

MATEMATIKA MÉRNÖKÖKNEK I.

Komplex számok

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán! Ábrázolja a megoldásokat a komplex számsíkon!

(a) $x^2 + 4 = 0$,

(c) $x^2 - x + 1 = 0$,

(b) $x^2 + 2x + 2 = 0$,

(d) $x^3 - 6x^2 + 13x = 0$.

2. Írja fel az alábbi komplex számok algebrai alakját!

(a) $(3+i)(2+3i)$, $(-2+3i)(5-2i)$, $i(1+2i)$, $(-1+i)(1-2i)(1+2i)$,

(b) $\overline{5-2i}$, $\overline{(3+4i)}(2+i)$,

(c) $(2-i)^3$, $i^6 + 3i^5 - 2i^3 + i^2 - 1$, i^{2008} , i^{103} ,

(d) $\frac{5+3i}{i}$, $\frac{1-i}{2+i}$, $\frac{1-2i}{1-3i}$, $\frac{2-i}{(3-2i)(2+5i)}$.

3. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

(a) $\bar{z} + 2z = 9 + 2i$,

(d) $z^2 + |z|^2 = 2 - 6i$,

(b) $\bar{z} + |z|^2 = 31 - i$,

(e) $\bar{z} \cdot z^2 = 8i$,

(c) $i^3 \cdot \bar{z} = -3 - 2i$,

(f) $z^2 = i$.

4. Ábrázolja a komplex számsíkon az alábbi halmazokat!

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0\}$,

(d) $D = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \geq 2\}$,

(b) $B = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = 0\}$,

(e) $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$,

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \leq 0\}$,

(f) $F = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = \text{Im}(z)\}$.

5. Adja meg az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját!

(a) 3,

(d) $-4i$,

(g) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$,

(j) $\frac{5}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{3}i$,

(b) -2 ,

(e) $2 + 2i$,

(h) $-1 + \sqrt{3}i$,

(c) i ,

(f) $1 - i$,

(i) $-3 - 3\sqrt{3}i$,

(k) $\sqrt{3} - i$.

6. Legyen $x = 3 \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right)$ és $y = 2 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right)$. Határozza meg az alábbi kifejezések értékét!

(a) $x \cdot y$, (b) $\frac{x}{y}$, (c) x^3 , (d) y^5 , (e) $\frac{1}{x}$, (f) $x^2 y$.

7. Trigonometrikus alak segítségével határozza meg az alábbi kifejezések értékét!

(a) $\sqrt{i}$, (c) $(2 + 2i)^{2008}$,
(b) $\sqrt[3]{i}$, (d) $(1 + \sqrt{3}i)^{301}$.

8. Számítsa ki a $z = 81 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right)$ komplex szám második, harmadik, negyedik gyökeit! Ábrázolja a gyököket a komplex számsíkon!

9. Írja fel és ábrázolja a komplex számsíkon a harmadik, negyedik, ötödik és hatodik egységgyököket!

10. Az alábbi komplex számok közül melyek egységgyökök?

$$1 + i, \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, \quad 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right), \quad \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2},$$

$$\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8}, \quad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -1, \quad i.$$

11. Legyen $\varepsilon = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}$. Mutassa meg, hogy $k = 1, \dots, 8$ esetén ε^k előállítja az összes nyolcadik egységgyököt!

12. Sorolja fel a primitív tizedik egységgyököket!

13. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

(a) $z^2 - 3iz + 4 = 0$, (d) $z^2 + (2 + 4i)z - 3 + 3i = 0$,
(b) $z^3 + z^2 + z = 0$,
(c) $z^5 - z = 0$, (e) $2iz^2 + (4 + 5i)z + 5 = 0$.