kezdetei.



Leonyid Vitaljevics **Kantorovics** (1912. január 19. - 1986. április 7.) szovjet-orosz matematikus és közgazdász. 1975-ben Tjalling Koopmans holland közgazdással megosztva közgazdasági Nobel-emlékdíjban részesült.



George Bernard **Dantzig** (1914. november 8. – 2005. május 13.) amerikai matematikus. Jelentő eredményeket ért el az operációkutatás, a közgazdaságtan és a statisztika területén. A **szimplex algoritmus** felfedezője.

Lineáris programozás polinom időben megoldható.



Leonid Genrikhovich **Khachiyan**
(1952. május 3. - 2005. április
29.) amerikai-orsz matematikus.
Az ellipszoid algoritmus
felfedezője, amely az első polinom
idű algoritmus lineáris
programozási feladatok
megoldására.

Lineáris programozás polinom időben megoldható.



Leonid Genrikhovich **Khachiyan**
(1952. május 3. - 2005. április 29.) amerikai-orosz matematikus.
Az ellipszoid algoritmus felfedezője, amely az első polinom idő algoritmus lineáris programozási feladatok megoldására.



Narendra Krishna **Karmarkar**
(1957 -) indiai matematikus, a róla elnevezett Karmarkar algoritmus felfedezője. Ez az első, gyakorlatban is használható, polinom időben futó algoritmus lineáris programozási feladatok megoldására.

Giapetto faüzeme

Giapetto fajtáékokat készítő üzeme kétféle játékot készít. Fakatonákat és vonatokat. Egy fakatona ára 27\$, az anyagköltsége 10\$, a ráfordított munka költsége pedig 14\$. Ugyanezek az adatok a vonatra vonatkozóan 21\$, 9\$ és 10\$. Mindket játék elkészítéséhez kétfajta szakmunkára van szükség, összeszerelésre és polírozásra. A katonához az előbbiből 2, az utóbbiból 1 óra szükséges, ugyanezek az adatok a vonat esetében 1 – 1 óra. Minden héten 80 órányi összeszerelés és 100 órányi polírozás áll rendelkezésre, a nyersanyag pedig korlátlan mennyiségben. A vonatokból bármennyit el lehet adni a piacon, de a katonákból csak 40-et hetente. Maximalizáljuk Giapetto heti nyereségét!

Giapetto faüzeme

Giapetto fajtákokat készítő üzeme kétféle játékot készít. Fakatonákat és vonatokat. Egy fakatona ára 27\$, az anyagköltsége 10\$, a ráfordított munka költsége pedig 14\$. Ugyanezek az adatok a vonatra vonatkozóan 21\$, 9\$ és 10\$. Mindket játék elkészítéséhez kétfajta szakmunkára van szükség, összeszerelésre és polírozásra. A katonához az előbbiből 2, az utóbbiból 1 óra szükséges, ugyanezek az adatok a vonat esetében 1 – 1 óra. Minden héten 80 órányi összeszerelés és 100 órányi polírozás áll rendelkezésre, a nyersanyag pedig korlátlan mennyiségben. A vonatokból bármennyit el lehet adni a piacon, de a katonákból csak 40-et hetente. Maximalizáljuk Giapetto heti nyereségét!

A modellalkotás

- 1 Döntési változók meghatározása.

Giapetto faüzeme

Giapetto fajtákokat készítő üzeme kétféle játékot készít. Fakatonákat és vonatokat. Egy fakatona ára 27\$, az anyagköltsége 10\$, a ráfordított munka költsége pedig 14\$. Ugyanezek az adatok a vonatra vonatkozóan 21\$, 9\$ és 10\$. Mindket játék elkészítéséhez kétfajta szakmunkára van szükség, összeszerelésre és polírozásra. A katonához az előbbiből 2, az utóbbiból 1 óra szükséges, ugyanezek az adatok a vonat esetében 1 – 1 óra. Minden héten 80 órányi összeszerelés és 100 órányi polírozás áll rendelkezésre, a nyersanyag pedig korlátlan mennyiségben. A vonatokból bármennyit el lehet adni a piacon, de a katonákból csak 40-et hetente. Maximalizáljuk Giapetto heti nyereségét!

A modellalkotás

1. Döntési változók meghatározása.
2. Célfüggvény meghatározása.

Giapetto faüzeme

Giapetto fajtákokat készítő üzeme kétféle játékot készít. Fakatonákat és vonatokat. Egy fakatona ára 27\$, az anyagköltsége 10\$, a ráfordított munka költsége pedig 14\$. Ugyanezek az adatok a vonatra vonatkozóan 21\$, 9\$ és 10\$. Mindket játék elkészítéséhez kétfajta szakmunkára van szükség, összeszerelésre és polírozásra. A katonához az előbbiből 2, az utóbbiból 1 óra szükséges, ugyanezek az adatok a vonat esetében 1 – 1 óra. Minden héten 80 órányi összeszerelés és 100 órányi polírozás áll rendelkezésre, a nyersanyag pedig korlátlan mennyiségben. A vonatokból bármennyit el lehet adni a piacon, de a katonákból csak 40-et hetente. Maximalizáljuk Giapetto heti nyereségét!

A modellalkotás

1. Döntési változók meghatározása.
2. Célfüggvény meghatározása.
3. Feltelek meghatározása.

Jones farmer

Jones farmernek el kell döntenie, hogy hány hold kukoricát és hány hold búzát fog vetni. Egy hold búza 25 véka termést hoz és heti 10 munkaóra szükséges a megműveléséhez. Ugyanezek a számok a kukoricánál 10 és 4. Egy véka búza 4\$-t adható el, míg a kukorica 3\$-t. Jonesnak 7 hold föld és heti 40 munkaóra áll rendelkezésre. Egy kormányrendelet értelmében legalább 30 véka kukoricát kell termelnie ebben az évben. Maximalizáljuk a farmer nyereségét.

Példák lineáris programozási feladatokra

Jones farmer

Jones farmernek el kell döntenie, hogy hány hold kukoricát és hány hold búzát fog vetni. Egy hold búza 25 véka termést hoz és heti 10 munkaóra szükséges a megműveléséhez. Ugyanezek a számok a kukoricánál 10 és 4. Egy véka búza 4\$-t adható el, míg a kukorica 3\$-t. Jonesnak 7 hold föld és heti 40 munkaóra áll rendelkezésre. Egy kormányrendelet értelmében legalább 30 véka kukoricát kell termelnie ebben az évben. Maximalizáljuk a farmer nyereségét.

Bevco cég

A Bevco cég egy Oranj nevű narancs ízesítésű üdítőitalt gyárt narancs-szóda és narancslé keverésével. Egy deka narancs-szóda fél deka cukrot és egy mg. C-vitamint, egy deka narancslé pedig negyed deka cukrot és három mg C-vitamint tartalmaz. A Bevrónak egy deka narancs-szóda két centbe kerül, egy deka narancslé pedig három centbe. A Bevco marketing osztálya elhatározta, hogy minden 10 dekás Oranj-palack legalább 20 mg C-vitamint és legfeljebb 4 deka cukrot tartalmazhat. Minimalizáljuk a költségeket a fentiek figyelembe vétele mellett.

Példák lineáris programozási feladatokra

Bloomington Sörfőzde

A Bloomington Sörfőzde pilzenit és angol világos sört állít elő. A pilzeni eladási ára 5\$ hordónként, a angol világosé 2\$ hordónként. Egy hordó pilzeni előállításához 5 font kukorica és 2 font komló szükséges. Egy hordó világos sörhöz pedig 2 font kukorica és 1 font komló kell. Rendelkezésre áll 60 font kukorica és 25 font komló. Fogalmazzunk meg egy LP-t, amellyel maximalizálható a bevétel! Oldja meg az LP-t grafikusan!

Jones farmer süteménye

Jones farmer kétféle süteményt süt (csokoládésat és vaníliásat), hogy kiegészítse a jövedelmét. Egy csokoládés sütemény 1 dollárért adható el, a vaníliás pedig 50 centért. Minden csokoládés süteménybe kell 4 tojás, és 20 percig kell sütni. Minden vaníliás süteménybe kell egy tojás, és 40 percig kell sütni. Rendelkezésre áll 8 óra sütési idő és 30 tojás. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek megoldása maximalizálja Jones farmer bevételét! Ezután oldja meg a feladatot grafikusan!

Reklámköltség minimalizálása

A Dorian Auto cég luxusautókat és teherautókat gyárt. A vállalat úgy gondolja, hogy vásárlói legnagyobb valószínűséggel magas jövedelmű nők és férfiak. Ennek a fogyasztói csoportnak a megnyerésére a cég egy komoly tévé-hirdetési kampányt indított és elhatározta, hogy 1 perces reklámhelyeket vásárol kétféle típusú tévéműsorban: vidám műsorokban és futballmeccsek alatt. Minden kabarébeli reklámot 7 millió magas jövedelmű nő és 2 millió magas jövedelmű férfi néz. Minden futballmeccs alatti reklámot 2 millió magas jövedelmű nő és 12 millió magas jövedelmű férfi néz. Az egyperces kabarébeli reklám 50 ezer dollárba kerül, és az egyperces futballmeccs alatti reklám ára 100 ezer dollár. A cég azt szeretné, ha hirdetéseit legalább 28 millió magas jövedelmű nő és 24 millió magas jövedelmű férfi látná. Alkalmazzuk a lineáris programozást arra, hogy a Dorian cég a reklámcéljait minimális költségek mellett érje el!

Általános alakú lineáris programozási feladat

Legyenek n, m, j, k, l természetes számok, $A_1 \in \mathbb{R}^{j \times n}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ adott mátrixok, $b_1 \in \mathbb{R}^j$, $b_2 \in \mathbb{R}^k$, $b_3 \in \mathbb{R}^l$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ adott oszlopvektorok, ekkor a következőt

$$\begin{array}{ll} c^T x + \alpha & \longrightarrow \min \text{ vagy } \max \\ \text{f.h.} & \\ \text{(LP)} \quad A_1 x & \geq b_1 \\ & A_2 x \leq b_2 \\ & A_3 x = b_3 \end{array}$$

általános alakú lineáris programozási feladatnak, a

(LP-S)

Általános alakú lineáris programozási feladat

Legyenek n, m, j, k, l természetes számok, $A_1 \in \mathbb{R}^{j \times n}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ adott mátrixok, $b_1 \in \mathbb{R}^j$, $b_2 \in \mathbb{R}^k$, $b_3 \in \mathbb{R}^l$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ adott oszlopvektorok, ekkor a következőt

$$\begin{array}{ll} c^T x + \alpha & \longrightarrow \min \text{ vagy } \max \\ \text{f.h.} & \\ \text{(LP)} & \begin{array}{ll} A_1 x & \geq b_1 \\ A_2 x & \leq b_2 \\ A_3 x & = b_3 \end{array} \end{array}$$

általános alakú lineáris programozási feladatnak, a

$$\begin{array}{ll} c^T x + \alpha & \longrightarrow \min \\ \text{f.h.} & \\ \text{(LP-S)} & \begin{array}{ll} Ax & = b \\ x \geq 0, & (b \geq 0) \end{array} \end{array}$$

optimalizálási feladatot pedig **standard alakú lineáris programozási feladatnak** nevezzük.

- 1 Ha a feladat maximum feladat, akkor a celfüggvényt szorozzuk meg -1 -gyel.

Standard alakra hozás

- 1 Ha a feladat maximum feladat, akkor a célfüggvényt szorozzuk meg -1 -gyel.
- 2 Ha b_i negatív, akkor szorozzuk meg a szóban forgó sort -1 -gyel.

Standard alakra hozás

- 1 Ha a feladat maximum feladat, akkor a célfüggvényt szorozzuk meg -1 -gyel.
- 2 Ha b_i negatív, akkor szorozzuk meg a szóban forgó sort -1 -gyel.
- 3 Az egyenlőtlenségekhez(ből) adjunk hozzá (vonjunk le) egy nemnegatív változót.

Standard alakra hozás

- 1 Ha a feladat maximum feladat, akkor a célfüggvényt szorozzuk meg -1 -gyel.
- 2 Ha b_i negatív, akkor szorozzuk meg a szóban forgó sort -1 -gyel.
- 3 Az egyenlőtlenségekhez(ből) adjunk hozzá (vonjunk le) egy nemnegatív változót.
- 4 Azon változókat, melyekre nincs nemnegativitási feltétel, írjuk fel két nemnegatív változó összegeként.

A fentieket végrehajtva, tetszőleges (??)-t standard alkra hozhatunk, majd azt megoldva, az eredeti feladat megoldását is visszafejthetjük. A standard alakú feladatra már van megoldási algoritmusunk. Ez a kétfázisú szimplex módszer.

Először a második fázissal foglalkozunk, amely speciális standard alakú feladatok megoldására használható.