

Lagrange interpoláció

1. Határozzuk meg az alábbi pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

- (a) $(-3, -6), (-2, -17), (-1, -8), (1, -2), (2, 19),$
- (b) $(-3, -31), (-2, -8), (1, 1), (2, 22),$
- (c) $(-2, -13), (-1, -4), (1, 2),$
- (d) $(-2, -5), (-1, 3), (0, 1), (2, 15),$
- (e) $(-1, 4), (1, 2), (2, 10), (3, 40),$
- (f) $(-2, 38), (-1, 5), (1, -1), (2, -10), (3, -7),$
- (g) $(-2, -33), (-1, -2), (1, 6), (2, 7), (3, -18),$
- (h) $(-3, -209), (-2, -43), (-1, -1), (1, -1), (2, -19).$

2. Határozzuk meg a $(-2, -6), (0, 4), (1, -3), (2, -10)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot! Határozzuk meg azt a minimális fokszámú polinomot, amely az előző pontokon kívül áthalad a $(-1, 2)$ ponton is!

3. Közelítsük az $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$ függvényt a $[-1, 1]$ intervallumon másodfokú polinommal a $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ pontokra támaszkodva! Becsüljük meg a közelítés hibáját!

4. Az alábbi táblázatban egy másodfokú p polinom helyettesítési értékei láthatóak, melyek közül pontosan egy hibás. Határozza meg a hibás értéket, helyettesítse a helyes értékkel és adja meg a p polinomot!

x_i	-2	-1	0	1	2	3
p_i	15	9	5	3	2	5

5. Becsüljük meg az interpoláció maximális hibáját az alappontok által kifeszített intervallumon, ha az $f(x) = e^{-x}$ függvényt közelítjük az $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ alappontokra támaszkodva!

6. Jelölje $\ell_j(x), j = 0, 1, \dots, n$, az $x, \dots, x_n$ ($x_i \neq x_k$, ha $i \neq k$) pontokhoz tartozó Lagrange-féle alappolinomokat, azaz:

$$\ell_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{j=0}^n \ell_j(x) \equiv 1, \quad \text{és}$$

$$\sum_{j=0}^n x_j^k \ell_j(x) = x^k, \quad \text{ha } 0 \leq k \leq n.$$

7. Igazoljuk, hogy ha f kétszer folytonosan differenciálható, akkor lineáris interpoláció esetén az interpoláció hibájára

$$|f(x) - L_1(x)| \leq \frac{M_2}{8} h^2, \quad a \leq x \leq b$$

teljesül, ahol a és b a két alappont, $h = b - a$ és $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$.

8. Milyen sűrűn kell megadni az $f(x) = \cos(x)$ függvény értékeit az $[0, \pi]$ intervallumon, hogy szakaszonként lineárisan interpolálva a hiba kisebb legyen mint $0.5 \cdot 10^{-4}$?

9. Horner-algoritmus segítségével határozza meg $p(x^*)$ értékét!

a) $p(x) = 2x^5 - 3x^4 - x^3 + 5x - 2$, és $x^* = -2$,

b) $p(x) = -x^6 + 4x^5 - 2x^4 + x^2 + 3x - 4$, és $x^* = 2$.

P1. Rajzoltassa ki az

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

függvényt a $[-1, 1]$ intervallum fölött! A **polyfit** és **polyval** függvények használatával ugyanezen az ábrán jelenítse meg a `linspace(-1, 1, n)`, $n = 3, 5, 7, 9, 11$ alappontokhoz tartozó Lagrange-polinomot!

Készítsük el $n = 11$ esetén a Lagrange-polinomot abban az esetben is, amikor az alappontok az ún. Csebisev-pontok:

$$x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right), \quad i = 1, \dots, n$$

Hermite interpoláció, spline-interpoláció

1. Határozzuk meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

(a)

x_i	-1	1	2
$f(x_i)$	4	6	94
$f'(x_i)$	9	17	213

(b)

x_i	-2	-1	1
$f(x_i)$	13	3	7
$f'(x_i)$	-31	14	18
$f''(x_i)$		-40	

(c)

x_i	-1	1	2
$f(x_i)$	4	2	91
$f'(x_i)$	5	9	269
$f''(x_i)$		42	

(d)

x_i	-1	1	2
$f(x_i)$	-1	3	23
$f'(x_i)$	2	2	59

(e)

x_i	-2	-1	1
$f(x_i)$	-10	-2	2
$f'(x_i)$	-20	10	10
$f''(x_i)$		-16	

(f)

x_i	-1	1	2
$f(x_i)$	7	-1	-35
$f'(x_i)$	-20	-4	-98

(g)

x_i	-2	-1	1
$f(x_i)$	45	0	6
$f'(x_i)$	-190	5	29
$f''(x_i)$		2	

2. Legyen az f valós függvény differenciálható az x_0 pontban. Hermite-interpoláció segítségével írjuk fel az f függvény x_0 -beli érintőjének egyenletét!

3. Írjuk fel az $f(x) = \cos x - x^2 - 3x$ függvény $x = 0$ pontbeli érintőjének egyenletét!

4. Írjuk fel az $x_0, f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ adatokra illeszkedő Hermite-polinomot!

5. Határozzuk meg azt a folytonosan differenciálható, szakaszonként harmadfokú

$$H(x) = \begin{cases} H_1(x), & \text{ha } x \in [-1, 1] \\ H_2(x), & \text{ha } x \in (1, 3] \end{cases}$$

polinomot, melyre $H(-1) = 4, H(1) = 6, H(3) = 12, H'(-1) = -3, H'(1) = 13, H'(3) = 9$ teljesül!

6. Határozzuk meg azt a folytonosan differenciálható, szakaszonként harmadfokú

$$H(x) = \begin{cases} H_1(x), & \text{ha } x \in [-1, 1] \\ H_2(x), & \text{ha } x \in (1, 3] \end{cases}$$

polinomot, melyre $H(-1) = 4, H(1) = 6, H(3) = 12, H'(-1) = -3, H'(1) = \alpha, H'(3) = 9$ teljesül, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$!

7. Az előző feladatban határozzuk meg α értékét úgy, hogy $H(x)$ kétszer folytonosan differenciálható legyen!

P1. Határozzuk meg az alábbi adatokhoz tartozó harmadfokú spline-t!

x_i	-2	-1	0	1	2	3
S	4	1	7	4	12	9
S'	15					8

P2. Rajzoltassuk ki közös ábrán az alábbi 3 függvényt:

- az

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

függvényt a $[-1, 1]$ intervallumon

- az f függvény

$$-1, -0.8, -0.6, \dots, 0.6, 0.8, 1$$

egyenlő lépésközű (ekvidisztáns) alappontokhoz tartozó Lagrange-polinomját

- az f függvény

$$-1, -0.8, -0.6, \dots, 0.6, 0.8, 1$$

alappontokhoz tartozó harmadfokú spline polinomját. (A végpontokban a deriváltértékeket tekintjük 0-nak.)