

Közelítő integrálás

1. Közelítse az alábbi integrálokat összetett trapéz-, ill. Simpson-formulával úgy, hogy a megadott intervallumot m részintervallumra osztja! Becsülje meg a közelítés hibáját!

(a)

$$\int_0^{1.5} x \sin x dx, \quad m = 5,$$

(d)

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx, \quad m = 4,$$

(b)

$$\int_1^2 \ln(x^2) dx, \quad m = 5,$$

(e)

(c)

$$\int_0^1 e^{x^2-1} dx, \quad m = 5,$$

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x) dx, \quad m = 3.$$

2. Közelítse a fenti integrálokat összetett trapéz-, ill. Simpson-formulával úgy, hogy m -et abból a feltételből határozza meg, hogy a hiba kisebb legyen, mint $0.5 \cdot 10^{-4}$!

3. Közelítse $\ln(2)$ értékét összetett trapéz-formulával úgy, hogy a hiba kisebb legyen, mint $0.5 \cdot 10^{-3}$!

4. $\int_0^1 f(x)\sqrt{x}dx$ típusú integrálokat szeretnénk közelíteni $\sum_{i=1}^3 a_i f(x_i)$ alakú kvadraturával, ahol $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 1$. Határozza meg a kvadratura súlyait úgy, hogy a kvadratura pontos legyen minden legfeljebb másodfokú polinom esetén!

5. Az $\int_{-1}^1 f(x)dx$ integrál közelítésére az

$$a_0 \cdot f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + a_1 \cdot f(0) + a_2 \cdot f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

kvadraturát szeretnénk használni. Határozza meg az a_0, a_1, a_2 együtthatókat úgy, hogy a kvadratura pontos legyen minden legfeljebb másodfokú polinom esetén! Vizsgálja meg, hogy magasabb fokú polinomok esetén hogy viselkedik a kvadratura!

6. Csebisev polinomok segítségével számítsa ki az alábbi integrál értékét!

$$\int_{-1}^1 \frac{4x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

7. Közelítse az alábbi integrál értékét!

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} dx$$

8. Közelítse az alábbi integrál értékét összetett trapéz képlettel úgy, hogy az intervallumot két részintervallumra osztja, illetve 3 pontra támaszkodó Legendre kvadraturával! Hasonlítsa össze a kapott értékeket az integrál pontos értékével!

$$\int_{-1}^1 \ln(x+3) dx$$

9. Adjon meg a $\Delta = \{(x, y) : 0 \leq x, y, x+y \leq 1\}$ tartományon olyan integrálközelítő összeget, mellyel minden kétváltozós, legfeljebb elsőfokú polinom integrálját pontosan tudjuk számolni!

P1. Közelítse az 1. feladatban adott integrálokat a Matlab `trapz` és `integral` függvénye segítségével.

P2. Közelítse az alábbi integrálokat a Matlab `integral` függvényének segítségével.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

P3. Közelítse az alábbi integrálokat a Matlab `integral2` függvényének segítségével.

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx dy \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy dx$$