Normák, kondíciószámok

1. Mutassa meg, hogy a lineáris normált tér bármely x, y elemére

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|$$

teljesül!

2. $\|A\|_1 =?$, $\|A\|_\infty =?$, $\|A\|_2 =?$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Az alábbi A mátrix esetén $\|A\|_1 =?$, $\|A\|_\infty =?$ Adjon meg egy-egy olyan $x \neq 0$ vektort, mellyel $\|Ax\|_1 = \|A\|_1\|x\|_1$, illetve $\|Ax\|_\infty = \|A\|_\infty\|x\|_\infty$ teljesül!

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 9 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Mutassa meg, hogy az egységmátrix normája 1 minden indukált mátrixnormában!

5. Legyen $n > 1$ és tekintsük $\mathbb{R}^{n\times n}$-en az ú.n. Frobenius-normát:

$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Származtatható-e ez a mátrixnorma valamilyen vektornormából?

6. Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mutassa meg, hogy

$$\|A\| = \max_{i,j} |a_{ij}|$$

normát definiál $\mathbb{R}^{n\times n}$-en! Lehet-e ez a norma vektornorma által indukált?

7. Legyen λ az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix egy tetszőleges sajátértéke. Mutassa meg, hogy

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

teljesül minden indukált mátrixnorma esetén.

8. Számítsa ki $\mathrm{cond}_\infty(A)$-t az alábbi mátrixok esetén!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \ (a \in \mathbb{R}); \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

9. Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket, hasonlítsa össze a megoldásokat!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{pmatrix}$$

10. Oldja meg meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{pmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy b helyett $b + \Delta b$ ismert,

$$b + \Delta b = \begin{pmatrix} 1.98 \\ 1.98 \end{pmatrix}.$$

Oldja meg az $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$ lineáris egyenletrendszert! Számítsa ki a $\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$, $\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$ relatív hibákat! Számísa ki az A kondíciószámát (∞-normában)!

11. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reguláris mátrix, $0 \neq c \in \mathbb{R}$. $\mathrm{cond}(cA) =$?

MATLAB feladatok

1. Írjon 1-1 függvényt az 1- és ∞-mátrixnormák számítására!

2. Számítsa ki a 6×6-os Hilbert-mátrix kondíciószámát 2- és ∞-normában! (Használja a `cond` és `hilb` MATLAB-függvényeket!) Legyen B egy 6×6-os véletlen mátrix (használja a `rand` függvényt), számítsa ki B kondíciószámát is (végezzen több kísérletet)!

3. Állítsa elő a következő $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ mátrixot és $b \in \mathbb{R}^{100}$ vektort, és a ,,backslash” operátort használva oldja meg az $Ax = b$ egyenletrendszert (azaz alkalmazza az $x = A\backslash b$ parancsot). Ezután perturbálja a b vektort, pl. 1 helyett legyen $b(100) = 1.00001$ és oldja meg a rendszert újra. Számítsa ki az A kondíciószámát (adjon egy egzakt képletet is $\mathrm{cond}_\infty(A)$-ra).

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ -1, & \text{ha } i < j, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases} \qquad b = (-98, -97, \ldots, 0, 1)^T.$$

4. Írjon egy MATLAB-függvényt, mely adott $s \in (0,1)$ esetén előállítja az
$$A = A(s) = \frac{1}{s}\begin{pmatrix} 1+s^2 & 1-s^2 \\ 1-s^2 & 1+s^2 \end{pmatrix}$$
mátrixot, továbbá kiszámítja az $\|A\|_\infty$ és $\mathrm{cond}_\infty(A)$ értékeket!

5. Írjon egy MATLAB-függvényt, mely adott $s \in (0,1)$ és $\varepsilon > 0$ esetén megoldja az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ahol A az előző feladatban adott mátrix, $b = (1,1)^T$, majd megoldja az egyenletrendszert akkor is, ha a b vektor $\delta b = (\varepsilon, -\varepsilon)^T$ hibával terhelten adott, továbbá kiszámítja a megoldás relatív hibáját (maximum-normában)!