

Lineáris egyenletrendszerek megoldása, mátrixok felbontása

1. Határozza meg az alábbi mátrixok inverzét Gauss-Jordan eliminációval!

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

(c)

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

(d)

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Oldja meg LU-felbontással az $Ax = b$ egyenletrendszert! Határozza meg az A mátrix determinánsát!

(a)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix},$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ -2 & -7 & 3 \\ 2 & 12 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix},$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 1 \\ 9 & 5 & -4 & 1 \\ -6 & -9 & 16 & 17 \\ 3 & 4 & -8 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -13 \\ 42 \\ -25 \\ 19 \end{pmatrix},$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -4 & -5 & -3 \\ -2 & -5 & a-6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5-2a \end{pmatrix}, \quad (a \in \mathbb{R}),$$

(e)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix},$$

(f)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(g)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \\ -4 & 8 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix},$$

(h)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -6 & -5 & 3 \\ -4 & 18 & 3 & 2 \\ -3 & 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 21 \\ -41 \\ 83 \\ 52 \end{pmatrix},$$

(i)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & -5 & 6 & -3 \\ -4 & 5 & 8 & -5 \\ 2 & 6 & -22 & 15 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ -15 \\ 34 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

3. Oldja meg az $Ax = b$ és $Ax = c$ lineáris egyenletrendszereket LU-felbontással!

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 12 & -6 & 2 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -28 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

4. Határozza meg az alábbi mátrixok PLU-felbontását! Számítsa ki a mátrixok determinánsát!

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -28 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -24 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(e)

$$E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(f)

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Vizsgálja meg mi történik, ha egy $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ mátrixot balról, ill. jobbról megszorunk egy

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

diagonális mátrixszal!

6. Határozza meg az alábbi mátrixok Cholesky-felbontását! Számítsa ki a mátrixok determinánsát!

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \\ -6 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

(d)

$$D = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 9 \\ -3 & 17 & -7 \\ 9 & -7 & 11 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 9 \\ -9 & 29 & -31 \\ 9 & -31 & 37 \end{pmatrix},$$

(e)

$$E = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 12 & -4 \\ -8 & 13 & -3 & 2 \\ 12 & -3 & 14 & -11 \\ -4 & 2 & -11 & 21 \end{pmatrix},$$

(c)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -4 & 9 & -13 \\ 6 & -13 & 21 \end{pmatrix},$$

(f)

$$F = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & a^2 + 10 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

7. Oldja meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert Cholesky-felbontással!

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 6 & -4 \\ -2 & 17 & -7 & -11 & -10 \\ -2 & -7 & 9 & 1 & 10 \\ 6 & -11 & 1 & 14 & -1 \\ -4 & -10 & 10 & -1 & 19 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ 20 \\ -21 \\ 43 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 & 3 \\ -6 & 8 & 6 & -6 \\ -6 & 6 & 9 & -10 \\ 3 & -6 & -10 & 18 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 36 \\ -38 \\ -47 \\ 58 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 & 2 & -4 \\ -4 & 20 & -10 & -10 & -8 \\ -2 & -10 & 14 & 3 & 13 \\ 2 & -10 & 3 & 7 & 2 \\ -4 & -8 & 13 & 2 & 24 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -24 \\ 52 \\ -3 \\ -34 \\ 29 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 3 \\ -6 & 20 & -14 \\ 3 & -14 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -21 \\ 34 \\ -34 \end{pmatrix}$$

8. Határozza meg az alábbi mátrixok QR-felbontását!

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 9 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix},$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 23 \end{pmatrix},$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 11 \end{pmatrix},$$

(e)

(c)

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 2 & -7 & \frac{39}{4} \\ 2 & -3 & -\frac{11}{4} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Vizsgálja meg a Jacobi-, illetve Seidel-iteráció konvergenciáját az alábbi mátrixok esetén!

(a)

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

(e)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 3 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

P1. Tekintse az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-17} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ennek megoldásához először alkalmazza a

```
c=A(2,2)-A(1,2)*A(2,1)/A(1,1);
d=b(2)-b(1)*A(2,1)/A(1,1);
x(2)=d/c
x(1)=(b(1)-A(1,2)*x(2))/A(1,1)
```

utasításokat (amik a Gauss-eliminációnak felelnek meg a 2×2 -es $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer esetén), majd ezek után a $x = A \backslash b$ utasítást. Magyarázza meg a tapasztalt jelenséget!

P2. Legyen $A = \text{pascal}(10)$ (azaz A a 10×10 -es Pascal mátrix, ami egy szimmetrikus, pozitív definit mátrix), $x = \text{ones}(10, 1)$ és definiálja a b vektort úgy, hogy $b = A * x$. Oldja meg az $Ax = b$ rendszert az **lu**, **chol** és $A \backslash b$ utasításokat alkalmazva (használjon „format long”-ot)!

P3. Legyen A az alábbi tridiagonális mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_n & a_n \end{pmatrix}$$

Mutassa meg, hogy az A mátrix LU-felbontása

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \ell_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_{n-1} & v_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & u_n \end{pmatrix}$$

alakú! Írjon egy Matlab függvényt, mely elkészíti a felbontást úgy, hogy bemenetként az $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_{n-1})$, $(c_2, \dots, c_n)$ vektorokat kapja, ki-menetként pedig az $(u_1, \dots, u_n)$, $(v_1, \dots, v_{n-1})$, $(\ell_2, \dots, \ell_n)$ adja vissza! (A biztosan 0 elemeket ne tárolja és ne is számítsa!)