

## Sajátérték feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

(a)

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Mutassuk meg, hogy ha  $\lambda$  az  $A$  mátrix sajátértéke, akkor  $|\lambda| \leq \|A\|$ , ahol a norma tetszőleges vektornorma által indukált mátrixnorma.

3. Mit tudunk mondani az alábbi mátrixokról a Gersgorin-tétel alapján?

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -1 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -11 \end{pmatrix}$$

4. Mit tudunk mondani az alábbi mátrix sajátértékeinek elhelyezkedéséről?

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Mit mondhatunk az  $A$  invertálhatóságáról? Legyen  $v = (-3, 7, 2, 5, 1)^T$ . Melyik  $\lambda$  esetén lesz minimális az  $Av - \lambda v$  euklideszi normája?

5. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Legyen  $v = (-5, 0, 4)^T$  az  $A$  egyik sajátvektorának közelítése. Melyik  $\lambda$  esetén lesz minimális az  $Av - \lambda v$  euklideszi normája? Ez a  $\lambda$  sajátértéke-e  $A$ -nak?

6. Alkalmazzuk a hatványmódszert az alábbi mátrixokra!

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -10 & 2 & -2 \\ 15 & 1 & 7 \\ 21 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

### MATLAB feladatok

1. A Matlab `eig` függvénye segítségével határozza meg a 4. feladatban adott  $A$  mátrix sajátértékeit, sajátvektorait. A `dot` függvény segítségével számítsa ki a  $v$  vektorhoz tartozó Rayleigh-hányadost.
2. A Matlab `eig` függvénye segítségével számítsa ki a 6. feladatban megadott első két mátrix sajátértékeit, sajátvektorait.