

MATEMATIKA MÉRNÖKÖKNEK I.

Halmazok, függvények

1. Tekintsük az alábbi halmazokat: $A = \mathbb{Z}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ páros}\}$, $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ prím}\}$. Adja meg az alábbi halmazokat:

$$A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad A \cap B, \quad C \setminus B, \quad (A \setminus B) \cup D, \quad B \Delta D$$

2. Legyen $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ páros}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x > 4\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} : x < 6\}$. Adja meg (és ábrázolja Venn-diagrammon) az alábbi halmazokat!

$$B \setminus C, \quad A \setminus (B \cap C), \quad B \Delta C, \quad (B \cup C) \setminus A$$

3. Írja fel az $A = \{a, b, c\}$ halmaz hatványhalmazát!

4. Egyenlő-e az alábbi két halmaz?

(a) az 5-nél nagyobb egész számok halmaza és a 6-nál nem kisebb természetes számok halmaza,

(b) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1 \text{ és } x < x^2\}$ és
 $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ és } x = |x|\}$,

(c) $A = \mathbb{R}$ és $B = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = x\}$.

5. Egy társaságban 27-en beszélnek angolul, 23-an németül, 12-en mindkét nyelvet beszélnek, 8-an egyiket sem. Hány tagú a társaság?

6. Legyen A egy m elemű, B egy n elemű halmaz. Adja meg m és n függvényében legalább, ill. legfeljebb hány eleme lehet az alábbi halmazoknak!

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \times B, \quad A \setminus B, \quad A \Delta B$$

7. Jelölje X a 2008 szeptember elsején 20.00 és 22.00 között a „Vak késdobáló” elnevezésű vendéglátóipari egységben megjelent vendégek halmazát. Tekintsük X alábbi részhalmazait: N a nők halmaza, T a törzsvendégek (az egységet hetente legalább 4 alkalommal látogatók) halmaza, A az alkalmi turisták (az egységet eddig legfeljebb kétszer látogatók) halmaza, S a sört ivók halmaza, B a bort ivók halmaza. Fogalmazza meg halmazelméleti műveletekkel az alábbi állításokat!

(a) A bort ivó alkalmi turisták között nincs nő.

(b) A férfi törzsvendégek sört és bort is isznak.

- (c) Nincs olyan sörivő nő, aki törzsvendég.
- (d) Aki vagy csak sört, vagy csak bort iszik az alkalmi turista nő.
- (e) Minden alkalmi turista sörivő.

8. Legyen $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Az alábbiak közül melyik állítás igaz?

$$\begin{aligned} \emptyset \in A, \quad \emptyset \subseteq A, \quad \{\emptyset\} \in A, \quad \{\emptyset\} \subseteq A, \\ \{\{\emptyset\}\} \in A, \quad \{\{\emptyset\}\} \subseteq A, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A \end{aligned}$$

9. Mit mondhatunk az A és B halmazokról, ha tudjuk, hogy

- (a) $A \cup B = A \cap B$,
- (b) $A \cup B = A$,
- (c) $A \cap B = A$,
- (d) $A \Delta B = A$,
- (e) $A \Delta B = A \cup B$,
- (f) $A \Delta B = A \cap B$,
- (g) $A \Delta B = \emptyset$,
- (h) $A \Delta B \subseteq A$,
- (i) $A \setminus B = A$,
- (j) $A \cup B \subseteq A$,
- (k) $A \setminus B = B \setminus A$,
- (l) $A \cup B = \overline{A}$,
- (m) $(A \cup B) \setminus B = A$.

10. Igazolja az alábbi összefüggéseket!

- (a) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$,
- (b) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$,
- (c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

11. Legyen $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Sorolja fel az $A \times B$ halmaz elemeit!

12. Legyen $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, \dots, 10\}$. Legyen R a következő reláció:

$$R = \{(a, b) \in A \times B : a|b\}.$$

Sorolja fel R elemeit, adja meg a reláció értelmezési tartományát és érték-készletét!

13. Döntse el, hogy az alábbi relációk közül melyek függvények!

- (a) $F \subset \{1, 3, 5\} \times \{2, 4, 6, 8\}$, $F = \{(1, 4), (3, 6), (1, 2), (5, 8)\}$,
- (b) $F \subset \{a, b, c, d\} \times \{a, b, c\}$, $F = \{(a, a), (b, c), (c, a), (d, b)\}$,

- (c) $F = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : b = 2a\}$,
 (d) $F = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : b = a + 3\}$,
 (e) $F = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |b| = |a|\}$.

14. Határozza meg a valós számok legbővebb részhalmazát, ahol az alábbi függvény értelmezhető! Adja meg az ezen értelmezési tartományhoz tartozó értékkészletet!

- (a) $f(x) = (x+2)^2 - 1$, (e) $f(x) = \sqrt[3]{x-8}$, (j) $f(x) = \lg(1+x)$,
 (b) $f(x) = \frac{1}{x+2}$, (f) $f(x) = \sqrt[4]{1+x}$, (k) $f(x) = \log_2(2-x)$,
 (c) $f(x) = \frac{x-3}{2x+4}$, (g) $f(x) = x^{-3/2}$, (l) $f(x) = \sqrt{1+\ln x}$,
 (d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$, (i) $f(x) = \frac{1}{1+e^{-2x}}$, (m) $f(x) = 3^{\log_3(2x)}$.

15. Döntse el, hogy az alábbi függvények közül melyik szürjektív („ráképezés”), ill. injektív (kölcsönösen egyértelmű). Amennyiben a függvény invertálható adja meg az inverzét! (A feladatokban $\mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok halmazát jelöli.)

- (a) $F \subset \{1, 2, 3\} \times \{2, 4, 7, 8\}$, $F = \{(1, 4), (2, 8), (3, 7)\}$,
 (b) $F \subset \{1, 3, 5\} \times \{2, 4, 6\}$, $F = \{(1, 4), (3, 6), (5, 4)\}$,
 (c) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = 2n + 4$,
 (d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+3)^2 - 1$,
 (e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$,
 (f) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x+2| - 3$,
 (g) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$,
 (h) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$,
 (i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } x < 0 \\ x^2, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

- (j) $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-3}$,
 (k) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 x$,

(l) $f : [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1], \quad f(x) = \sin x,$

(m) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{ha } x < 0 \\ \sqrt{2x + 1}, & \text{ha } 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{x}{2} + 1 & x > 4 \end{cases}$$

(n) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{ha } x < 0 \\ (x + 1)^2, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

(o) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x+1}, & \text{ha } x \neq -1 \\ 1, & \text{ha } x = -1 \end{cases}$$

16. Adja meg az $f \circ g$ függvényt, ha

(a) $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ és $g(x) = x + 3,$

(b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ és $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 3,$

(c) $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ és $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2,$

(d) $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x}$ és $g(x) = x^3.$