Normák, kondíciószámok

1. Mutassa meg, hogy a lineáris normált tér bármely x, y elemére

$$| \, \|x\| - \|y\| \, | \leq \|x - y\|$$

teljesül!

2. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reguláris mátrix, $\| \cdot \|$ norma $\mathbb{R}^n$-en. Bizonyítsa be, hogy az

$$\|x\|_* = \|Ax\|$$

függvény normát definiál $\mathbb{R}^n$-en!

3. Igazolja, hogy $\mathbb{R}^n$-en teljesülnek az alábbi összefüggések!

$$\begin{aligned} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2, \quad & \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \quad & \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty \quad & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

4. $\|A\|_1 =?$, $\|A\|_\infty =?$, $\|A\|_2 =?$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. Az alábbi A mátrix esetén $\|A\|_1 =?$, $\|A\|_\infty =?$ Adjon meg egy-egy olyan $x \neq 0$ vektort, mellyel $\|Ax\|_1 = \|A\|_1\|x\|_1$, illetve $\|Ax\|_\infty = \|A\|_\infty\|x\|_\infty$ teljesül!

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 9 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

6. Bizonyítsa be, hogy az egységmátrix normája 1 minden indukált mátrixnormában!

7. Bizonyítsa be, hogy vektornorma által indukált mátrixnormában

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

teljesül minden $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén.

8. Mutassa meg, hogy nem létezik olyan mátrixnorma, melyben

$$\|AB\| = \|A\| \cdot \|B\|, \qquad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

teljesül.

9. Legyen $n > 1$ és tekintsük $\mathbb{R}^{n\times n}$-en az ú.n. Frobenius-normát:

$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Származtatható-e ez a mátrixnorma valamilyen vektornormából?

10. Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mutassa meg, hogy

$$\|A\| = \max_{i,j} |a_{ij}|$$

normát definiál $\mathbb{R}^{n\times n}$-en! Lehet-e ez a norma vektornorma által indukált?

11. Legyen λ az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix egy tetszőleges sajátértéke. Bizonyítsa be, hogy

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

teljesül minden indukált mátrixnorma esetén!

12. Mutassa meg, hogy tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix esetén az A^TA mátrix sajátértékei nemnegatívak!

13. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén $\|A\|_2^2 \leq \|A\|_1 \cdot \|A\|_\infty$ teljesül!

14. Legyen $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonális mátrix. Bizonyítsa be, hogy $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ esetén!

15. Legyen $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonális mátrix. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix esetén $\|QA\|_2 = \|A\|_2$ és $\|AQ\|_2 = \|A\|_2$.

16. Bizonyítsa be, hogy $\mathbb{R}^{n\times n}$-ben az invertálható mátrixok halmaza nyílt, azaz tetszőleges $\|\cdot\|$ mátrixnorma esetén: ha A invertálható, akkor létezik olyan $\delta > 0$, hogy $A + B$ invertálható minden olyan $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra, melyre $\|B\| < \delta$.

17. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy reguláris, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pedig egy szinguláris mátrix. Mutassa meg, hogy bármely indukált mátrixnormában

$$||A - B|| \cdot ||A^{-1}|| \geq 1$$

teljesül!

18. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus, pozitív definit mátrix. Mutassa meg, hogy

$$\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$$

normát definiál $\mathbb{R}^n$-en!

19. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrix. Bizonyítsa be, hogy ha $(Ax, x) = 0$, akkor $Ax = 0$!

20. Számítsa ki $\mathrm{cond}_\infty(A)$-t az alábbi mátrixok esetén!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \ (a \in \mathbb{R}); \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

21. Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket, hasonlítsa össze a megoldásokat!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{pmatrix}$$

22. Jelölje $\lambda_{\max}$, ill. $\lambda_{\min}$ az A abszolút értékben legnagyobb, ill. legkisebb sajátértékét. Bizonyítsa be, hogy

$$\left|\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\right| \le \mathrm{cond}(A).$$

23. Legyen A szimmetrikus mátrix, jelölje $\lambda_{\max}$, ill. $\lambda_{\min}$ az A abszolút értékben legnagyobb, ill. legkisebb sajátértékét. Bizonyítsa be, hogy

$$\mathrm{cond}_2(A) = \left|\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\right|.$$

24. Oldja meg meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{pmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy b helyett $b + \Delta b$ ismert,

$$b + \Delta b = \begin{pmatrix} 1.98 \\ 1.98 \end{pmatrix}.$$

Oldja meg az $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$ lineáris egyenletrendszert! Számítsa ki a $\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$, $\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$ relatív hibákat! Számísa ki az A kondíciószámát (∞-normában)!

25. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reguláris mátrix, $0 \neq c \in \mathbb{R}$. $\mathrm{cond}(cA) =?$

MATLAB feladatok

1. Írjon 1-1 függvényt az 1- és ∞-mátrixnormák számítására!

2. Számítsa ki a 6×6-os Hilbert-mátrix kondíciószámát 2- és ∞-normában! (Használja a `cond` és `hilb` MATLAB-függvényeket!) Legyen B egy 6×6-os véletlen mátrix (használja a `rand` függvényt), számítsa ki B kondíciószámát is (végezzen több kísérletet)!

3. Állítsa elő a következő $A \in \mathbb{R}^{100\times100}$ mátrixot és $b \in \mathbb{R}^{100}$ vektort, és a „backslash" operátort használva oldja meg az $Ax = b$ egyenletrendszert (azaz alkalmazza az $x = A\backslash b$ parancsot). Ezután perturbálja a b vektort, pl. 1 helyett legyen $b(100) = 1.00001$ és oldja meg a rendszert újra. Számítsa ki az A kondíciószámát (adjon egy egzakt képletet is $\mathrm{cond}_\infty(A)$-ra).

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ -1, & \text{ha } i < j, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases} \qquad b = (-98, -97, \ldots, 0, 1)^T.$$

4. Írjon egy MATLAB-függvényt, mely adott $s \in (0,1)$ esetén előállítja az
$$A = A(s) = \frac{1}{s}\begin{pmatrix} 1+s^2 & 1-s^2 \\ 1-s^2 & 1+s^2 \end{pmatrix}$$
mátrixot, továbbá kiszámítja az $\|A\|_\infty$ és $\mathrm{cond}_\infty(A)$ értékeket!

5. Írjon egy MATLAB-függvényt, mely adott $s \in (0,1)$ és $\varepsilon > 0$ esetén megoldja az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ahol A az előző feladatban adott mátrix, $b = (1,1)^T$, majd megoldja az egyenletrendszert akkor is, ha a b vektor $\delta b = (\varepsilon, -\varepsilon)^T$ hibával terhelten adott, továbbá kiszámítja a megoldás relatív hibáját (maximum-normában)!