

Legkisebb négyzetek módszere

1. Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes egyenletét!

$$(a) \begin{array}{c|c|c|c|c|c} t_i & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f_i & 1 & 2 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{3}{2} \end{array}$$

$$(e) \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} t_i & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 \\ \hline f_i & \frac{3}{4} & 1 & 2 & \frac{9}{4} & 3 & 3 \end{array}$$

$$(b) \begin{array}{c|c|c|c|c|c} t_i & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline f_i & \frac{3}{2} & 2 & 2 & \frac{5}{2} & 3 \end{array}$$

$$(f) \begin{array}{c|c|c|c|c|c} t_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f_i & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}$$

$$(c) \begin{array}{c|c|c|c|c} t_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f_i & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} \end{array}$$

$$(g) \begin{array}{c|c|c|c|c|c} t_i & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f_i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}$$

$$(d) \begin{array}{c|c|c|c|c|c} t_i & -1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f_i & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}$$

$$(e) \begin{array}{c|c|c|c|c|c} t_i & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline f_i & -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{array}$$

2. Határozza meg az alábbi pontokat négyzetesen legjobban közelítő másodfokú polinomot!

$$(a) \begin{array}{c|c|c|c|c} t_i & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & -1 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}$$

$$(b) \begin{array}{c|c|c|c|c|c} t_i & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline f_i & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

3. Az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$\sum_{i=1}^n c_i t^{i-1}$$

alakú függvényt keresünk. Milyen n értéket érdemes választani? Határozza meg az ehhez tartozó polinomot!

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} t_i & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ \hline f_i & 3 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}$$

4. Közelítse az alábbi adatokat

$$F(t) = x_1 + x_2 \cos(\pi t) + x_3 \sin(\pi t)$$

alakú modellel!

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} t_i & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ \hline y_i & 1 & -2 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} \end{array}$$

Mit tapasztal, ha a fenti modellel a következő adatokat közelíti?

t_i	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
f_i	1	-2	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{2}$

5. Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = a + \frac{b}{t}$$

alakú függvényt!

t_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
f_i	8	6	4	$\frac{5}{2}$

6. Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = a + b \cdot \sin^2\left(\frac{t\pi}{2}\right)$$

alakú függvényt!

t_i	0	$\frac{1}{2}$	1	2
f_i	$\frac{1}{2}$	1	1	0

7. Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = a + \frac{b}{\sin^2(\pi t)}$$

alakú függvényt!

t_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
f_i	$\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{3}{2}$

P1. A **polyfit** függvényt használva határozza meg a

t_i	0	0.5	0.5	1	1.2	1.5	1.8	2	2.3	2.5
f_i	1.5	1.7	1.8	2.1	2.1	2.3	2.5	2.4	2.7	2.7

adatokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes egyenletét! Ábrázolja az adatokat és az illesztett egyenest (használja a **plot** és **polyval** függvényeket)!

P2. Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő legfeljebb másodfokú polinomot!

t_i	1.1	1.2	1.4	1.5	1.6	1.7	1.9	2	2.2	2.3	2.4	2.6
f_i	0.47	0.44	0.46	0.49	0.56	0.64	0.85	1	1.34	1.54	1.76	2.26

Ábrázolja az adatokat, illetve az illesztett függvényt!

P3. Egy fél méter magas, téglatest alakú víztartályt egyenletes sebességgel töltenek fel vízzel. Amikor a tartályban 3 cm magasan áll a víz Péter elhatározza, hogy megméri a vízszint változását az idő függvényében. A következő méréseket végezte:

t_i (min)	0	2	4	6	8	10	12
f_i (cm)	3	4	5	5.5	6.5	7	8

Becsülje meg milyen magasan lesz a víz 20 perccel azután, hogy Péter elindította a mérést! Mikor indították el a tartály feltöltését? Kb mikor lesz tele a tartály?

P4. Határozza meg a

t_i	0.5	0.6	0.7	0.9	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
f_i	8.1	7	6.3	5.3	5	4.52	4.14	3.9	3.7	3.51

adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = a + \frac{b}{t}$$

alakú függvényt a **polyfit** függvény használatával, ill. az

```
[L U]=lu(A'*A);
x=L\ (A'*f); x=U\ x;
```

utasításokat alkalmazva! !

P5. Határozza meg a

t_i	0	0.3	0.5	0.6	0.8	1	1.1	1.3	1.5	1.6	1.8	1.9	2
f_i	1.9	2.4	2.2	1.9	1.2	0.5	0.2	0	0.2	0.5	1.2	1.6	1.9

adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = a + b \cdot \cos(\pi t) + c \cdot \sin(\pi t)$$

alakú függvényt!

P6. Havi középhőmérsékletek Budapesten (50 év átlaga)

x_i	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
f_i	-1.7	0.1	5.2	10.3	15.8	18.9	21.1	20.3	16.1	10.2	4.2	0.5

Határozza meg a táblázat adatait legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő

$$F(t) = a + b \cos\left(2\pi \frac{t-14}{365}\right)$$

alakú modell paramétereit!

P7. A `pinv` függvényt használva számítsa ki az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrix pszeudoinverzét! Hasonlítsa ezt össze az $\text{inv}(A'A)*A'$ kifejezés értékével!

P8. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Számítsa ki $x = \text{pinv}(A)*b$ értékét! Mutassa meg, hogy x az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer minimális euklideszi normájú megoldása!

Ortogonalis polinomok

1. Ortogonalizálja a $[-1, 1]$ intervallum fölött az $1, x, x^2, x^3$ függvényeket a $\varrho(x) \equiv 1$ súlyfüggvényre nézve!

2. Bizonyítsa be, hogy a $[0, 1]$ intervallumon a $\varrho(x) = x^{-1/2}$ súlyfüggvényhez tartozó ortogonalis polinomok $S_n(x) = P_{2n}(\sqrt{x})$ alakúak, ahol $P_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, a $[-1, 1]$ intervallumon értelmezett Legendre polinomok.

3. Mutassa meg, hogy a $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ függvények eleget tesznek a köv. háromtagú rekurzióknak!

$$T_0 \equiv 0, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, \dots$$

4. Igazolja, hogy T_n -nek n különböző gyöke van a $[-1, 1]$ intervallumban!

5. Írja fel az $x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 2$ polinomot Csebisev polinomok lineáris kombinációjaként!

6. Legyen $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, és definiáljuk az $(\cdot, \cdot)$ belsőszorzatot a következő módon:

$$(f, g) := \sum_{i=0}^4 f(x_i)g(x_i),$$

ahol $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ortogonalizálja az $1, x, x^2$ függvényeket erre a belsőszorzatra nézve!