

Numerikus matematika vizsga

Csak íróeszköz, a kiosztott papír és számológép használható, egyéb segédeszköz nem! A vizsgán mobiltelefon nem használható számológépként.

1. Az $a = 2$, $t = 4$, $k_- = -3$, $k_+ = 2$ számábrázolási jellemzők mellett hány pozitív, normalizált lebegőpontos szám ábrázolható? Adja meg a legnagyobb ábrázolható számot! Mi lesz a 0.8-hoz rendelt lebegőpontos szám szabályos kerekítés, illetve levágás esetén?

10 pont

2. Határozza meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

x_i	-1	1	2
$f(x_i)$	2	0	-49
$f'(x_i)$	-11	-7	-131

10 pont

3. Mit mondhatunk az A mátrix sajátértékeiről és a mátrix invertálhatóságáról a Gersgorintétel alapján? Milyen közelítő sajátérték tartozik a v közelítő sajátvektorhoz?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

10 pont

4. Fogalmazza meg a Lagrange-interpoláció feladatát, és mondja ki a megoldhatóságáról szóló tételt!

15 pont

5. Írja fel a nemlineáris egyenletek gyökeinek közelítésére szolgáló Newton-módszer algoritmusát! Ne csak egy képletet írjon, fogalmazza meg a feladatot is!

10 pont

6. Fogalmazza meg a lineáris regresszió feladatát!

12 pont

7. Írja fel az összetett Simpson-képletet! (Ne csak egy képletet írjon, fogalmazza meg a feladatot és a képletben szereplő mennyiségeket definiálja!) Írja fel a hiba becslését!

15 pont

8. Definiálja a mátrix kondíciószámát, és sorolja fel a tulajdonságait! Írja fel a hibás jobboldali vektorral adott lineáris egyenletrendszer megoldásának relatív hibájára vonatkozó becslést!

18 pont

Értékelés:

0–39 elégtelen, 40–54 elégséges, 55–69 közepes, 70–84 jó, 85–100 jeles

Numerikus matematika vizsga

Csak íróeszköz, a kiosztott papír és számológép használható, egyéb segédeszköz nem! A vizsgán mobiltelefon nem használható számológépként.

1. Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes egyenletét!

t_i	0	1	2	3	4
f_i	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1

10 pont	
---------	--

2. Igazolja, hogy az $x^4 + 2x^3 - 12x + 1 = 0$ egyenletnek van gyöke a $[0, 1]$ intervallumban. A gyököt valamely $x_0 \in [0, 1]$ esetén az

$$x_{k+1} = \frac{x_k^4 + 2x_k^3 + 1}{12}, \quad k = 0, 1, \dots$$

sorozattal szeretnénk közelíteni. Mit mondhatunk az eljárás konvergenciájáról?

10 pont	
---------	--

3. Becsülje meg hány részintervallumra kell osztani az alapintervallumot, ha az alábbi integrált összetett trapéz-képlettel akarjuk közelíteni úgy, hogy a hiba kisebb legyen, mint $0.5 \cdot 10^{-2}$.

$$\int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx$$

10 pont	
---------	--

4. Adott a, t, k_-, k_+ számábrázolási jellemzők mellett mi lesz a legnagyobb ábrázolható lebegőpontos szám, illetve a legkisebb pozitív normalizált lebegőpontos szám? Adja meg az 1 jobb és baloldali lebegőpontos szomszédját, és a pozitív normalizált lebegőpontos számok számát!

15 pont	
---------	--

5. Adja meg az 1-, 2- és ∞ -mátrixnormák kiszámítási módját!

10 pont	
---------	--

6. Definiálja a mátrix kondíciószámát és sorolja fel a tulajdonságait!

12 pont	
---------	--

7. Írja fel az inverz-iteráció algoritmusát és definiálja a Rayleigh-hányadost!

15 pont	
---------	--

8. Fogalmazza meg a Lagrange-interpoláció feladatát és mondja ki a megoldhatóságáról szóló tételt! Legyenek adottak a páronként különböző x_0, x_1, x_2 pontok és az $f_0 = f(x_0)$, $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$ értékek. Adja meg az $[x_0, x_1, x_2]f$ másodrendű osztott differencia kiszámítási módját!

18 pont	
---------	--

Értékelés:

0–39 elégtelen, 40–54 elégséges, 55–69 közepes, 70–84 jó, 85–100 jeles

Numerikus matematika vizsga

Csak íróeszköz, a kiosztott papír és számológép használható, egyéb segédeszköz nem! A vizsgán mobiltelefon nem használható számológépként.

1. Határozza meg a $(-2, 62)$, $(-1, 9)$, $(0, 2)$, $(2, 6)$, $(3, 77)$ adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot. 10 pont

2. $a = 2$, $t = 4$, $k_- = -3$, $k_+ = 3$ esetén mi lesz a 0.6-hoz rendelt lebegőpontos szám szabályos kerekítés és levágás esetén? Hány pozitív normalizált lebegőpontos szám ábrázolható ilyen jellemzők mellett? Adja meg a legnagyobb ábrázolható számot és ε_1 értékét. 10 pont

3. Oldja meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert Cholesky-felbontással és számítsa ki $\det(A)$ -t.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -2 \\ -6 & 18 & 9 \\ -2 & 9 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -8 \\ 24 \\ 20 \end{pmatrix}$$

10 pont

4. Milyen feladat megoldására használjuk az inverz-iterációt? Írja fel az algoritmust (definiálja a Rayleigh-hányadost is!), vázolja a numerikus megvalósítást!

18 pont

5. Definiálja a vektornorma által indukált mátrixnormát és sorolja fel a tulajdonságait.

12 pont

6. Írja fel az összetett trapéz-képletet és adja meg a hiba becslését.

15 pont

7. Írja fel azt az egyenletet, amely a (t_i, f_i) , $i = 1, \dots, m$, adatokat legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő $F(t) = a + b \cdot \sin(\pi t)$ alakú modell paramétereit szolgáltatja.

15 pont

8. Írja fel a szelőmódszer algoritmusát!

10 pont

Értékelés:

0–39 elégtelen, 40–54 elégséges, 55–69 közepes, 70–84 jó, 85–100 jeles

Numerikus matematika vizsga

Csak íróeszköz, a kiosztott papír és számológép használható, egyéb segédeszköz nem! A vizsgán mobiltelefon nem használható számológépként.

1. Határozza meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot.

x_i	-1	1	2
$f(x_i)$	-10	0	14
$f'(x_i)$	23	3	38

10 pont

2. Oldja meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert LU-felbontással! Határozza meg az A márix determinánsát!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & -6 & -3 \\ -2 & -1 & -8 & 2 \\ 4 & 1 & 16 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 10 \\ -14 \end{pmatrix}$$

10 pont

3. Becsülje meg hány részre kell osztani az alapintervallumot, ha az alábbi integrált összetett trapéz képlettel akarjuk közelíteni úgy, hogy a hiba kisebb legyen, mint 10^{-2} .

$$\int_3^6 \frac{1}{\sqrt{2x-5}} dx$$

10 pont

4. Definiálja a kondíciószámot és sorolja fel a tulajdonságait. Írja fel a hibás jobboldallal adott lineáris egyenletrendszer megoldásának relatív hibájára vonatkozó becslést.

18 pont

5. Mondja ki a Gersgorin-tételt!

12 pont

6. Fogalmazza meg a Lagrange-interpoláció feladatát, és mondja ki a megoldhatóságáról szóló tételt!

15 pont

7. Fogalmazza meg a lineáris regresszió feladatát. Írja fel a megoldást szolgáltató egyenletet (elegendő felírni az egyenletet, és megnevezni a benne szereplő mennyiségeket, a levezetés nem szükséges). Mit mondhatunk az egyenlet megoldhatóságáról? Mi az esetleges szingularitás jelentése, és hogyan kezelhetjük azt?

15 pont

8. Írja fel a nemlineáris egyenletek gyökeinek közelítésére szolgáló Newton-módszer algoritmusát!

10 pont

Értékelés:

0–39 elégtelen, **40–54** elégséges, **55–69** közepes, **70–84** jó, **85–100** jeles

Numerikus matematika vizsga

Csak íróeszköz, a kiosztott papír és számológép használható, egyéb segédeszköz nem! A vizsgán mobiltelefon nem használható számológépként.

1. Határozza meg az alábbi adatokra négyzetesen legjobban illeszkedő egyenest!

t_i	0	1	2	3	4
f_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	3	$\frac{7}{2}$

10 pont	
---------	--

2. $a = 2$, $t = 4$, $k_- = -3$, $k_+ = 3$ esetén mi lesz a 0.3-hoz rendelt lebegőpontos szám szabályos kerekítés és levágás esetén? Hány pozitív normalizált lebegőpontos szám ábrázolható ilyen jellemzők mellett? Adja meg a legnagyobb ábrázolható számot és ε_1 értékét.

10 pont	
---------	--

3. Oldja meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert LU-felbontással és számítsa ki $\det(A)$ -t.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & -6 & -7 \\ 6 & -5 & -2 & -10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ -23 \\ -26 \end{pmatrix}$$

10 pont	
---------	--

4. Milyen feladat megoldására használjuk a hatvány módszert? Írja fel az iterációt (kitérve a numerikus megvalósításra) és definiálja a Rayleigh-hányadost!

18 pont	
---------	--

5. Definiálja a mátrix kondíciószámát és sorolja fel a tulajdonságait!

12 pont	
---------	--

6. Írja fel az összetett Simpson-képletet és mondja ki az összetett kvadraturaképletek konvergenciájáról szóló tételt.

15 pont	
---------	--

7. Fogalmazza meg a Lagrange-interpoláció feladatát és mondja ki a megoldhatóságáról szóló tételt!

15 pont	
---------	--

8. Írja fel a nemlineáris egyenletek gyökeinek közelítésére szolgáló Newton-módszer algoritmusát!

10 pont	
---------	--

Értékelés:

0–39 elégtelen, 40–54 elégséges, 55–69 közepes, 70–84 jó, 85–100 jeles

Numerikus matematika vizsga

Csak íróeszköz, a kiosztott papír és számológép használható, egyéb segédeszköz nem! A vizsgán mobiltelefon nem használható számológépként.

1. Határozza meg a $(-2, -37)$, $(-1, -2)$, $(1, -4)$, $(2, -29)$, $(3, -142)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot! 10 pont

2. Oldja meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert LU-felbontással! Határozza meg az A márix determinánsát!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ -6 & -7 & -2 & 3 \\ -4 & -2 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -14 \\ 5 \end{pmatrix}$$

10 pont

3. Mit mondhatunk az A márix sajátértékeiről és a márix invertálhatóságáról a Gersgorin-tétel alapján? Milyen közelítő sajátérték tartozik a v közelítő sajátvektorhoz?

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -11 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

10 pont

4. Írja fel a nemlineáris egyenletek gyökeinek közelítésére szolgáló fixpont-iteráció algoritmusát, és fogalmazza meg a konvergenciájáról szóló tételt! 15 pont

5. Adja meg az 1-, 2- és ∞ -márixnormák kiszámítási módját! 10 pont

6. Fogalmazza meg a lineáris regresszió feladatát! 12 pont

7. Írja fel az összetett trapéz-képletet! (Ne csak egy képletet írjon, fogalmazza meg a feladatot és a képletben szereplő mennyiségeket definiálja!) Írja fel a hiba becslését! 15 pont

8. Definiálja a márix kondíciós számát, és sorolja fel a tulajdonságait! Írja fel a hibás jobb-oldali vektorral adott lineáris egyenletrendszer megoldásának relatív hibájára vonatkozó becslést! 18 pont

Értékelés:

0–39 elégtelen, 40–54 elégséges, 55–69 közepes, 70–84 jó, 85–100 jeles

Numerikus matematika vizsga

Csak íróeszköz, a kiosztott papír és számológép használható, egyéb segédeszköz nem! A vizsgán mobiltelefon nem használható számológépként.

1. Határozza meg az alábbi adatokra négyzetesen legjobban illeszkedő egyenest!

$$\begin{array}{c|cccc} t_i & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f_i & 1 & 2 & \frac{5}{2} & 3 & 5 \end{array}$$

10 pont	
---------	--

2. Oldja meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert LU-felbontással! Határozza meg az A márix determinánsát!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 2 & 9 \\ -2 & -1 & -10 & 5 \\ 4 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 18 \\ -14 \end{pmatrix}$$

10 pont	
---------	--

3. Igazolja, hogy a $\cos x - 5x = 0$ egyenletnek van gyöke a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumban! A gyököt va;amely $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ esetén az

$$x_{k+1} = \frac{1}{5} \cos x_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

iterációval szeretnénk közelíteni. Mit mondhatunk az eljárás konvergenciájáról?

10 pont	
---------	--

4. Írja fel a hatványmódszer algoritmusát és definiálja a Rayleigh-hányadost!

15 pont	
---------	--

5. Írja fel a szelőmódszer algoritmusát!

10 pont	
---------	--

6. Mondja ki a perturbációs lemmát!

12 pont	
---------	--

7. Definiálja az Hermite-interpoláció feladatát és mondja ki a megoldhatóságáról szóló tételt!

15 pont	
---------	--

8. Definiálja a vektornorma által indukált mátrixnormát és sorolja fel a tulajdonságait! Adja meg az 1-, 2- és ∞ -mátrixnormák kiszámítási módját.

18 pont	
---------	--

Értékelés:

0–39 elégtelen, 40–54 elégséges, 55–69 közepes, 70–84 jó, 85–100 jeles