

Lineáris egyenletrendszerek megoldása, mátrixok felbontása

1. Határozza meg az alábbi mátrixok inverzét Gauss-Jordan eliminációval!

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

(c)

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

(d)

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Oldja meg LU-felbontással az $Ax = b$ egyenletrendszert! Határozza meg az A mátrix determinánsát!

(a)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix},$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ -2 & -7 & 3 \\ 2 & 12 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix},$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 1 \\ 9 & 5 & -4 & 1 \\ -6 & -9 & 16 & 17 \\ 3 & 4 & -8 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -13 \\ 42 \\ -25 \\ 19 \end{pmatrix},$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix},$$

(e)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(f)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \\ -4 & 8 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix},$$

(g)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -6 & -5 & 3 \\ -4 & 18 & 3 & 2 \\ -3 & 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 21 \\ -41 \\ 83 \\ 52 \end{pmatrix},$$

(h)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & -5 & 6 & -3 \\ -4 & 5 & 8 & -5 \\ 2 & 6 & -22 & 15 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ -15 \\ 34 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

(i)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & 3 & -6 \\ -4 & 7 & -7 & 6 \\ 6 & -5 & 5 & -23 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -16 \\ 27 \end{pmatrix}.$$

(j)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 5 & 0 \\ 6 & -5 & -2 & -9 \\ -6 & 4 & -5 & -7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -33 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

(k)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 6 & 0 \\ -4 & 1 & -7 & 3 \\ -8 & -2 & -4 & 24 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 9 \\ 58 \end{pmatrix}.$$

(l)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -9 & -4 & -1 & 6 \\ -6 & -1 & -6 & -5 \\ -6 & -4 & 8 & 19 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 16 \\ -11 \\ 48 \end{pmatrix}.$$

3. Oldja meg az $Ax = b$ és $Ax = c$ lineáris egyenletrendszereket LU-felbontással!

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 12 & -6 & 2 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -28 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

4. Határozza meg az alábbi mátrixok Cholesky-felbontását! Számítsa ki a mátrixok determinánsát!

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \\ -6 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

(d)

$$D = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 9 \\ -3 & 17 & -7 \\ 9 & -7 & 11 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 9 \\ -9 & 29 & -31 \\ 9 & -31 & 37 \end{pmatrix}, \quad (e)$$

(c)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -4 & 9 & -13 \\ 6 & -13 & 21 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 12 & -4 \\ -8 & 13 & -3 & 2 \\ 12 & -3 & 14 & -11 \\ -4 & 2 & -11 & 21 \end{pmatrix},$$

5. Oldja meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert Cholesky-felbontással!

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 13 & -10 \\ 4 & -10 & 12 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -16 \\ 20 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 2 & -5 \\ 6 & -5 & 17 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 20 \\ -13 \\ 40 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -3 & 6 \\ -3 & 5 & -3 & -2 \\ -3 & -3 & 9 & -8 \\ 6 & -2 & -8 & 17 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ -32 \\ 37 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 6 & -4 \\ -2 & 17 & -7 & -11 & -10 \\ -2 & -7 & 9 & 1 & 10 \\ 6 & -11 & 1 & 14 & -1 \\ -4 & -10 & 10 & -1 & 19 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ 20 \\ -21 \\ 43 \end{pmatrix}$$

(e)

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 & 3 \\ -6 & 8 & 6 & -6 \\ -6 & 6 & 9 & -10 \\ 3 & -6 & -10 & 18 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 36 \\ -38 \\ -47 \\ 58 \end{pmatrix}$$

(f)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 & 2 & -4 \\ -4 & 20 & -10 & -10 & -8 \\ -2 & -10 & 14 & 3 & 13 \\ 2 & -10 & 3 & 7 & 2 \\ -4 & -8 & 13 & 2 & 24 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -24 \\ 52 \\ -3 \\ -34 \\ 29 \end{pmatrix}$$

(g)

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 3 \\ -6 & 20 & -14 \\ 3 & -14 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -21 \\ 34 \\ -34 \end{pmatrix}$$

Legkisebb négyzetek módszere

1. Határozzuk meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes egyenletét!

(a)

t_i	0	1	2	3
f_i	1	$\frac{3}{2}$	2	2

(d)

t_i	0	1	2	3	4
f_i	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

(b)

t_i	0	1	1	2	3
f_i	1	1	$\frac{3}{2}$	2	3

(e)

t_i	0	1	1	2	3
f_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	$\frac{5}{2}$

(c)

t_i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
f_i	$\frac{3}{4}$	1	2	$\frac{9}{4}$	3	3

(f)

t_i	0	1	2	2	3
f_i	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$

2. Határozzuk meg az alábbi pontokat négyzetesen legjobban közelítő másodfokú polinomot!

(a)

t_i	-1	0	1	2
y_i	-1	1	$\frac{3}{2}$	1

(b)

t_i	-1	0	1	1	2
f_i	1	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1

3. Az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$\sum_{i=1}^n c_i t^{i-1}$$

alakú függvényt keresünk. Milyen n értéket érdemes választani? Határozzuk meg az ehhez tartozó polinomot!

t_i	-1	-1	-1	2	2
f_i	1.2	1	0.8	1	1.1

4. Közelítsük az alábbi adatokat

$$F(t) = c_0 + c_1 \cos(\pi t) + c_2 \sin(\pi t)$$

alakú modellel!

t_i	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
y_i	1	-2	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{2}$

Mit tapasztalunk, ha a fenti modellel a következő adatokat közelítjük?

t_i	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
f_i	1	-2	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{2}$

5. Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = a + \frac{b}{t}$$

alakú függvényt!

t_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
f_i	8	6	4	$\frac{5}{2}$

6. Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = a + b \cdot \sin^2\left(\frac{t\pi}{2}\right)$$

alakú függvényt!

t_i	0	$\frac{1}{2}$	1	2
f_i	$\frac{1}{2}$	1	1	0

7. Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = a + \frac{b}{\sin^2(\pi t)}$$

alakú függvényt!

t_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
f_i	$\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{3}{2}$