Lebegőpontos számok

Legyen $a > 1$ a számábrázolás alapja, $t > 1$ a mantissza hossza, k_- és k_+ a karakterisztika alsó és felső korlátja.

1. Írjuk fel a legnagyobb ábrazolható lebegőpontos számot (M_∞), a legkisebb normalizált pozitív ábrázolható számot (ε_0), illetve az 1 jobb- és baloldali szomszédját!

2. Adott a, t, k_- és k_+ mellett hány darab pozitív lebegőpontos szám írható fel?

3. $a = 2$, $t = 4$ esetén írjuk fel az alábbi számok lebegőpontos alakját!

$$\frac{3}{16}, \quad -\frac{11}{4}, \quad 3.25, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{15}{128}$$

4. $a = 2$, $t = 4$, $k_- = -3$, $k_+ = 3$ esetén írjuk fel az alábbi számokhoz rendelt lebegőpontos számot szabályos kerekítés, ill. levágás esetén!

$$0.1, \quad 0.4, \quad 0.6, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{27}, \quad e.$$

5. $a = 2$, $t = 4$, $k_- = -3$, $k_+ = 2$ esetén ábrázoljuk számegyenesen az összes pozitív lebegőpontos számot!

6. Legyen $k_+ > t$. Melyik a legkisebb természetes szám, amely nem lebegőpontos?

7. Legyen $a = 2$, $t = 4$, $k_- = -4$, $k_+ = 4$. Jelölje $fl(x)$ az x-hez rendelt lebegőpontos számot. Keressünk olyan x, $y > 0$ lebegőpontos számokat, melyekre

a) $x \neq y$ és $fl(x - y) = 0$,

b) $fl(x + y) = x$,

c) $x + y \in [-M_\infty, M_\infty]$, de $x + y$ nem lebegőpontos szám!

8. $a = 2$, $t = 4$, $k_+ = 2$ és $k_- = -3$ számábrázolási jellemzők mellett az

$$\frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{16} = 0$$

másodfokú egyenlet gyökeit akarjuk géppel kiszámolni az

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

megoldóképlettel. Feltételezve, hogy a gép az egyes műveletek eredményét pontosan számolja, majd az eredményekhez hozzárendel egy lebegőpontos számot, hány különböző gyököt találunk?

MATLAB feladatok

1. Számítógépén vizsgálja meg mi a $0.4 - 0.5 + 0.1 == 0$ logikai kifejezés értéke. Adjon magyarázatot az eredményre!

2. Határozza meg számítógépén kísérletileg ε_1 és ε_0 értékét! A kapott értékeket hasonlítsa össze az `eps` függvény alkalmas értékeivel!

3. Határozza meg azt a legkisebb pozitív egész számot, melyet számítógéppel 10^{20}-hoz hozzáadva az eredmény különbözni fog 10^{20}-tól.

4. Az
$$\left(\frac{1}{5x} + 1\right) x - x = 0.2$$
egyenlőség elméletileg minden $x \neq 0$ esetén igaz. Az $x = 1, \ldots, 100$ értékekre számítógépén tesztelje a fenti egyenlőség teljesülését!

5. Legyen $x = 1/3$. Ciklusban futtassuk le néhányszor (≈ 40) az $x = 4x - 1$ utasítást, ami elméletileg az $x = 1/3$ értéket adja vissza. Mit tapasztalunk a gyakorlatban?

6. Az alábbi algoritmus elméletileg minden $x \geq 0$ esetén az x eredeti értékét adja vissza. Vizsgálja meg mi történik a gyakorlatban, ha az algoritmust $x = 1000$, $x = 100$ kezdőértékkel futtatja! Mi az oka a tapasztalt jelenségnek?

   for $i = 1 : 60$

   $\quad x = \sqrt{x}$

   end

   for $i = 1 : 60$

   $\quad x = x^2$

   end

7. Ismert, hogy $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Számítsa ki az $\frac{e^x-1}{x}$ hányados értékét egyre csökkenő x értékek esetén! ($x = 1$ kezdőértékkel x-et 40-szer, 200-szor, 2000-szer felezgetve írassa ki a kifejezés értékét!) Magyarázza meg a tapasztalt jelenséget!

8. Adott az $x_1, \ldots, x_n$ minta esetén a tapasztalati szórásnégyzet kiszámításának két lehetséges módja:
$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \quad \text{és} \quad s_n^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right)$$
Az $x = (10000, 10001, 10002)$ minta esetén egyszeres pontosságot használva ($x = \texttt{single}([10000, 10001, 10002])$) számítsa ki a tapasztalati szórásnégyzetet mindkét képlettel!