Sajátérték feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

(a)
$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)
$$\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Mutassuk meg, hogy ha λ az A mátrix sajátértéke, akkor $|\lambda| \leq \|A\|$, ahol a norma tetszőleges vektornorma által indukált mátrixnorma.

3. Bizonyítsuk be, hogy az A mátrix pontosan akkor szinguláris, ha a 0 sajátértéke!

4. Mutassuk meg, hogy ha a reguláris A mátrixnak λ sajátértéke, akkor $1/\lambda$ sajátértéke A^{-1}-nek. Mi lesz az A^{-1} mátrix $1/\lambda$ sajátértékéhez tartozó sajátvektor?

5. Bizonyítsuk be, hogy ha az A mátrixnak λ sajátértéke, akkor λ^2 sajátértéke A^2-nek!

6. Bizonyítsuk be, hogy ha az A mátrixnak λ sajátértéke, akkor az $A - cE$ ($c \in \mathbb{R}$) mátrixnak $\lambda - c$ sajátértéke! Mi lesz az $A - cE$ mátrix $\lambda - c$ sajátértékéhez tartozó sajátvektor?

7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix szigorúan domináns főátlójú, akkor reguláris!

8. Mit tudunk mondani az alábbi mátrixokról a Gersgorin-tétel alapján?

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -1 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -11 \end{pmatrix}$$

9. Mit tudunk mondani az alábbi mátrix sajátértékeinek elhelyezkedéséről?

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Mit mondhatunk az A regularitásáról? Legyen $v = (-3, 7, 2, 5, 1)^T$. Melyik λ esetén lesz minimális az $Av - \lambda v$ euklideszi normája?

10. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Legyen $v = (-5, 0, 4)^\top$ az A egyik sajátvektorának közelítése. Melyik λ esetén lesz minimális az $Av - \lambda v$ euklideszi normája? Ez a λ sajátértéke-e A-nak?

11. A Gersgorin-tétel és alkalmas hasonlósági transzformácó segítségével bizonyítsuk be, hogy az A mátrix reguláris!

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

12. Alkalmas hasonlósági transzformáció és a Gersgorin-tétel segítségével bizonyítsuk be, hogy az A mátrix sajátértékei valósak!

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -11 \end{pmatrix}$$

13. Alkalmazzuk a hatvány-módszert az alábbi mátrixokra!

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -10 & 2 & -2 \\ 15 & 1 & 7 \\ 21 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$