

Numerikus matematika

Irodalom: Stoyan Gisbert, Numerikus matematika mérnököknek és programozóknak, Typotex, 2007

- ▶ Lebegőpontos számok
- ▶ Normák, kondíciós számok
- ▶ Lineáris egyenletrendszerek
- ▶ Legkisebb négyzetes közelítések
- ▶ Interpoláció
- ▶ Sajátérték feladatok
- ▶ Nemlineáris egyenletek, egyenletrendszerek
- ▶ Integrálközelítések

Lebegőpontos számok

A nemnulla lebegőpontos számok alakja, nevezetes lebegőpontos konstansok $(M_\infty, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$, adott (a, t, k_+, k_-) jellemzők esetén a lebegőpontos számok száma.

Tizes számrendszerben adott szám felírása kettes számrendszerbeli lebegőpontos számként (szabályos kerekítés és levágás esetén is). Adott szám jobb- és baloldali lebegőpontos szomszédjának meghatározása.

Példák

1. $a = 2$, $t = 4$, $k_+ = 3$, $k_- = -3$ számábrázolási jellemzők mellett mi lesz a $2/3$ lebegőpontos alakja szabályos kerekítés, illetve levágás esetén? Adjon meg olyan x és y pozitív lebegőpontos számokat, melyekkel $x + y < M_\infty$, de $x + y$ nem lebegőpontos szám! Adjon meg olyan $x \neq y$ pozitív lebegőpontos számokat, melyekkel $fl(x - y) = 0$ (ahol $fl(w)$ jelöli az w -hez rendelt lebegőpontos számot).
2. $a = 2$, $t = 4$, $k_+ = 3$, $k_- = -3$ esetén mennyi a pozitív lebegőpontos számok száma? Adja meg a legnagyobb ábrázolható számot, a legkisebb normalizált pozitív lebegőpontos számot, az 1 jobb- és baloldali szomszédját!

Normák, kondíciós számok

Az 1 –, 2 –, ∞ –vektornormák definíciója. Az indukált mátrixnormák definíciója és tulajdonságai. Az 1 –, 2 –, ∞ –mátrixnormák kiszámítási módja.

A kondíciós szám definíciója és tulajdonságai. Hibás jobboldallal adott lineáris egyenletrendszer megoldásának relatív hibájáról szóló egyenlőtlenség. Perturbációs lemma.

Konkrét vektorok, mátrixok normáinak kiszámítása. Konkrét mátrix kondíciós számának kiszámítása adott mátrixnorma esetén.

Lineáris egyenletrendszerek, mártixok felbontásai

LU-, LDU-, LDL^T -, Cholesky-, PLU-felbontás fogalma.

Konkrét lineáris egyenletrendszer megoldása LU-, Cholesky-felbontással.

Példa

Oldja meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert LU-felbontással!
Határozza meg az A márix determinánsát!

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -6 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & -2 & 2 \\ 3 & -16 & -11 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Legkisebb négyzetek módszere

Lineáris regresszió feladatának megfogalmazása, a megoldás felírása. Mikor oldható meg egyértelműen a feladat?

A legkisebb négyzetes közelítés feladata általánosan. A Gauss-féle normálegyenlet, a normálegyenlet megoldhatósága, mikor létezik egyértelmű megoldás, az esetleges szingularitás jelentése és kezelése.

Konkrét esetben a négyzetesen legjobban közelítő modell paramétereinek meghatározása.

Példák

1. Határozza meg az alábbi adatokra négyzetesen legjobban illeszkedő egyenes egyenletét!

t_i	0	1	1	2	3
f_i	0	1	2	2	3

2. Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = a + \frac{b}{t}$$

alakú függvényt!

t_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
f_i	8	6	4	$\frac{5}{2}$

Interpoláció

Lagrange-interpoláció: a feladat megfogalmazása, a megoldhatóságáról szóló tétel. Osztott differenciák fogalma, a Lagrange-polinom Newton-alakja.

Hermite-interpoláció: a feladat megfogalmazása, a megoldhatóságáról szóló tétel.

Konkrét adatok esetén a Lagrange-, illetve Hermite-polinom meghatározása.

Példák.

1. Határozza meg a $(-2, 23)$, $(-1, -3)$, $(1, -1)$, $(2, 15)$, $(3, 113)$ adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!
2. Határozza meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

x_i	-1	1	2
$f(x_i)$	-1	3	-1
$f'(x_i)$	-6	2	-21

Integrálközelítések

Egyszerű és összetett érintő, trapéz és Simpson-képlet. A hiba becslése. Összetett képletek konvergenciájáról szóló tétel.

Példa

Hány részintervallumra kell beosztani az alapintervallumot, ha azt szeretnénk, hogy a

$$\int_{-3}^0 \sqrt{x+4} dx$$

integrált összetett trapéz képlettel közelítve a hiba kisebb legyen, mint 10^{-2} ?

Sajátérték feladatok

Gersgorin-tétel.

Hatvány-módszer, inverz-iteráció: a feladat megfogalmazása, a módszer leírása, a numerikus megvalósítás jellemzői. A konvergenciáról szóló tétel. Rayleigh-hányados. Az eltolás szerepe.

Példa

Mit mondhatunk a Gersgorin-tétel alapján az alábbi mátrix sajátértékeiről és a mátrix invertálhatóságáról? Milyen közelítő sajátérték tartozik a $v = (0; 0; 0; 1; 2)^T$ közelítő sajátvektorhoz?

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 7 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Nemlineáris egyenletek, egyenletrendszerek

Nemlineáris egyenletek: felező-, húr-, Newton-, szelőmódszer, fixpont-iteráció. A feladat megfogalmazása, a módszer leírása. A Newton-módszer lokális konvergenciatétele. A fixpont-iteráció konvergenciájáról szóló tétel.

Nemlineáris egyenletrendszerek: fixpont-iteráció, Newton-módszer. A feladat megfogalmazása, a módszer leírása, a fixpont-iteráció konvergenciájáról szóló tétel.

Példák

1. Igazolja, hogy a $2x^3 - 10x + 5 = 0$ egyenletnek van gyöke a $[0, 1]$ intervallumban! Ennek a gyöknek a közelítésére valamely $x_0 \in [0, 1]$ pontból indítva az

$$x_{k+1} = \frac{2x_k^3 + 5}{10}, \quad k = 0, 1, \dots$$

iterációt szeretnénk alkalmazni. Mit mondhatunk az eljárás konvergenciájáról?

2. Hogyan közelíthetjük $\sqrt{a}$ értékét Newton-iterációval?