

Nemlineáris egyenletek és egyenletrendszerek

1. Közelítse a $3x = \cos(x)$ egyenlet $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumbeli gyökét fixpont-iterációval! Mit mondhatunk a módszer konvergenciájáról?
2. Közelítse a $3x^3 - 12x + 4 = 0$ egyenlet $[0, 1]$ intervallumbeli gyökét fixpont-iterációval! Vizsgálja meg az iteráció konvergenciáját!
3. Közelítse az $\ln(x) = 2 - x$ egyenlet gyökét!
4. Mutassa meg, hogy az $f(x) = e^x - 4x^2$ függvénynek van zérushelye a $[0, 1]$ intervallumban! Igazolja, hogy az

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}e^{\frac{x_n}{2}}$$

iteráció tetszőleges $x_0 \in [0, 1]$ kezdőpont esetén tart ehhez a gyökhöz!

5. Közelítse $\sqrt{5}$ értékét Newton-módszerrel!
6. Közelítse Newton-módszerrel az $e^x = \sin(x)$ egyenlet gyökét (gyökeit)!
7. Vizsgálja meg a Newton-módszer viselkedését, ha azt valamilyen $x_0 \neq 0$ kezdőpontból indítva az $f(x) = 0$ egyenlet megoldására alkalmazzuk, ahol

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{ha } x \geq 0, \\ -\sqrt{-x}, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

8. Közelítse az $x^3 - 3x - 2 = 0$ egyenlet gyökét Newton-módszerrel az $x_0 = 1.5$ pontból indulva!
9. Közelítse az $x^3 - 3x + 2 = 0$ egyenlet gyökét Newton-módszerrel az $x_0 = 1.5$ pontból indulva! Ugyanilyen x_0 esetén alkalmazza az

$$x_{k+1} = x_k - 2 \cdot \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

iterációt! Mit tapasztal?

10. Vizsgálja meg az $x^3 - x = 0$ egyenlet megoldására az

(a) $x_{k+1} = x_k^3$

(b) $x_{k+1} = (x_k)^{1/3}$

iterációkat a $[-1, 1]$ intervallumon!

11. Tekintsük a

$$\begin{aligned} -4x + \cos(2x - y) &= 3 \\ -3y + \sin x &= 2 \quad x, y \in [-\pi, \pi] \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Mit mondhatunk az egyenletrendszer megoldhatóságáról, illetve az

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos(2x_k - y_k) \\ y_{k+1} &= -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sin x_k \end{aligned}$$

($k = 0, 1, 2, \dots$) eljárás konvergenciájáról?

12. Közelítse az

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1x_1^2 + 0.1x_2^2 + 0.1x_3^2 \\ 0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_3 \\ 0.1x_1x_2x_3 + 0.3 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 2]$ -beli gyökét fixpont-iterációval! Vizsgálja meg az eljárás konvergenciáját!