Numerikus matematika

Gazdaságinformatikus BSc

Baran Ágnes

Előadás

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Tartalom

Lebegőpontos számok

Lebegőpontos számok

Példa.

$a = 10$

$$0.3721 = \frac{3}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{1}{10^4}$$

$$21.65 = 0.2165 \cdot 10^2 = \left(\frac{2}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{5}{10^4}\right) \cdot 10^2$$

$a = 2$

$$0.1101 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4}$$

$$0.001011 = 0.1011 \cdot 2^{-2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right) \cdot 2^{-2}$$

Lebegőpontos számok

A nemnulla lebegőpontos számok alakja:

$$\pm a^k \left(\frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \cdots + \frac{m_t}{a^t} \right)$$

ahol

$a > 1$ egész, a számábrázolás alapja

$t > 1$, egész, a mantissza hossza

$k_- \leq k \leq k_+$ egész, a karakterisztika, ahol $k_- < 0$ és $k_+ > 0$ adott

$1 \leq m_1 \leq a - 1$, egész (a szám normalizált)

$0 \leq m_i \leq a - 1$, egész, ha $i = 2, \ldots, t$

röviden: $[\pm|k|m_1, \dots, m_t]$
ahol $(m_1, \dots, m_t)$ a mantissza.

Az a, t, k_-, k_+ értékek egyértelműen leírják az ábrázolható számok halmazát.

Példa.

Legyen $a = 2,\ t = 4,\ k_- = -3,\ k_+ = 2.$

(a) Írjuk fel a következő számok lebegőpontos alakját:

$$0.6875, \quad 0.8125, \quad 3.25$$

(b) Hány pozitív normalizált lebegőpontos szám ábrázolható ilyen jellemzők mellett?

A legnagyobb ábrázolható szám:

$$M_\infty = a^{k_+}\left(\frac{a-1}{a}+\frac{a-1}{a^2}+\cdots+\frac{a-1}{a^t}\right)$$

$$= a^{k_+}\left(1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{1}{a^{t-1}}-\frac{1}{a^t}\right)$$

$$= a^{k_+}\left(1-a^{-t}\right)$$

A legkisebb pozitív normalizált ábrázolható szám:

$$\varepsilon_0 = a^{k_-}\left(\frac{1}{a}+0+\cdots+0\right) = a^{k_- -1}$$

Szubnormális számok: ha $k = k_-$, akkor $m_1 = 0$ is lehet.

Az 1 mindig lebegőpontos szám:

$$1 = a^1 \cdot \frac{1}{a}, \qquad \text{vagy röviden: } 1 = [+|1|1, 0, \ldots, 0]$$

Az 1 jobboldali szomszédja:

$$1 + \varepsilon_1 = [+|1|1, 0, \ldots, 0, 1]$$

másképp:

$$1 + \varepsilon_1 = a\left(\frac{1}{a} + 0 + \cdots + 0 + \frac{1}{a^t}\right) = 1 + a^{1-t}$$

azaz $\varepsilon_1 = a^{1-t}$ (**gépi epszilon**)

Az IEEE lebegőpontos aritmetikai szabvány:

	egyszeres pontosság	dupla pontosság
méret	32 bit	64 bit
mantissza	23+1 bit	52+1 bit
karakterisztika	8 bit	11 bit
ε_1	$\approx 1.19 \cdot 10^{-7}$	$\approx 2.22 \cdot 10^{-16}$
M_∞	$\approx 10^{38}$	$\approx 10^{308}$

mivel m_1 mindig 1, ezért nem ábrázoljuk
az előjel ábrázolására 1 bit

Adott a, t, k_+, k_- mellett az ábrázolható lebegőpontos számok a $[-M_\infty, M_\infty]$ intervallum egy megszámlálható részhalmazát alkotják.

Példa

(a) Ábrázoljuk számegyenesen az $a = 2$, $t = 4$, $k_- = -3$, $k_+ = 2$ jellemzők mellett felírható összes pozitív normalizált lebegőpontos számot.

(b) A fenti számábrázolási jellemzők mellett mennyi lesz M_∞, ε_0 és ε_1 értéke?

(c) Mit mondhatunk két szomszédos szám távolságáról?

(d) Mit mondhatunk a szomszédos számok távolságáról, ha k_+ értékét 4-re módosítjuk?

(e) Mi lenne, ha $k_+ > 4$ teljesülne?

Példa.

A pozitív normalizált lebegőpontos számok $a = 2$, $t = 4$, $k_- = -3$, $k_+ = 2$ esetén.

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = -1$	$k = -2$	$k = -3$
0.1000	$\frac{8}{16}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{8}{64}$	$\frac{8}{128}$
0.1001	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{9}{128}$
0.1010	$\frac{10}{16}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{64}$	$\frac{10}{128}$
0.1011	$\frac{11}{16}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{11}{64}$	$\frac{11}{128}$
0.1100	$\frac{12}{16}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{12}{4}$	$\frac{12}{32}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{12}{128}$
0.1101	$\frac{13}{16}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{13}{64}$	$\frac{13}{128}$
0.1110	$\frac{14}{16}$	$\frac{14}{8}$	$\frac{14}{4}$	$\frac{14}{32}$	$\frac{14}{64}$	$\frac{14}{128}$
0.1111	$\frac{15}{16}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{15}{128}$

$M_\infty = 2^2(1 - 2^{-4}) = \frac{15}{4}$ és $\varepsilon_0 = 2^{-3-1} = \frac{1}{16}$ $\left(= \frac{8}{128}\right)$

Legyen $y = a^k \cdot 0.m_1 m_2 \ldots m_t$.

A legközelebbi nála nagyobb szám

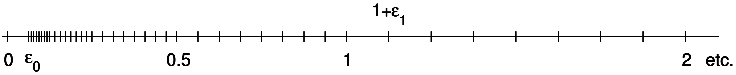
$$a^k \cdot \frac{1}{a^t} = a^{k-t}$$

távolságra van tőle.

Nagyobb karakterisztika $\rightarrow$ nagyobb lépésköz.

Ha $k > t$, akkor a lépésköz nagyobb mint 1.

$a = 2,\ t = 4,\ k_- = -3$ esetén



$\varepsilon_0 = a^{k_- -1} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$,

$\varepsilon_1 = a^{1-t} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

Példa

Vizsgáljuk meg számítógépünkön a $2^{66} + 1 == 2^{66}$, $2^{66} + 10 == 2^{66}$, $2^{66} + 100 == 2^{66}$, $2^{66} + 1000 == 2^{66}$ és $2^{66} + 10000 == 2^{66}$ logikai kifejezések értékét!

Dupla pontosság esetén ($t = 53$):

y	a jobboldali szomszéd távolsága
1	$\approx 2.22 \cdot 10^{-16}$
16	$\approx 3.5527 \cdot 10^{-15}$
1024	$\approx 2.27 \cdot 10^{-13}$
$2^{20} \approx 10^6$	$\approx 2.33 \cdot 10^{-10}$
$2^{52} \approx 4.5 \cdot 10^{15}$	1
$2^{60} \approx 1.15 \cdot 10^{18}$	256
$2^{66} \approx 7.38 \cdot 10^{19}$	16384

Kerekítés

A $[-M_\infty, M_\infty]$ intervallumból nem minden szám írható fel lebegőpontos alakban.

Példa

A 0.1 kettes számrendszerbeli alakja:

$$0.00011001100110011001100\ldots.$$

Az $\frac{1}{3}$ kettes számrendszerbeli alakja:

$$0.0101010101010\ldots.$$

Kerekítés

Legyen $x \in [-M_\infty, M_\infty]$ egy valós szám, $fl(x)$ pedig a hozzárendelt lebegőpontos szám.

Szabályos kerekítés esetén:

$$fl(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{ha } |x| < \varepsilon_0 \\ \text{az } x\text{-hez legközelebbi lebegőpontos számok} \\ \text{közül a nagyobb abszolút értékű,} & \text{ha } |x| \geq \varepsilon_0 \end{cases}$$

Levágás esetén:

$$fl(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{ha } |x| < \varepsilon_0 \\ \text{az } x\text{-hez legközelebbi lebegőpontos szám a 0 felé, ha } |x| \geq \varepsilon_0 \end{cases}$$

Megjegyzés

Ha az ábrázolni kívánt szám két szomszédos lebegőpontos szám között félúton helyezkedik el, akkor a valóságban az előzőnél bonyolultabb kerekítési szabály alapján történik a kerekítés.

Példa

Legyen $a = 2$, $t = 4$, $k_- = -3$, $k_+ = 2$. Mi lesz a 0.1-hez rendelt lebegőpontos szám szabályos kerekítés, illetve levágás esetén?

A 0.1 kettes számrendszerben, normalizálva:

$$2^{-3} \cdot 0.1100110011001100\ldots$$

Szabályos kerekítés:

$$fl(0.1) = 2^{-3} \cdot 0.1101$$

Levágás:

$$fl(0.1) = 2^{-3} \cdot 0.1100$$

Kerekítés

Az **abszolút hiba** becslése

szabályos kerekítésnél:

$$|fl(x) - x| \leq \begin{cases} \varepsilon_0, & \text{ha } |x| < \varepsilon_0 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_1 |x|, & \text{ha } |x| \geq \varepsilon_0 \end{cases}$$

levágásnál:

$$|fl(x) - x| \leq \begin{cases} \varepsilon_0, & \text{ha } |x| < \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 |x|, & \text{ha } |x| \geq \varepsilon_0 \end{cases}$$

Kerekítés

A **relatív hiba** becslése, ha $|x| \geq \varepsilon_0$

szabályos kerekítésnél:

$$\frac{|fl(x) - x|}{|x|} \leq \frac{1}{2}\varepsilon_1$$

levágásnál:

$$\frac{|fl(x) - x|}{|x|} \leq \varepsilon_1$$

Gépi epszilon (ε_1)

Adott számábrázolási jellemzők mellett az 1 és a jobboldali lebegőpontos szomszédjának a távolsága.

Alapműveleteknél:

1. példa:

$a = 10,\ t = 3$
$x = 0.425 \cdot 10^{-1},\ y = 0.677 \cdot 10^{-2}$

$fl(x + y) =?$

$y \to y = 0.0677 \cdot 10^{-1}$ (**tartalék számjegyek**)

$x + y = 0.425 \cdot 10^{-1} + 0.0677 \cdot 10^{-1} = 0.4927 \cdot 10^{-1}$

$$fl(x+y) = \begin{cases} 0.492 \cdot 10^{-1}, & \text{levágás} \\ 0.493 \cdot 10^{-1}, & \text{szabályos kerekítés} \end{cases}$$

2. példa:

$a = 10,\ t = 3$
$x = 0.367 \cdot 10^{-2},\ y = 0.682 \cdot 10^{-2}$

$fl(x + y) =?$

$x + y = 0.367 \cdot 10^{-2} + 0.682 \cdot 10^{-2} = 1.049 \cdot 10^{-2} = 0.1049 \cdot 10^{-1}$

$$fl(x+y) = \begin{cases} 0.104 \cdot 10^{-1}, & \text{levágás} \\ 0.105 \cdot 10^{-1}, & \text{szabályos kerekítés} \end{cases}$$

Alapműveleteknél:

Jelölje $\triangle$ a négy alapművelet valamelyikét, legyen x és y lebegőpontos szám. Tfh a gép a műveletet pontosan végrehajtja és az eredményhez hozzárendel egy lebegőpontos számot. Ekkor

szabályos kerekítés esetén:

$$|fl(x\triangle y) - x\triangle y| \leq \begin{cases} \varepsilon_0, & \text{ha } |x\triangle y| < \varepsilon_0 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_1 |x\triangle y|, & \text{ha } |x\triangle y| \geq \varepsilon_0 \end{cases}$$

levágás esetén:

$$|fl(x\triangle y) - x\triangle y| \leq \begin{cases} \varepsilon_0, & \text{ha } |x\triangle y| < \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 |x\triangle y|, & \text{ha } |x\triangle y| \geq \varepsilon_0 \end{cases}$$

Összefoglalva:

ha $|x \triangle y| > M_\infty$, akkor **túlcsordulás**,

ha $|x \triangle y| < \varepsilon_0$, akkor **alulcsordulás** ($fl(x \triangle y) = 0$)

ha $\varepsilon_0 \leq |x \triangle y| \leq M_\infty$, akkor az előző reláció átírható:

$$fl(x \triangle y) = (x \triangle y) \cdot (1 + \varepsilon_\triangle), \quad \text{ahol } |\varepsilon_\triangle| \leq \varepsilon_1 \begin{cases} 1, & \text{levágás} \\ \frac{1}{2}, & \text{szabályos kerekítés} \end{cases}$$

A hibák terjedése

Legyenek $x_0, x_1, \dots, x_n$ lebegőpontos számok.

$S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i =?$, ha az összeadás algoritmusa:

$$S_0 = x_0, \qquad S_k = S_{k-1} + x_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

A hiba becslése:

$$|fl(S_n) - S_n| \leq n\varepsilon_1|x_0| + n\varepsilon_1|x_1| + (n-1)\varepsilon_1|x_2| + \cdots + \varepsilon_1|x_n|$$

Egy durvább becslés:

$$|fl(S_n) - S_n| \leq n\varepsilon_1 \sum_{k=0}^{n} |x_k|$$

Ha minden x_k pozitív, akkor

$$\left| \frac{fl(S_n) - S_n}{S_n} \right| \leq n\varepsilon_1$$

Megjegyzések

- A lebegőpontos összeadás nem asszociatív

Példa

Vizsgálja meg számítógépén a $0.4 - 0.5 + 0.1 == 0$ és a $0.1 - 0.5 + 0.4 == 0$ logikai kifejezések értékét.

- Az elvégzett műveletek számának növekedésével a kerekítési hiba tipikusan nő. Matematikailag ekvivalens kifejezések értékére lényegesen különböző értékeket kaphatunk a gépi számítás során.

Példa

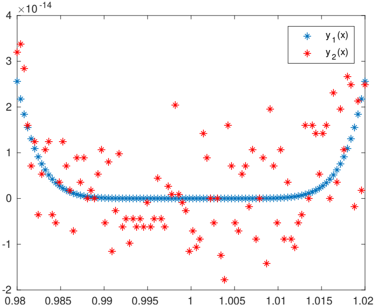
Az alábbi algoritmus végrehajtása után mennyi az x elméleti, illetve a gépi számítás után adódó értéke?

```
x=1/3;
for i=1:40
   x=4*x-1;
end
```

Példa

Számítógépén határozza meg és ábrázolja az 1 egy kis környezetében az $(x-1)^8$ kifejezés értéket az alábbi két (matematikailag ekvivalens) módon:

$$y_1(x) = (x-1)^8,$$
$$y_2(x) = x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1$$



Megjegyzések

- A kifejezések alkalmas átalakításával elkerülhető, hogy a köztes eredmények (és így a végeredmény is) túlcsorduljanak.

Példa

Legyen $x = (10^{200}, 1)$. Számítsa ki gépén az x normáját az alábbi két módon.

(a)

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

(b)

$$c = \max\{|x_1|, |x_2|\}, \quad \|x\| = c \cdot \sqrt{\left(\frac{x_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{c}\right)^2}$$

Normák, kondíciószámok

Példa

Az

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

egy.rendszer megoldása:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{pmatrix}$$

egy.rendszer megoldása:

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Példa

Tekintsük az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ahol

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ -1, & \text{ha } i < j, \\ 0, & \text{egyébként}, \end{cases} \qquad b = (-98, -97, \dots, 0, 1)^T.$$

Ennek megoldása az $x = (1, 1, \dots, 1)^T$ vektor.

Perturbáljuk a b vektort: legyen $b_{100} = 1.00001$, majd oldjuk meg az így kapott egyenletrendszert.

A megoldásvektor legnagyobb eleme $\approx 3.1691 \cdot 10^{24}$.

Egy minimális perturbáció a jobboldali vektorban $\to$ hatalmas változás a megoldásvektorban.

Normák, kondíciószámok

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható, $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$
az $Ax = b$ lin. egyenletrendszer megoldását keressük.

Tfh b hibával terhelten ismert: b helyett $b + \delta b$ adott.

Ekkor a lin. egy.rendszer:

$$Ay = b + \delta b$$

A kérdés: mekkora lehet $y - x$?

vektorokat kell mérnünk $\to$ normák

Norma

Legyen X egy lineáris tér $\mathbb{R}$ felett. Az $d : X \to \mathbb{R}$ leképezés **norma**, ha

1. $d(x) \geq 0$ minden $x \in X$ esetén
2. $d(x) = 0 \iff x = 0$
3. $d(\lambda x) = |\lambda| d(x)$, minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és $x \in X$ esetén
4. $d(x + y) \leq d(x) + d(y)$ minden $x, y \in X$ esetén
(háromszög-egyenlőtlenség)

A továbbiakban $d(x)$ helyett $\|x\|$

Példák:

Legyen $X = \mathbb{R}^n$

1. Az 1-norma, vagy oktaéder norma:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

2. A 2-norma, vagy euklideszi norma:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

3. A ∞-norma, vagy maximum norma:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

Általánosan:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

ahol $p \geq 1$.

Példa.

Ha

$$x = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

akkor
$\|x\|_1 = |-3| + |0| + |1| = 4$
$\|x\|_2 = \left(|-3|^2 + |0|^2 + |1|^2\right)^{1/2} = \sqrt{10}$
$\|x\|_\infty = \max\{|-3|, |0|, |1|\} = 3$

Indukált mátrixnorma

Legyen $\|\cdot\|$ egy vektornorma $\mathbb{R}^n$-en és $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy mátrix. Ekkor

$$d(A) := \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

a **vektornorma által indukált mátrixnorma**.

Megjegyzés. Ez tényleg normát definiál $\mathbb{R}^{n\times n}$-en:

1. $d(A) \geq 0$ minden $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$-re
2. $d(A) = 0 \iff A = 0$
3. $d(\lambda A) = |\lambda| d(A)$
4. $d(A+B) \leq d(A) + d(B)$

A továbbiakban $d(A)$ helyett $\|A\|$

Az indukált mátrixnormák tulajdonságai

(1) $\|E\| = 1$

(2) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén

(3) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ minden $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetén

Megjegyzés

Az indukált mátrixnormát definiálhattuk volna úgy is, hogy a legkisebb olyan M szám, melyre

$$\|Ax\| \leq M \cdot \|x\| \quad \text{minden } x \in \mathbb{R}^n \quad \text{esetén}$$

teljesül.

Milyen mátrixnormát indukálnak az általunk megismert vektornormák?

1. Az 1-vektornorma által indukált mátrixnorma:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(oszlopnorma)}$$

2. A ∞-vektornorma által indukált mátrixnorma:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(sornorma)}$$

3. A 2-vektornorma által indukált mátrixnorma:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \qquad \text{(spektrálnorma)}$$

ahol $\lambda_{\max}(A^T A)$ az $A^T A$ mátrix legnagyobb sajátértéke

Példa

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \|A\|_1 =? \quad \|A\|_\infty =?$$

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 7 \\ \leftarrow 4 \\ \leftarrow 5 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 6 & 2 & 8 \end{array} & \end{array}$$

$\|A\|_1 = 8$ és $\|A\|_\infty = 7$

Példa

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \|A\|_2 = ?$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

az $A^T A$ mátrix sajátértékei:

$$\begin{vmatrix} 13-\lambda & -7 \\ -7 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (13-\lambda)(5-\lambda) - 49 = \lambda^2 - 18\lambda + 16 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 64}}{2} = 9 \pm \sqrt{65}$$

$\|A\|_2 = \sqrt{9 + \sqrt{65}} \approx 4.13$

A kondíciószám

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható, $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$
az $Ax = b$ lin. egyenletrendszer megoldását keressük.

Tfh b hibával terhelten ismert: b helyett $b + \delta b$ adott. Ekkor a lin. egy.rendszer:

$$Ay = b + \delta b$$

vagy

$$A(x + \delta x) = b + \delta b$$

$$\underline{Ax} + A \cdot \delta x = \underline{b} + \delta b$$

$$A \cdot \delta x = \delta b$$

$$\delta x = A^{-1} \delta b$$

$$\|\delta x\| = \|A^{-1} \delta b\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|$$

Másrészt: $Ax = b$

$$\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$
$$\frac{1}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \frac{1}{\|b\|}$$

Így

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{cond(A):=} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

$$\boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq cond(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}$$

Megjegyzés

A fenti egyenlőtlenség éles.

Kondíciószám

Legyen A egy invertálható mátrix. A

$$cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

számot a mátrix **kondíciószám**ának nevezzük.

A kondíciószám tulajdonságai

(1) függ a mátrixnormától

(2) $cond(A) \geq 1$

(3) ha $A = Q$ ortogonális mátrix (azaz $Q^T Q = E$), akkor $cond_2(A) = 1$

(4)
$$\left|\frac{\lambda_{\text{max}}}{\lambda_{\text{min}}}\right| \leq cond(A)$$

ahol λ_{max} és λ_{min} az A absz.értékben legnagyobb és legkisebb sajátértéke

Megjegyzés

A kondíciószám felső becslést ad arra, hogy hibás jobboldallal adott lin. egy.rendszer esetén a megoldás relatív hibája a jobboldal relatív hibájának hányszorosa lehet.

Példa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}, \quad cond_\infty(A) = ?$$

Ekkor $\det(A) = 10^{-4}$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10001 & -10000 \\ -10000 & 10000 \end{pmatrix}$$

$\|A\|_\infty = 2.0001$ és $\|A^{-1}\|_\infty = 20001$, azaz

$cond_\infty(A) = 2.0001 \cdot 20001 \approx 40000.$

Az A mátrix a jobboldal relatív hibájának kb 40000-szeresére tudja növelni a megoldás relatív hibáját.

Példa

Legyen $A \in \mathbb{R}^{100}$ olyan, hogy

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ -1, & \text{ha } i < j, \\ 0, & \text{egyébként}, \end{cases} .$$

Ekkor $cond_\infty(A) = 100 \cdot 2^{99} \approx 6.3383 \cdot 10^{31}$

Megjegyzés

A kondíciószám nem függ a determinánstól: legyen $0 \neq c \in \mathbb{R}$, ekkor $\det(cA) = c^n \det(A)$, ugyanakkor $cond(cA) = cond(A)$.

Legyen b relatív hibája $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \approx \varepsilon_1$ (inputhiba nagyságrendű).
Ekkor ha

$$cond(A) \geq \frac{1}{\varepsilon_1}$$

akkor

$$cond(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \geq 1$$

azaz a megoldásra rakódó hiba ugyanakkora lehet, mint maga a megoldás.
Az egyenletrendszer **rosszul kondícionált**.

Ahhoz, hogy a megoldásnak legalább 1 helyes számjegye legyen

$$cond(A) \leq \frac{1}{a\varepsilon_1}$$

kell, mert ekkor

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{1}{a}$$

Példa (Hilbert-mátrix)

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & \cdots & 1/(n+2) \\ \vdots & & & & \\ 1/n & 1/(n+1) & 1/(n+2) & \cdots & 1/(2n-1) \end{pmatrix}$$

$cond_2(H_5) \approx 10^5$, $cond_2(H_{10}) \approx 10^{13}$

Példa

Legyen A egy szürkeskálás kép, $x = A(:)$.
D: egy torzítási mátrix, a főátlójában $\frac{1}{6}$-ok, az $5-5$ szomszédos mellékátlóban $\frac{1}{12}$-ek. $cond_1(D) \approx 10^9$.
$y_1 = Dx$ a torzított kép
$y_2 = y_1 +$ egy 0 várható értékű 0.01 szórású normális zaj.

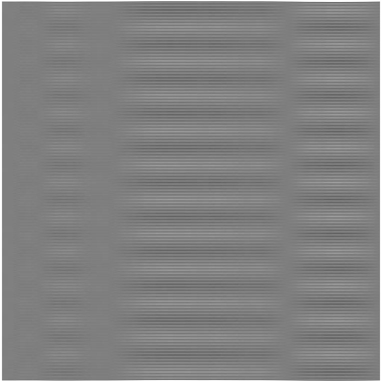
Az eredeti kép

A torzított kép

Torzítás + zaj

A helyreállított képek

$x = D\backslash y_1$



$x = D\backslash y_2$

Hibás mátrixú lineáris egyenletrendszer

Az $Ax = b$ rendszert akarjuk megoldani, ahol A invertálható.
Tfh A hibával terhelten adott: A helyett $B = A + \delta A$ ismert.

1. kérdés: B invertálható?

$$B = A + \delta A = A(E + A^{-1}\delta A)$$

Perturbációs lemma:

Legyen $S = E + R$, ahol $\|R\| = q < 1$. Ekkor S invertálható és

$$\|S^{-1}\| \leq \frac{1}{1-q}$$

Ha $\|\delta A\| < 1/\|A^{-1}\|$, akkor $\|A^{-1}\delta A\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| < 1$, így a perturbációs lemma miatt B invertálható.

Ekkor $Ax = b$ helyett $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$ megoldásával a megoldás relatív hibája

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{cond(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1 - cond(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

Lineáris egyenletrendszerek

Lineáris egyenletrendszerek megoldása

Példa

$$
\begin{aligned}
-2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 3\\
2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1\\
-4x_1 - 10x_2 - 5x_3 &= -12
\end{aligned}
$$

$Ax = b$, ahol

$$
A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}
$$

Gauss-elimináció:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ -4 & -10 & -5 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\ell_{21}=-1 \\ \ell_{31}=2}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -13 & -18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\ell_{32}=-4} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

A visszahelyettesítés:

$$\begin{aligned} -x_3 &= -2 & \rightarrow \quad x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 4 & \rightarrow \quad x_2 &= -1 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 3 & \rightarrow \quad x_1 &= 3 \end{aligned}$$

Gauss-elimináció

$Ax = b$, ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A kibővített mátrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Tfh $a_{11} \neq 0$. Az i-edik sorból az 1. sor $\ell_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$-szeresét levonva:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right)$$

Képletekkel: legyen $a_{ij}^{(1)} := a_{ij}$, ekkor

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \ell_{i1} a_{1j}^{(1)} \qquad \ell_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \ell_{i1} b_1^{(1)} \qquad \begin{array}{l} i = 2, \ldots, n, \\ j = 2, \ldots, n \end{array}$$

Ha $a_{22}^{(2)} \neq 0$ akkor az i-edik sorból az 2. sor $\ell_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$-szeresét levonva:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{array} \right)$$

A k-adik lépés képlettel (ha $a_{kk}^{(k)} \neq 0$):

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \ell_{ik} a_{kj}^{(k)} \qquad \ell_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \ell_{ik} b_k^{(k)} \qquad \begin{array}{l} i = k+1, \dots, n, \\ j = k+1, \dots, n \end{array}$$

Ha $a_{11}^{(1)} \neq 0$, $a_{22}^{(2)} \neq 0$, ... , $a_{n-1,n-1}^{(n-1)} \neq 0$, akkor az $(n-1)$-edik lépés után:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{array} \right)$$

Ha $a_{nn}^{(n)} \neq 0$, akkor elkezdődhet a visszahelyettesítés.

A sorcsere nélküli Gauss-elimináció pontosan akkor hajtható végre, ha $a_{11}^{(1)} \neq 0$, $a_{22}^{(2)} \neq 0$, ... ,$a_{nn}^{(n)} \neq 0$.

Műveletigény:

1 művelet := 1 összeadás + 1 szorzás

Az A mátrix átalakításához (eltekintve az ℓ_{ik} költségétől):

1. lépés: $(n-1)^2$ művelet

2. lépés: $(n-2)^2$ művelet

$\vdots$

$(n-1)$. lépés: 1 művelet

Összesen:

$$(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

A b vektor átalakításához:

1. lépés: $(n-1)$ művelet

2. lépés: $(n-2)$ művelet

$\vdots$

$(n-1)$. lépés: 1 művelet

Összesen:

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

A visszahelyettesítéshez n szorzással több:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

LU-felbontás

Példa

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

Gauss-elimináció:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\ell_{21} = -1 \\ \ell_{31} = 2}} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{pmatrix}$$

Mátrixos alakban:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{pmatrix}$$

Gauss-elimináció:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_{32} = -4} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mátrixos alakban:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}}_{L:=} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{U:=}$$

Az A mátrix **LU-felbontás**a:

$$A = LU$$

ahol
L alsóháromszög mátrix, átlójában csupa 1-es,
U felsőháromszög mátrix.

LU-felbontás

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \ell_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{41} & \ell_{42} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix}$$

Az $(n-1)$-edik lépés után:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$A = LU$$

LU-felbontás

Az A mátrix LU-felbontása:

$$A = LU$$

ahol
L alsóháromszög mátrix, átlójában csupa 1-es,
U felsőháromszög mátrix.

Az eredeti feladat: $Ax = b$ megoldása.

$$LUx = b$$

A mátrix felbontása után a megoldás két lépésben történik:
1. $Ly = b$
2. $Ux = y$

Mindkét rendszer mátrixa háromszög alakú.

A mátrix determinánsa

Ha $A = LU$, akkor a determinánsok szorzástétele alapján

$$\det(A) = \det(L) \cdot \det(U)$$

Háromszögmátrix determinánsa a főátlóban álló elemek szorzata, így $\det(L) = 1$ és

$$\det(A) = \det(U)$$

Az A determinánsa az U főátlóbeli elemeinek szorzata.

LU-felbontás

Példa (folytatás)

$Ax = b$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}$$

A mátrix felbontása:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{U}$$

A visszahelyettesítések:

1. $Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}$$

felülről lefelé visszahelyettesítve:

$$\begin{aligned} y_1 &= 3 \\ -y_1 + y_2 &= 1 \quad \rightarrow \quad y_2 = 4 \\ 2y_1 - 4y_2 + y_3 &= -12 \quad \rightarrow \quad y_3 = -2 \end{aligned}$$

2. $Ux = y$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

alulról felfelé visszahelyettesítve:

$$\begin{aligned} -x_3 = -2 \quad &\to \quad x_3 = 2 \\ 2x_2 + 3x_3 = 4 \quad &\to \quad x_2 = -1 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 3 \quad &\to \quad x_1 = 3 \end{aligned}$$

Az A determinánsa:

$$\det(A) = \det(U) = (-2) \cdot 2 \cdot (-1) = 4$$

Az **LU-felbontás műveletigénye** ugyanannyi, mint a Gauss-eliminációé:

A mátrix felbontása: $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$ művelet
A két visszahelyettesítés: összesen n^2 művelet

A **determináns kiszámítása** LU-felbontással: $\approx \frac{n^3}{3}$ művelet

Az LU-felbontás tárigénye:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tömören:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert LU-felbontással!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & -5 \\ 6 & -1 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & -10 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$A \to \begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & -3 \\ 2 & 4 & -12 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & \boxed{-2} & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & \boxed{-1} & -2 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Így

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{U}$$

A két visszahelyettesítés:

1. $Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= -3 & & \\ -2y_1 + y_2 &= -5 & \quad \rightarrow \quad & y_2 = -11 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 &= 2 & \quad \rightarrow \quad & y_3 = 0 \\ 2y_1 - 2y_2 + 4y_3 + y_4 &= 19 & \quad \rightarrow \quad & y_4 = 3 \end{aligned}$$

2. $Ux = y$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_4 &= 3 &\quad \rightarrow \quad & x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 &= 0 &\quad \rightarrow \quad & x_3 = -2 \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 &= -11 &\quad \rightarrow \quad & x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= -3 &\quad \rightarrow \quad & x_1 = -1 \end{aligned}$$

Az A mátrix determinánsa:

$$\det(A) = \det(U) = 2 \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 3 = 12$$

Cholesky-felbontás

Cholesky-felbontás

Az A felbontását $A = LL^T$ alakba, ahol L alsóháromszög mátrix, Cholesky-felbontásnak nevezzük.

Az A mátrixnak pontosan akkor létezik Cholesky felbontása invertálható L mátrixszal, ha A szimmetrikus és pozitív definit.

Mivel az L^T mátrixot nem szükséges kiszámítani és tárolni, ezért a tár- és műveletigény kb fele az LU-felbontás tár- és műveletigényének.

A felbontás k-adik lépése ($k = 1, \dots, n$):
(L-lel felülírva A-t)

$$
\begin{aligned}
a_{kk} &= \sqrt{a_{kk}} \\
a_{ik} &= \frac{a_{ik}}{a_{kk}}, \qquad\qquad i = k+1, \dots, n \\
a_{ij} &= a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{jk}, \quad j = k+1, \dots, n, \quad i = j, \dots, n
\end{aligned}
$$

A visszahelyettesítések:

1. $Ly = b$ (y-nal felülírva b-t)

$$b_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} b_j \right) / a_{ii}, \quad i = 1, \ldots, n$$

2. $L^T x = y$ (x-szel felülírva y-t)

$$b_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ji} b_j \right) / a_{ii}, \quad i = n, \ldots, 1$$

Példa:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \\ -6 & 4 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{3} & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & \boxed{2} & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

azaz

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{L^T}$$

A felbontás másképpen:

Az L-et oszloponként számítva a k-adik oszlop ($k = 1, \ldots, n$):

$$\ell_{kk} = \left(a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{kj}^2 \right)^{1/2},$$

$$\ell_{ik} = \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{ij}\ell_{kj} \right) / \ell_{kk}, \quad i = k+1, \ldots, n.$$

Megj.: itt is felülírható L-lel A.

A visszahelyettesítések ugyanúgy, mint az előbb.

PLU-felbontás (Gauss-elimináció sorcserével)

Permutációs mátrix: az egységmátrix sorainak permutálásával

Pl. az i-edik és j-edik sor cseréjével ($i < j$):

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i. \\ \\ \leftarrow j. \\ \\ \\ \end{array}$$

Ekkor

PA: az A mátrix i-edik és j-edik sora felcserélődik,

AP: az A mátrix i-edik és j-edik oszlopa felcserélődik.

Gauss-elimináció:

1. ha $a_{11} \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ végrehajtjuk az első lépést

2. ha $a_{11} = 0$ és $a_{i1} = 0$ minden $i = 2, \ldots, n$-re $\quad \rightarrow \quad$ az első oszlopban nincs kiküszöbölendő elem $\quad \rightarrow \quad$ a 2. lépéssel folytathatjuk

3. ha $a_{11} = 0$, de van olyan i, hogy $a_{i1} \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ sorcsere

Ha P_1 az 1. és i-edik sort cseréli:

$$A = P_1 A_1 \quad \rightarrow \quad A_1\text{-re kezdődhet a felbontás}$$

az 1. lépés után:

$$A = P_1 A_1 = P_1 L_1 A^{(2)}$$

a 2. lépés:

1. ha $a_{22}^{(2)} \neq 0 \quad \to \quad$ végrehajtjuk a 2. lépést

2. ha $a_{22}^{(2)} = 0$ és $a_{i2}^{(2)} = 0$ minden $i = 3, \dots, n$-re $\quad \to \quad$ a 2. oszlopban nincs kiküszöbölendő elem $\quad \to \quad$ a köv. lépéssel folytathatjuk

3. ha $a_{22}^{(2)} = 0$, de van olyan $i > 2$, hogy $a_{i2}^{(2)} \neq 0 \quad \to \quad$ sorcsere

Ha P_2 a 2. és i-edik sort cseréli:

$$A^{(2)} = P_2 A_2$$

$$A = P_1 L_1 P_2 A_2$$

$$L_1 P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ \ell_{i1} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ \ell_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \ell_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ \ell_{i1} & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ \ell_{n1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= P_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{i1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ \ell_{21} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ \ell_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =: P_2 \widetilde{L}_1$$

$$A = P_1 P_2 \widetilde{L}_1 A_2$$

$\rightarrow$ folytatható a felbontás.

Az $(n-1)$-edik lépés után:

$$A = \underbrace{P_1 P_2 \cdots P_{n-1}}_{P:=} LU$$

azaz

$$A = PLU$$

ahol

P: permutációs mátrix

L: alsóháromszög mátrix, átlójában 1-esek

U: felsőháromszög mátrix

Az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldása:

$$A = PLU$$

$$LUx = P^{-1}b$$

- 1. $Ly = P^{-1}b$ megoldása
- 2. $Ux = y$ megoldása

Feladatok

(1) Határozza meg az alábbi mátrix inverzét Gauss-Jordan eliminációval!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Oldja meg az $Ax = b$ egyenletrendszert LU-felbontással. Határozza meg $\det(A)$ értékét!

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & 8 \\ -2 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & -4 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}$$

Feladatok

(3) Oldja meg az $Ax = b$ egyenletrendszert LU-felbontással. Határozza meg $\det(A)$ értékét!

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 2 & 5 \\ -6 & -6 & -3 & -7 \\ 0 & -6 & -6 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -2 \\ 32 \end{pmatrix}$$

(4) Határozza meg az A mátrix Cholesky-felbontását!

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & -2 \\ -4 & 13 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

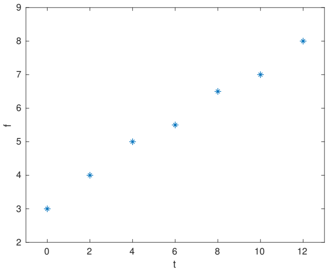
Legkisebb négyzetek módszere

Példa

Egy fél méter magas, téglatest alakú víztartályt egyenletes sebességgel töltenek fel vízzel. Amikor a tartályban 3 cm magasan áll a víz Péter elhatározza, hogy megméri a vízszint változását az idő függvényében. A következő méréseket végezte:

t_i (min)	0	2	4	6	8	10	12
f_i (cm)	3	4	5	5.5	6.5	7	8

Becsülje meg milyen magasan lesz a víz 20 perccel azután, hogy Péter elindította a mérést! Mikor indították el a tartály feltöltését? Kb mikor lesz tele a tartály?

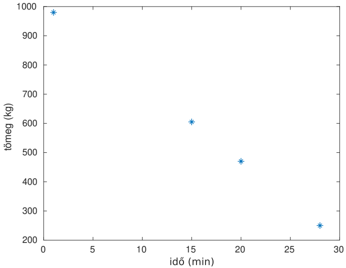


Példa

Egy ipari mérlegen egy nagyobb mennyiségű gabona van, amit valaki egyenletes sebességgel lapátol a mérlegről zsákokba. Miután elkezdte a munkát, időnként megnézzük mennyit mutat a mérleg. Az alábbi értékeket láttuk:

idő (min)	1	15	20	28
tömeg (kg)	980	605	470	250

Becsüljük meg mennyi ideig tart, amíg az összes gabonát zsákokba rakja, illetve eredetileg mennyi gabona volt a mérlegen.



Legkisebb négyzetek módszere

Adottak a
$t_1, t_2, \ldots, t_m$ időpillanatokban az
$f_1, f_2, \ldots, f_m$ megfigyelések.

A folyamatot leíró $F(t)$ modell paramétereit keressük.

Egyenes illesztése
A modell:

$$F(t) = a + bt$$

Olyan a, b paramétereket keresünk, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} (F(t_i) - f_i)^2$$

minimális legyen.

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_m \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Ekkor

$$Ax = \begin{pmatrix} a + bt_1 \\ a + bt_2 \\ \vdots \\ a + bt_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(t_1) \\ F(t_2) \\ \vdots \\ F(t_m) \end{pmatrix}$$

Olyan a, b paramétereket keresünk, melyekkel

$$J(x) = \sum_{i=1}^{m} (F(t_i) - f_i)^2 = \|Ax - f\|_2^2$$

minimáis.

$$J(x) = \sum_{i=1}^{m} (F(t_i) - f_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} (a + bt_i - f_i)^2$$

Minimum csak ott lehet, ahol

$$\frac{\partial J(x)}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial J(x)}{\partial b} = 0$$

$$\frac{\partial J(x)}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{m}(a + bt_i - f_i)$$

és

$$\frac{\partial J(x)}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{m}(a + bt_i - f_i)t_i$$

Átrendezve:

$$ma + b\sum_{i=1}^{m} t_i = \sum_{i=1}^{m} f_i$$

$$a\sum_{i=1}^{m} t_i + b\sum_{i=1}^{m} t_i^2 = \sum_{i=1}^{m} t_i f_i$$

Mátrixalakban:

$$\begin{pmatrix} m & \sum\limits_{i=1}^{m} t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{m} t_i & \sum\limits_{i=1}^{m} t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m} f_i \\ \sum\limits_{i=1}^{m} t_i f_i \end{pmatrix}$$

A mátrix determinánsa:

$$m \sum_{i=1}^{m} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} t_i \right)^2 \geq 0$$

és $= 0 \quad \iff \quad$ az összes t_i megegyezik:

$$t_1 = t_2 = \cdots = t_m =: t_0$$

1. Ha van legalább két különböző t_i érték, akkor a rendszer egyértelműen megoldható. A megoldás a J minimumhelye lesz.

2. Ha $t_1 = t_2 = \cdots = t_m =: t_0$, akkor

$$\begin{pmatrix} m & mt_0 \\ mt_0 & mt_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m} f_i \\ t_0 \sum\limits_{i=1}^{m} f_i \end{pmatrix}$$

a 2. egyenlet az első t_0-szorosa $\quad \rightarrow \quad$ végtelen sok megoldás.

$$b = s \in \mathbb{R}, \quad a = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} f_i - st_0$$

Ha $b = 0$

$$a = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} f_i$$

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes egyenletét!

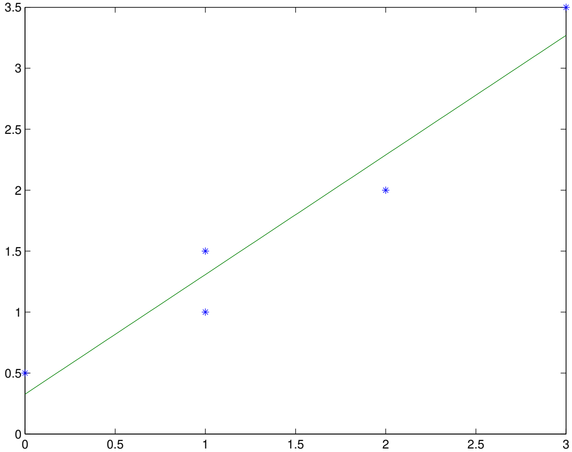
t_i	0	1	1	2	3
f_i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{7}{2}$

A modell: $F(t) = a + b \cdot t$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 15 & -7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{52} \\ \frac{51}{52} \end{pmatrix}$$

Az illesztett modell: $F(t) = \frac{17}{52} + \frac{51}{52} t$



3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes egyenletét!

t_i	2	2	2	2	2
f_i	1	1	2	2	2

A modell: $F(t) = a + b \cdot t$

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$5a + 10b = 8$$

$$b = s \in \mathbb{R}, \qquad a = \frac{8}{5} - 2s$$

Ha $s = 0$, akkor $F(t) \equiv \frac{8}{5}$

Legkisebb négyzetes közelítések

Adottak a
$t_1, t_2, \ldots, t_m$ időpillanatokban az
$f_1, f_2, \ldots, f_m$ megfigyelések.

A folyamatot leíró

$$F(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi_j(t)$$

modell paramétereit keressük úgy, hogy

$$J(x) = \sum_{i=1}^{m} (F(t_i) - f_i)^2$$

minimális legyen.

x_j: ismeretlen paraméterek $(j = 1, \ldots, n)$
$\varphi_j(t)$: adott függvények $(j = 1, \ldots, n)$

Példák a modellre:

1. $n = 2$ és $\varphi_1(t) \equiv 1$, $\varphi_2(t) = t$:

$$F(t) = x_1 + x_2 t$$

(egyenes illesztése)

2. $\varphi_1(t) \equiv 1$, $\varphi_2(t) = t$, ..., $\varphi_n(t) = t^{n-1}$:

$$F(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + \cdots + x_n t^{n-1}$$

(polinomiális modell)

3. $n = 3$ és $\varphi_1(t) \equiv 1$, $\varphi_2(t) = \sin(\pi t)$, $\varphi_3(t) = \cos(\pi t)$:

$$F(t) = x_1 + x_2 \sin(\pi t) + x_3 \cos(\pi t)$$

(trigonometrikus modell)

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \dots & \varphi_n(t_1) \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) & \dots & \varphi_n(t_2) \\ \vdots & & & \\ \varphi_1(t_m) & \varphi_2(t_m) & \dots & \varphi_n(t_m) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

Ekkor

$$Ax = \begin{pmatrix} F(t_1) \\ F(t_2) \\ \vdots \\ F(t_m) \end{pmatrix}$$

A minimalizálandó függvény:

$$J(x) = \sum_{i=1}^{m} (F(t_i) - f_i)^2 = \|Ax - f\|_2^2$$

Minimum csak ott lehet, ahol

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ez az alábbi lineáris egyenletrendszerre vezet:

$$A^T A x = A^T f$$

(**Gauss-féle normálegyenlet**)

Gauss-féle normálegyenlet

$$A^T A x = A^T f$$

- **a Gauss-féle normálegyenlet mindig megoldható**
- **A megoldás a legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő modell paramétereit adja.**
- **Ha az A mátrix oszlopvektorai lineárisan függetlenek, akkor a Gauss-féle normálegyenletnek egyetlen megoldása van.**

  Ha az A oszlopvektorai függőek (az $A^T A$ mátrix szinguláris), akkor végtelen sok megoldás van.

  Szingularitás esetén javasolható:
  - több adat felvétele
  - a modell egyszerűsítése

Példa

Ha a modell lineáris: $F(t) = x_1 + x_2 t$, akkor $\varphi_1(t) \equiv 1$ és $\varphi_2(t) = t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \\ 1 & t_m \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} m & \sum_{i=1}^m t_i \\ \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 \end{pmatrix}, \qquad A^T f = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m f_i \\ \sum_{i=1}^m t_i f_i \end{pmatrix}$$

szingularitás: az A oszlopvektorai lineárisan függőek, azaz

$$t_1 = t_2 = \cdots = t_m$$

Példa

Ha a modell polinomiális: $F(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + \cdots + x_n t^{n-1}$

azaz $\varphi_1(t) \equiv 1$, $\varphi_2(t) = t$, ..., $\varphi_n(t) = t^{n-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & t_m & t_m^2 & \dots & t_m^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} m & \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^m t_i^{n-1} \\ \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 & \sum_{i=1}^m t_i^3 & \dots & \sum_{i=1}^m t_i^n \\ \sum_{i=1}^m t_i^2 & \sum_{i=1}^m t_i^3 & \dots & \dots & \\ \vdots & & & & \\ \sum_{i=1}^m t_i^{n-1} & & & \dots & \sum_{i=1}^m t_i^{2n-2} \end{pmatrix}$$

$$A^T f = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m} f_i \\ \sum\limits_{i=1}^{m} f_i t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{m} f_i t_i^2 \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{m} f_i t_i^{n-1} \end{pmatrix}$$

a feladat egyértelműen megoldható, ha a $t_1, t_2, \dots, t_m$ értékek között legalább n különböző van

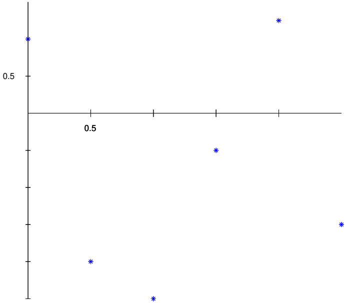
Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 + x_2 \cos(\pi t) + x_3 \sin(\pi t)$$

alakú modellt!

t_i	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
f_i	1	-2	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{2}$



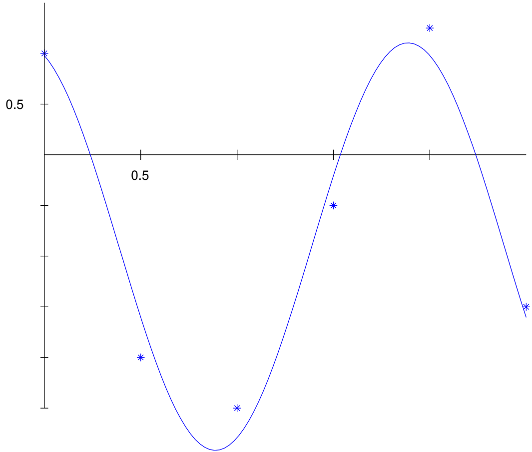
$\varphi_1(t) \equiv 1$, $\varphi_2(t) = \cos(\pi t)$, $\varphi_3(t) = \sin(\pi t)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\pi t_1) & \sin(\pi t_1) \\ 1 & \cos(\pi t_2) & \sin(\pi t_2) \\ \vdots & & \\ 1 & \cos(\pi t_6) & \sin(\pi t_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^T f = \begin{pmatrix} -\frac{17}{4} \\ \frac{19}{4} \\ -3 \end{pmatrix}$$

Az $A^T A x = A^T f$ Gauss-féle normálegyenlet megoldása:

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{29}{32} \\ \frac{181}{96} \\ -\frac{67}{96} \end{pmatrix}$$


0.5
0.5

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 + x_2 \cos(\pi t) + x_3 \sin(\pi t)$$

alakú modellt!

t_i	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
f_i	1	-2	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Az A oszlopai lineárisan függőek $\to$ $A^T A$ szinguláris

A szingularitás kezelése:

1. több adat felvétele (ld. előző példa)
2. a modell egyszerűsítése:

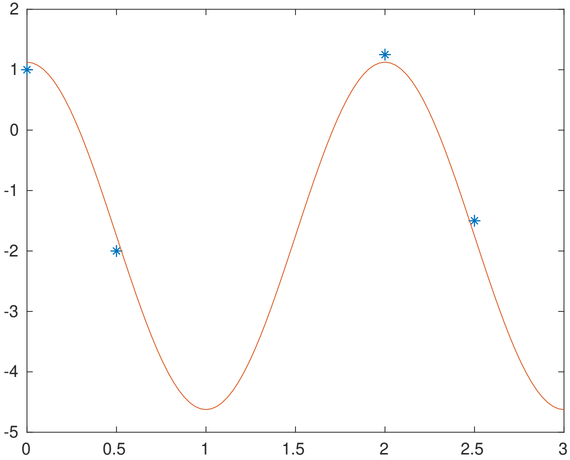
$$F(t) = x_1 + x_2 \cos(\pi t)$$

Ekkor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Az $A^T A x = A^T f$ Gauss-féle normálegyenlet megoldása:

$$x = \begin{pmatrix} -1.750 \\ 2.875 \end{pmatrix}$$



2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Példa

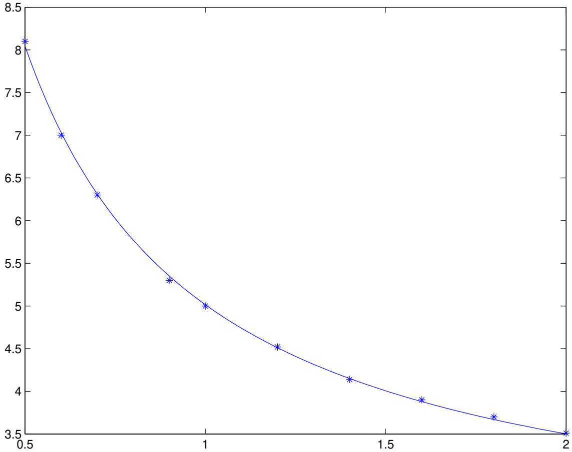
Határozzuk meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő $F(t) = a + \frac{b}{t}$ alakú modell paramétereit!

t_i	0.5	0.6	0.7	0.9	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
f_i	8.1	7	6.3	5.3	5	4.52	4.14	3.9	3.7	3.51

$$m = 10, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t_1} \\ 1 & \frac{1}{t_2} \\ \vdots & \\ 1 & \frac{1}{t_{10}} \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 10 & \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{t_i} \\ \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{t_i} & \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{t_i^2} \end{pmatrix}, \qquad A^T f = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{10} f_i \\ \sum_{i=1}^{10} \frac{f_i}{t_i} \end{pmatrix}$$

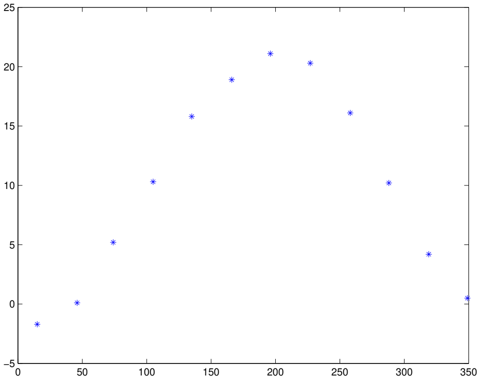
Megj.: Az $\left(\frac{1}{t_i}, f_i\right)$ adatokra illesztettünk egyenest.


8.5
8
7.5
7
6.5
6
5.5
5
4.5
4
3.5
0.5
1
1.5
2

Példa

Havi középhőmérsékletek átlagai Budapesten (1901-1950)

t_i	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
f_i	-1.7	0.1	5.2	10.3	15.8	18.9	21.1	20.3	16.1	10.2	4.2	0.5



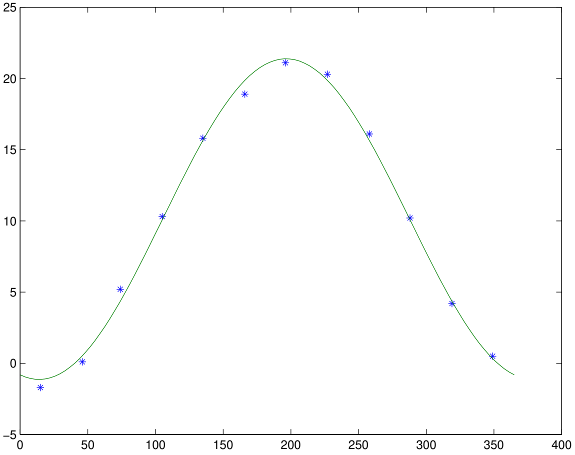
A modell:

$$F(t) = x_1 + x_2 \cos\left(2\pi \frac{t-14}{365}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cos\left(2\pi \frac{t_1-14}{365}\right) \\ 1 & \cos\left(2\pi \frac{t_2-14}{365}\right) \\ \vdots & \\ 1 & \cos\left(2\pi \frac{t_{12}-14}{365}\right) \end{pmatrix}$$

Az $A^T A x = A^T f$ Gauss-féle normálegyenlet megoldása (4 tizedesjegyre kerekítve):

$$x = \begin{pmatrix} 10.1248 \\ -11.2577 \end{pmatrix}$$


25
20
15
10
5
0
−5
0
50
100
150
200
250
300
350
400

Feladatok

- Határozza meg az alábbi adatokat legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő egyenes egyenletét.

t_1	0	1	2	3
f_i	0.5	1.5	2	3

- Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes egyenletét!

t_i	0	1	1	2	3
f_i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$

Feladatok

- Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 + \frac{x_2}{t}$$

alakú függvényt!

t_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
f_i	8	6	4	$\frac{5}{2}$

- Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 + x_2 \cdot \sin^2\left(\frac{t\pi}{2}\right)$$

alakú függvényt!

t_i	0	$\frac{1}{2}$	1	2
f_i	$\frac{1}{2}$	1	1	0

Interpoláció

Lagrange-interpoláció

A feladat:

Adottak az
$x_0, x_1, \ldots, x_n$ páronként különböző pontokban az
$f_0, f_1, \ldots, f_n$ megfigyelések.

Olyan minimális fokszámú $\varphi(x)$ polinomot keresünk melyre

$$\varphi(x_i) = f_i, \quad i = 0, \ldots, n$$

Állítás: Egyértelműen létezik olyan legfeljebb n-edfokú polinom, amely teljesíti a

$$\varphi(x_i) = f_i, \quad i = 0, \ldots, n$$

illeszkedési feltételeket.

Biz.: (A polinom konstrukciója)
Legyen

$$\ell_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

azaz

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, \dots, n$$

Ekkor $\ell_i(x)$ egy n-edfokú polinom és

$$\ell_i(x_k) = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq i, \\ 1, & \text{ha } k = i \end{cases}$$

Legyen

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \ell_i(x)$$

Ekkor $\varphi(x)$ legfeljebb n-edfokú, és

$$\varphi(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f_i \ell_i(x_k) = f_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

azaz $\varphi(x)$ eleget tesz a követelményeknek.

Egyértelműség

Tfh $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ legfeljebb n-edfokú polinomok, melyek teljesítik az illeszkedési feltételeket:

$$\varphi(x_i) = f_i \quad \text{és } \psi(x_i) = f_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

Legyen $\Phi(x) = \varphi(x) - \psi(x)$

Ekkor Φ legfeljebb n-edfokú, és minden alappontban eltűnik
$\to$ a $\Phi(x)$ polinomnak legalább $n+1$ különböző gyöke van
$\to \quad \Phi(x) \equiv 0$

A Lagrange-polinom rekurzív előállítása (Newton-alak)

Jelölje $L_k(x)$ az (x_0, f_0), (x_1, f_1),..., (x_k, f_k) adatokra illeszkedő Lagrange-polinomot.

- ha csak 1 adat ismert, (x_0, f_0):

  $L_0(x) \equiv f_0$

- ha 2 adat ismert, (x_0, f_0), (x_1, f_1):

  $L_1(x) = L_0(x) + b_1(x - x_0)$

  Ekkor $L_1(x_0) = L_0(x_0) = f_0$. Ezután b_1-et úgy határozzuk meg, hogy $L_1(x_1) = f_1$ teljesüljön:

$$L_1(x_1) = f_0 + b_1(x_1 - x_0) = f_1$$

$$b_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

- ha 3 adat ismert, (x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2):

  $L_2(x) = L_1(x) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$

  Ekkor
  $L_2(x_0) = L_1(x_0) = f_0$ és
  $L_2(x_1) = L_1(x_1) = f_1$.

  b_2-t úgy határozzuk meg, hogy $L_2(x_2) = f_2$ teljesüljön:

$$b_2 = \frac{1}{x_2 - x_0}\left(\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_2 - x_0}\right)$$

- Ha $k+1$ adat ismert, (x_0, f_0), (x_1, f_1),..., (x_k, f_k):

  $L_k(x) = L_{k-1}(x) + b_k\omega_k(x)$

  ahol $\omega_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i)$.

  Ekkor

  $$L_k(x_0) = L_{k-1}(x_0) = f_0,$$
  $$L_k(x_1) = L_{k-1}(x_1) = f_1,$$
  $$\vdots$$
  $$L_k(x_{k-1}) = L_{k-1}(x_{k-1}) = f_{k-1}.$$

  b_k-t úgy határozzuk meg, hogy $L_k(x_k) = f_k$ teljesüljön:

  $$b_k = (f_k - L_{k-1}(x_k))/\omega_k(x_k)$$

  Hogyan lehet egyszerűen előállítani a b_k együtthatókat?

Osztott differenciák

Tfh adottak az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ páronként különböző alappontok és az $f_0, f_1, \ldots, f_n$ értékek.
Az x_i, x_{i+1} pontokra támaszkodó elsőrendű osztott differencia:

$$[x_i, x_{i+1}]f := \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Az $x_i, \ldots, x_{i+k}$ pontokra támaszkodó k-adrendű osztott differencia:

$$[x_i, \ldots, x_{i+k}]f = \frac{[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]f - [x_i, \ldots, x_{i+k-1}]f}{x_{i+k} - x_i}$$

Legyen $[x_i]f = f_i$.

Állítás: A Lagrange-polinom Newton-alakjában

$$b_k = [x_0, \ldots, x_k]f$$

Számítási séma

$$
\begin{array}{c|llllll}
x_0 & [x_0]f \searrow & & & & & \\
 & & [x_0,x_1]f \searrow & & & & \\
x_1 & [x_1]f \nearrow & & [x_0,x_1,x_2]f \searrow & & & \\
 & \qquad \searrow & [x_1,x_2]f \nearrow & & \dots & & \\
\vdots & & \vdots & & & \searrow & \\
\vdots & & \vdots & & & & [x_0,\dots,x_n]f \\
\vdots & & \vdots & & \dots \nearrow & & \\
x_{n-1} & [x_{n-1}]f \searrow & & & & & \\
 & & [x_{n-1},x_n]f \nearrow & & & & \\
x_n & [x_n]f \nearrow & & & & &
\end{array}
$$

A Lagrange-polinom Newton-alakja

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
x_0 & [x_0]f & \searrow & & & & & & & \\
 & & & [x_0,x_1]f & \searrow & & & & & \\
x_1 & [x_1]f & \nearrow & & & [x_0,x_1,x_2]f & \searrow & & & \\
 & & \searrow & [x_1,x_2]f & \nearrow & & & \dots & & \\
\vdots & & \vdots & & & & & & \searrow & \\
\vdots & & \vdots & & & & & & & [x_0,\ldots,x_n]f \\
\vdots & & \vdots & & & & & \dots & \nearrow & \\
x_{n-1} & [x_{n-1}]f & \searrow & & & & & & & \\
 & & & [x_{n-1},x_n]f & \nearrow & & & & & \\
x_n & [x_n]f & \nearrow & & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
L_n(x) = [x_0]f &+ [x_0,x_1]f \cdot (x-x_0) + [x_0,x_1,x_2]f \cdot (x-x_0)(x-x_1) \\
&+ \cdots + [x_0,\ldots,x_n]f \cdot (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Példa

Határozzuk meg a $(-2,-31),(-1,-7),(0,-1),(2,5)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & -31 & & & \\
 & & 24 & & \\
-1 & -7 & & -9 & \\
 & & 6 & & 2 \\
0 & -1 & & -1 & \\
 & & 3 & & \\
2 & 5 & & &
\end{array}
$$

$$L_3(x) = -31 + 24(x+2) - 9(x+2)(x+1) + 2(x+2)(x+1)x$$

Megjegyzés

A Lagrange-polinom nem függ az adatok sorrendjétől, így választhattuk volna a táblázat alsó "élét" is:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & -31 & & & \\
 & & 24 & & \\
-1 & -7 & & -9 & \\
 & & 6 & & \color{red}{2} \\
0 & -1 & & \color{red}{-1} & \\
 & & \color{red}{3} & & \\
2 & \color{red}{5} & & &
\end{array}
$$

$$L_3(x) = \color{red}{5} + \color{red}{3}(x-2)\color{red}{-1} \cdot (x-2)x + \color{red}{2}(x-2)x(x+1)$$

Mindkét esetben

$$L_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$$

Példa

Határozzuk meg a $(-2,-5),(-1,3),(1,-5),(2,-9)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

$$
\begin{array}{r|ccccccc}
-2 & -5 & & & & & & \\
 & & & 8 & & & & \\
-1 & 3 & & & & -4 & & \\
 & & & -4 & & & & 1 \\
1 & -5 & & & & 0 & & \\
 & & & -4 & & & & \\
2 & -9 & & & & & &
\end{array}
$$

$$L_3(x) = -5 + 8(x+2) - 4(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1)(x-1)$$

Példa

Határozzuk meg azt a minimális fokszámú polinomot, amely az előző adatokon kívül a $(0, 9)$ pontra is illeszkedik!

Használjuk fel az előző feladat eredményét!

$$\begin{array}{r|rrrr}
-2 & -5 & & & \\
 & & 8 & & \\
-1 & 3 & & -4 & \\
 & & -4 & & 1 \\
1 & -5 & & 0 & \\
 & & -4 & & \\
2 & -9 & & &
\end{array}$$

Egészítsük ki a táblázatot az új adattal és számítsuk ki a hiányzó értékeket!

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-2 & -5 & & & & \\
 & & 8 & & & \\
-1 & 3 & & -4 & & \\
 & & -4 & & 1 & \\
1 & -5 & & 0 & & 2 \\
 & & -4 & & 5 & \\
2 & -9 & & 5 & & \\
 & & -9 & & & \\
0 & 9 & & & &
\end{array}
$$

$$L_4(x) = L_3(x) + 2(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$$

Feladat

Határozza meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot.

(a)

x_i	-2	-1	1	2
f_i	-21	-1	3	23

(b)

x_i	-2	-1	0	2
f_i	-7	1	1	25

(c)

x_i	-2	-1	0	2
f_i	-14	-3	2	-6

Horner-algoritmus

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ahol $a_n \neq 0$. Legyen $x^\star \in \mathbb{R}$ adott, $p(x^\star) =?$

$$p(x^\star) = (((\cdots(a_n x^\star + a_{n-1})x^\star + \cdots)x^\star + a_2)x^\star + a_1)x^\star + a_0$$

Az algoritmus:

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_n \\
c_1 &= c_0 x^\star + a_{n-1} \\
c_2 &= c_1 x^\star + a_{n-2} \\
&\vdots \\
c_n &= c_{n-1} x^\star + a_0 = p(x^\star)
\end{aligned}$$

Táblázatban:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
$x^\star$	c_0	c_1	$\cdots$	c_{n-2}	c_{n-1}	c_n

$p(x^\star) = c_n$

Példa

$$p(x) = 2x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 5x - 1, \qquad p(-2) = ?$$

	2	3	0	-3	5	-1
-2	2	-1	2	-7	19	-39

$p(-2) = -39$

Általánosított Horner-algoritmus

$$\begin{aligned}L_n(x) = & b_0 + b_1 \cdot (x - x_0) + b_2 \cdot (x - x_0)(x - x_1) + \\ & + \dots + b_n \cdot (x - x_0)(x - x_1)(x - x_{n-1})\end{aligned}$$

ahol $b_k = [x_0, \dots, x_k]f$. $L_n(x^\star) = ?$

$$\begin{aligned}c_0 &= b_n \\ c_1 &= c_0(x^\star - x_{n-1}) + b_{n-1} \\ c_2 &= c_1(x^\star - x_{n-2}) + b_{n-2} \\ &\vdots \\ c_n &= c_{n-1}(x^\star - x_0) + b_0 = L_n(x^\star)\end{aligned}$$

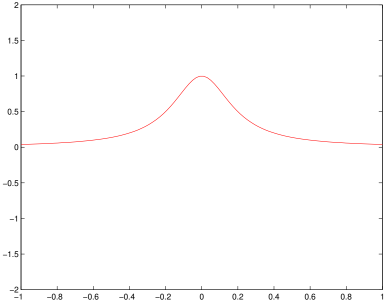
Megjegyzés

Ha nincs szükségünk a Lagrange-polinom együtthatóira, csak bizonyos helyeken a polinom értékeire, akkor nem érdemes a Newton-alakban kibontani a zárójeleket.

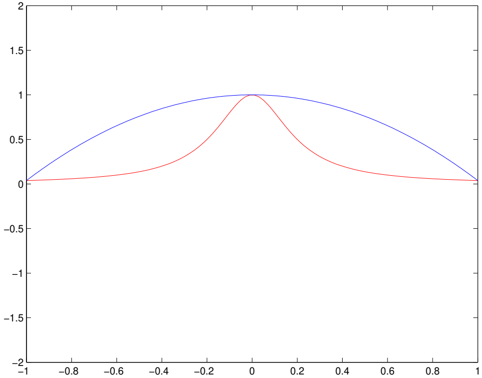
Megjegyzés

Ha egy függvényt szeretnénk közelíteni úgy, hogy elkészítjük adott alappontok esetén az illeszkedő Lagrange-polinomot, akkor az alappontok számának növelésével a hiba nem feltétlenül csökken, sőt akár tetszőlegesen naggyá válhat.

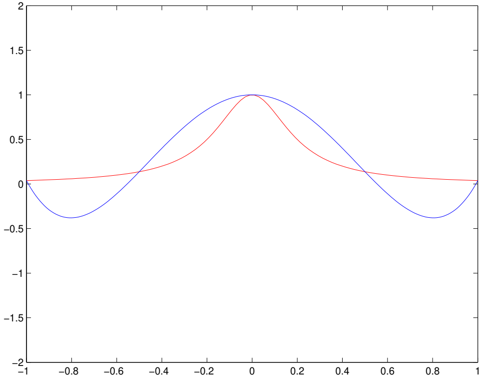
Példa: Az $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ függvény $[-1, 1]$ fölött



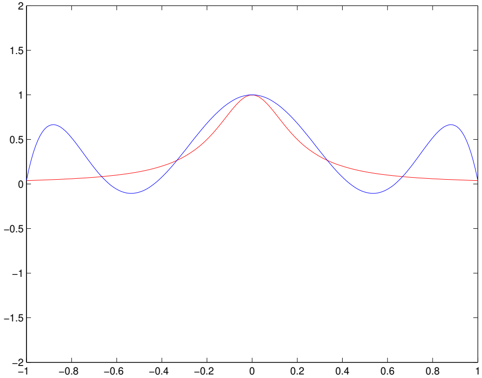
Lagrange-interpoláció, $n = 2$



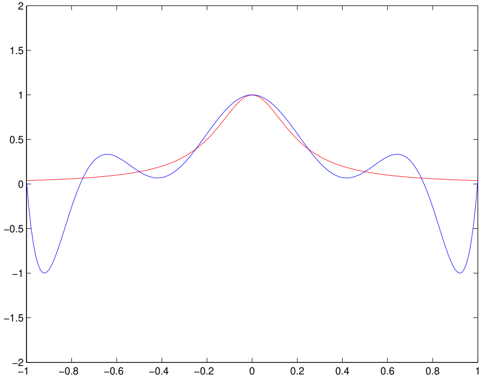
Lagrange-interpoláció, $n = 4$



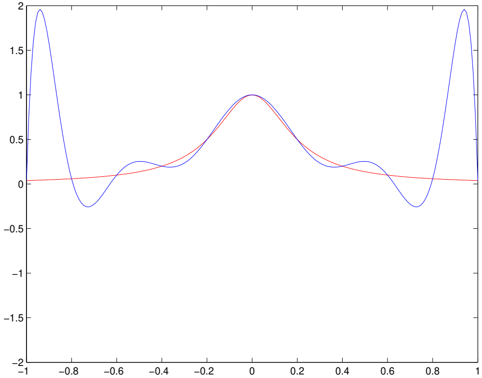
Lagrange-interpoláció, $n = 6$



Lagrange interpoláció, $n = 8$



Lagrange-interpoláció, $n = 10$

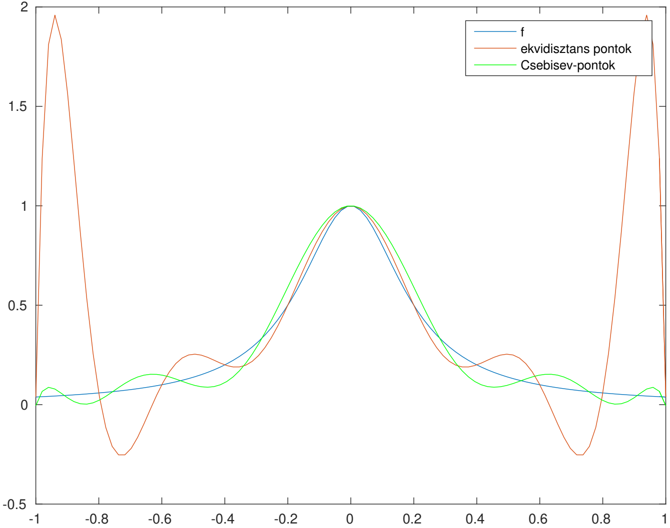


Megjegyzés

Ha az $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ függvényre n helyen illeszkedő Lagrange-polinomot szeretnénk elkészíteni, akkor az

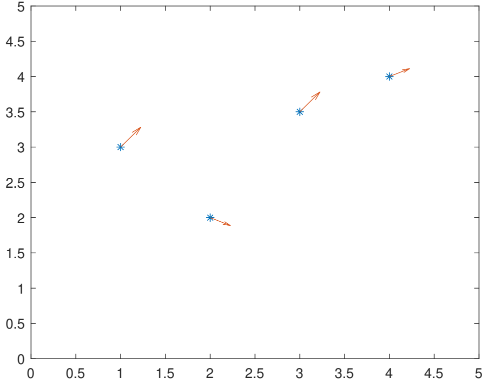
$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

alappontok (Csebisev-pontok) esetén lesz minimális a polinom és a függvény legnagyobb eltérése.
Ha f nem a $[-1, 1]$ intervallumon értelmezett, akkor megfelelő lineáris transzformációval leképezzük a pontokat a megadott intervallumra.


f
ekvidisztans pontok
Csebisev-pontok
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Hermite-interpoláció

Előfordulhat, hogy az alappontokban nem csak a függvény értéke van előírva, hanem az is, hogy a polinom a megadott pontokon ,,milyen irányban" haladjon át, azaz az alappontokban az első derivált értéke is, vagy esetleg további deriváltértékek is.



Hermite-interpoláció

A feladat:

Adottak

$$\begin{array}{rllllll}
\text{az} & x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & \text{alappontok } (x_i \neq x_j, \text{ ha } i \neq j) \\
\text{és az} & f_{00} & f_{10} & f_{20} & \dots & f_{n0} & \\
& f_{01} & f_{11} & f_{21} & \dots & f_{n1} & \\
& f_{02} & f_{12} & f_{22} & \dots & f_{n2} & \\
& \vdots & & & & & \\
& f_{0,m_0-1} & f_{1,m_1-1} & f_{2,m_2-1} & \dots & f_{n,m_n-1} & \text{értékek}
\end{array}$$

Olyan $H(x)$ polinomot keresünk, melyre

$$H^{(j)}(x_i) = f_{ij}, \qquad i = 0, 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m_i - 1.$$

Legyen $m = \sum_{i=0}^{n} m_i$, az illeszkedési feltételek száma

Állítás: Az Hermite-interpoláció feladata egyértelműen megoldható a legfeljebb $(m-1)$-edfokú polinomok körében.

Hermite-interpoláció

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

x_i	-2	-1	1
$f(x_i)$	1	6	-2
$f'(x_i)$	74	-12	-4
$f''(x_i)$		16	

Az illeszkedési feltételek száma: $m = 7$, így az Hermite-polinom legfeljebb 6-odfokú lesz.

Az adatok:

x_i	-2	-1	1
$f(x_i)$	1	6	-2
$f'(x_i)$	74	-12	-4
$f''(x_i)$		16	

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & 1 & & \\
 & & 74 & \\
-2 & 1 & & \\
 & & & \\
-1 & 6 & & \\
 & & -12 & \\
-1 & 6 & & 8 \\
 & & -12 & \\
-1 & 6 & & \\
 & & & \\
1 & -2 & & \\
 & & -4 & \\
1 & -2 & &
\end{array}
$$

Számítsuk ki a hiányzó értékeket!

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & 1 & & \\
 & & 74 & \\
-2 & 1 & & \\
 & & & \\
-1 & 6 & & \\
 & & -12 & \\
-1 & 6 & & 8 \\
 & & -12 & \\
-1 & 6 & & \\
 & & & \\
1 & -2 & & \\
 & & -4 & \\
1 & -2 & &
\end{array}
$$

A hiányzó elsőrendű osztott differenciák:

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & 1 & & \\
 & & 74 & \\
-2 & 1 & & \\
 & & 5 & \\
-1 & 6 & & \\
 & & -12 & \\
-1 & 6 & & 8 \\
 & & -12 & \\
-1 & 6 & & \\
 & & -4 & \\
1 & -2 & & \\
 & & -4 & \\
1 & -2 & & \\
\end{array}
$$

A hiányzó másodrendű osztott differenciák:

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & 1 & & \\
 & & 74 & \\
-2 & 1 & & -69 \\
 & & 5 & \\
-1 & 6 & & -17 \\
 & & -12 & \\
-1 & 6 & & 8 \\
 & & -12 & \\
-1 & 6 & & 4 \\
 & & -4 & \\
1 & -2 & & 0 \\
 & & -4 & \\
1 & -2 & &
\end{array}
$$

A harmadrendű osztott differenciák:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 1 & & & \\
 & & 74 & & \\
-2 & 1 & & -69 & \\
 & & 5 & & 52 \\
-1 & 6 & & -17 & \\
 & & -12 & & 25 \\
-1 & 6 & & 8 & \\
 & & -12 & & -2 \\
-1 & 6 & & 4 & \\
 & & -4 & & -2 \\
1 & -2 & & 0 & \\
 & & -4 & & \\
1 & -2 & & &
\end{array}
$$

A negyedrendű osztott differenciák:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-2 & 1 & & & & \\
 & & 74 & & & \\
-2 & 1 & & -69 & & \\
 & & 5 & & 52 & \\
-1 & 6 & & -17 & & -27 \\
 & & -12 & & 25 & \\
-1 & 6 & & 8 & & -9 \\
 & & -12 & & -2 & \\
-1 & 6 & & 4 & & 0 \\
 & & -4 & & -2 & \\
1 & -2 & & 0 & & \\
 & & -4 & & & \\
1 & -2 & & & &
\end{array}
$$

Az ötödrendű osztott differenciák:

-2	1					
		74				
-2	1		-69			
		5		52		
-1	6		-17		-27	
		-12		25		6
-1	6		8		-9	
		-12		-2		3
-1	6		4		0	
		-4		-2		
1	-2		0			
		-4				
1	-2					

A hatodrendű osztott differencia:

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
-2 & 1 & & & & & & \\
 & & 74 & & & & & \\
-2 & 1 & & -69 & & & & \\
 & & 5 & & 52 & & & \\
-1 & 6 & & -17 & & -27 & & \\
 & & -12 & & 25 & & 6 & \\
-1 & 6 & & 8 & & -9 & & -1 \\
 & & -12 & & -2 & & 3 & \\
-1 & 6 & & 4 & & 0 & & \\
 & & -4 & & -2 & & & \\
1 & -2 & & 0 & & & & \\
 & & -4 & & & & & \\
1 & -2 & & & & & &
\end{array}
$$

-2	**1**						
		74					
-2	1		**-69**				
		5		**52**			
-1	6		-17		**-27**		
		-12		25		**6**	
-1	6		8		-9		**-1**
		-12		-2		3	
-1	6		4		0		
		-4		-2			
1	-2		0				
		-4					
1	-2						

$$
\begin{aligned}
H(x) =&\mathbf{1} + \mathbf{74}(x+2) - \mathbf{69}(x+2)^2 + \mathbf{52}(x+2)^2(x+1) \\
&-\mathbf{27}(x+2)^2(x+1)^2 + \mathbf{6}(x+2)^2(x+1)^3 \\
&-\mathbf{1}(x+2)^2(x+1)^3(x-1)
\end{aligned}
$$

Feladat

Határozza meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

(a)

x_i	-1	1	2
$f(x_i)$	2	0	-28
$f'(x_i)$	5	-7	

(b)

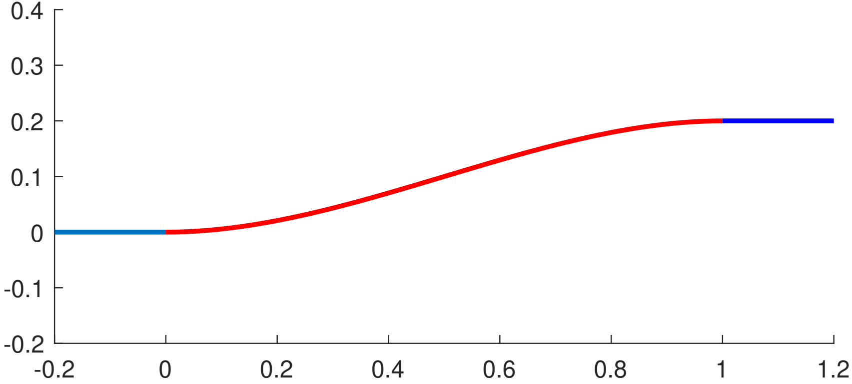
x_i	-2	0	1
$f(x_i)$	-20	2	-2
$f'(x_i)$	51		-12

(c)

x_i	-1	1
$f(x_i)$	-3	3
$f'(x_i)$	11	3
$f''(x_i)$	-24	

Feladat

Egy garázs bejárata az úttól 1 méterre, az úttest szintje felett 20 cm-rel van. Tervezze meg az úttestet a bejárattal összekötő útszakaszt úgy, hogy a bejutás a garázsba minél simább legyen.



Példa

Legyen az f valós függvény differenciálható az x_0 pontban. Hermite-interpoláció segítségével írjuk fel az f függvény x_0-beli értintőjének egyenletét!

Azt a $H(x)$ legfeljebb elsőfokú Hermite-polinomot keressük, melyre $H(x_0) = f(x_0)$ és $H'(x_0) = f'(x_0)$

$$\begin{array}{c|cc} x_0 & f(x_0) & \\ & & f'(x_0) \\ x_0 & f(x_0) & \end{array}$$

$$H(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Példa

Írjuk fel az x_0, $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ...,$f^{(n)}(x_0)$ adatokra illeszkedő Hermite-polinomot!

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_0 & f(x_0) & & & & & \\
 & & f'(x_0) & & & & \\
x_0 & f(x_0) & & \frac{f''(x_0)}{2!} & & & \\
 & & f'(x_0) & & \frac{f'''(x_0)}{3!} & & \\
x_0 & f(x_0) & & \frac{f''(x_0)}{2!} & & \ddots & \\
 & & f'(x_0) & & & & \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \\
x_0 & f(x_0) & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & \\
x_0 & f(x_0) & & & & & \\
 & & f'(x_0) & & & & \\
x_0 & f(x_0) & & & & &
\end{array}
$$

Ekkor

$$H(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

az f függvény x_0 körüli Taylor-polinomja.

Szakaszonkénti interpoláció

Az alappontok számának növelésével nő az illesztett polinom fokszáma, de a közelítés hibája nem feltétlenül csökken.

Egyetlen magas fokszámú polinom illesztése helyett részintervallumonként alacsonyabb fokszámú polinomok

Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot m darab részintervallumra:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$$

Minden $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon végezzük el a Lagrange-interpolációt!

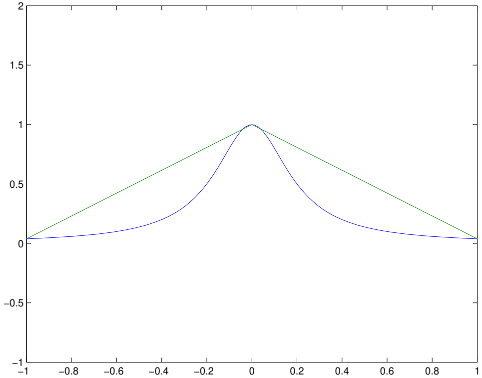
Ha az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon csak az $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$ adatok ismertek, akkor **szakaszonkénti lineáris interpoláció** (töröttvonal interpoláció)

Ha $h := x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, m$, és f kétszer folyt. diff.ható $[a, b]$-n, akkor az $L_{m\times 1}(x)$ töröttvonalra:

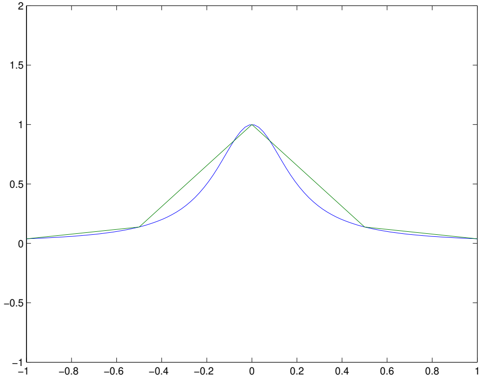
$$|f(x) - L_{m\times 1}(x)| \leq \frac{M_2}{8} h^2, \qquad x \in [a, b]$$

Ez tart 0-hoz, ha $h \to 0$

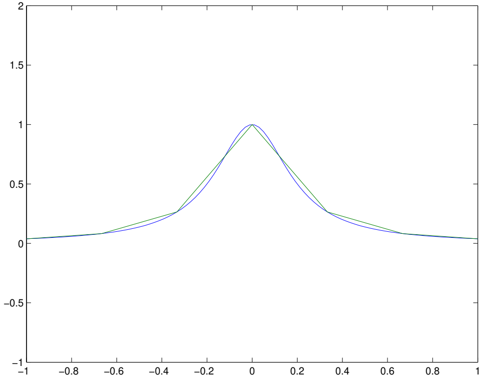
Szakaszonként lineáris interpoláció, 2 részintervallum



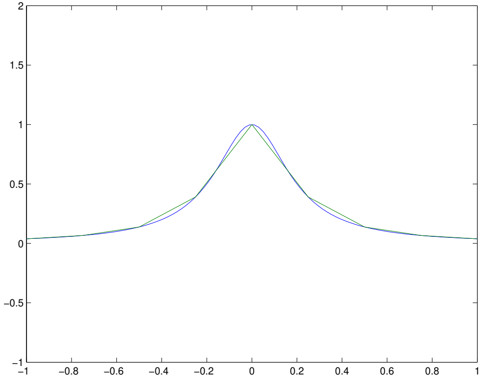
Szakaszonként lineáris interpoláció, 4 részintervallum



Szakaszonként lineáris interpoláció, 6 részintervallum



Szakaszonként lineáris interpoláció, 8 részintervallum



Szakaszonként harmadfokú Hermite-interpoláció

A töröttvonal interpolációval illesztett függvény folytonos, de az osztópontokban "törik", azaz nem differenciálható.

Sima (folytonosan differenciálható) függvény illesztése: az osztópontokban előírjuk az 1. derivált értékét is.

Ekkor az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon az

x_{i-1}	x_i
$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$
$f'(x_{i-1})$	$f'(x_i)$

adatok ismertek. 4 illeszkedési feltétel $\rightarrow$ legfeljebb harmadfokú polinom

Példa

Határozzuk meg azt a folytonosan differenciálható, szakaszonként harmadfokú

$$H(x) = \begin{cases} H_1(x), & \text{ha} \quad x \in [-1, 1] \\ H_2(x), & \text{ha} \quad x \in (1, 3] \end{cases}$$

polinomot, melyre $H(-1) = 4$, $H(1) = 6$, $H(3) = 12$, $H'(-1) = -3$, $H'(1) = 13$, $H'(3) = 9$ teljesül!

x_i	-1	1	3
$H(x)$	4	6	12
$H'(x)$	-3	13	9

$$\begin{array}{r|cccc}
-1 & 4 & & & \\
 & & -3 & & \\
-1 & 4 & & 2 & \\
 & & 1 & & 2 \\
1 & 6 & & 6 & \\
 & & 13 & & \\
1 & 6 & & &
\end{array}$$

x_i	-1	1	3
$H(x)$	4	6	12
$H'(x)$	-3	13	9

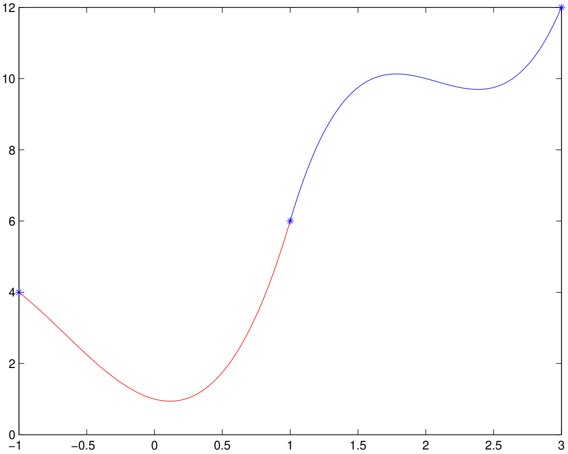
$$H_1(x) = 6 + 13(x-1) + 6(x-1)^2 + 2(x-1)^2(x+1)$$

$$\begin{array}{r|cccc}
1 & 6 & & & \\
 & & 13 & & \\
1 & 6 & & -5 & \\
 & & 3 & & 4 \\
3 & 12 & & 3 & \\
 & & 9 & & \\
3 & 12 & & &
\end{array}$$

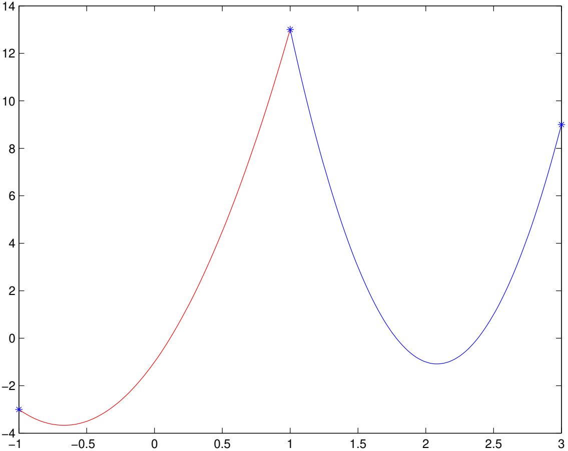
x_i	-1	1	3
$H(x)$	4	6	12
$H'(x)$	-3	13	9

$$H_2(x) = 6 + 13(x-1) - 5(x-1)^2 + 4(x-1)^2(x-3)$$

A H_1 és H_2 polinomok:



A H_1 és H_2 első deriváltja:



Harmadfokú spline-interpoláció

Ha a részintervallumok találkozásánál megköveteljük az 1. derivált folytonosságát, de nem írjuk elő a derivált értékét, akkor marad 1 szabad paraméterünk:

x_i	-1	1	3
$H(x)$	4	6	12
$H'(x)$	-3	α	9

$$
\begin{array}{r|cccc}
-1 & 4 & & & \\
 & & -3 & & \\
-1 & 4 & & 2 & \\
 & & 1 & & \frac{\alpha-5}{4} \\
1 & 6 & & \frac{\alpha-1}{2} & \\
 & & \alpha & & \\
1 & 6 & & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|cccc}
1 & 6 & & & \\
 & & \alpha & & \\
1 & 6 & & \frac{3-\alpha}{2} & \\
 & & 3 & & \frac{3+\alpha}{4} \\
3 & 12 & & 3 & \\
 & & 9 & & \\
3 & 12 & & &
\end{array}
$$

$$H_1(x) = 6 + \alpha(x-1) + \frac{\alpha - 1}{2}(x-1)^2 + \frac{\alpha - 5}{4}(x-1)^2(x+1)$$
$$H_2(x) = 6 + \alpha(x-1) + \frac{3 - \alpha}{2}(x-1)^2 + \frac{3 + \alpha}{4}(x-1)^2(x-3)$$

A szabad paraméter lehetőséget ad még egy feltétel állítására: követeljük meg a 2. derivált folytonosságát is!

$$H_1''(1) = 2\alpha - 6$$
$$H_2''(1) = -2\alpha$$

Ekkor $H_1''(1) = H_2''(1)$-ből

$$2\alpha - 6 = -2\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{3}{2}$$

Harmadfokú spline-interpoláció alapötlete

Adottak

x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$
$f'(x_0)$					$f'(x_n)$

Olyan $S(x)$ függényt keresünk, melyre

- $S(x_i) = f(x_i)$
- $S'(x_0) = f'(x_0)$ és $S'(x_n) = f'(x_n)$
- $S|_{[x_{i-1},x_i]} = S_i$ harmadfokú polinom, $i = 1, \dots, n$
- S kétszer folytonosan differenciálható

1. Bevezetjük az $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ ismeretleneket:

$$\begin{array}{cccccc}
x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\
\hline
f(x_0) & f(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_{n-1}) & f(x_n) \\
f'(x_0) & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & f'(x_n)
\end{array}$$

2. Felírjuk az $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumok fölött az $S_i(x)$ harmadfokú Hermite-polinomokat.

3. Felírjuk az $S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i)$ egyenleteket ($i = 1, \dots, n-1$). Ezek az α_i ismeretlenekre egy lineáris egyenletrendszert adnak.

4. Megoldjuk az egyenletrendszert. (Az egyenletrendszer mátrixa tridiagonális.)

Numerikus integrálás

Integrálközelítések.

Az

$$\mathcal{I}(f) := \int_a^b f(x)dx$$

határozott integrált szeretnénk kiszámítani, ahol $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Miért lehet szükség integrálközelítésre?

- f nem elemien integrálható
- f primitív függvényének felírása bonyolult
- nagyszámú integrál kiszámítására van szükségünk
- f nem explicit képlettel adott, csak bizonyos pontokban ismerjük az értékét

Az $\mathcal{I}(f)$ közelítését

$$\mathcal{I}_n(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$$

alakban keressük, ahol

$x_1, \ldots, x_n$ a közelítés alappontjai, ($x_i \in [a, b]$),

$a_1, \ldots, a_n$ súlyok (melyek az f függvénytől nem függnek).

$\mathcal{I}_n(f)$: kvadratúraképlet (szabad paraméterei: n, $x_1, \ldots, x_n$, $a_1, \ldots, a_n$)

Interpolációs kvadratúraképletek.

Legyenek adottak az $x_1, \dots, x_n$ alappontok.

Közelítsük f-et az $x_1, \dots, x_n$-re támaszkodó Lagrange polinomjával:

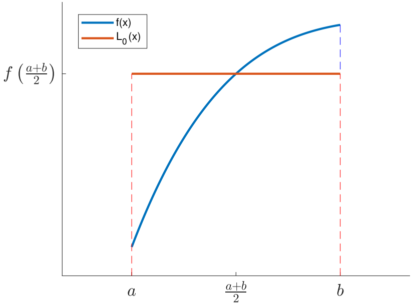
$$f(x) \approx L_{n-1}(x).$$

$$\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_{n-1}dx = \mathcal{I}_n(f)$$

Egyszerű érintőképlet.

$n = 1$, azaz 1 alappont adott, és ez az $\frac{a+b}{2}$ pont.

Ekkor a közelítő polinom egy konstansfüggvény: $L_0(x) \equiv f\left(\frac{a+b}{2}\right)$



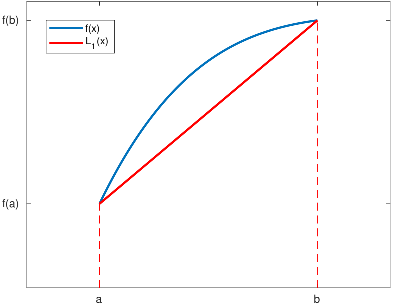
$$\boxed{\mathcal{I}_1(f) = (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

A képlet pontos minden legfeljebb elsőfokú polinom esetén.

Egyszerű trapéz-képlet.

$n = 2$, azaz 2 alappont adott, és ezek az intervallum végpontjai: a és b.

Ekkor a f-et az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ adatokra illeszkedő egyenessel közelítjük.



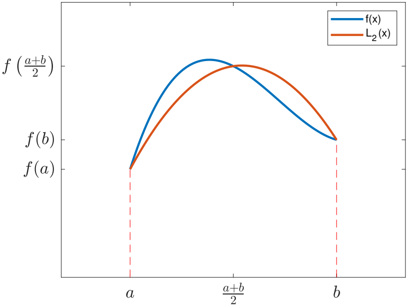
$$\boxed{\mathcal{I}_2(f) = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}}$$

A képlet pontos minden legfeljebb elsőfokú polinom esetén.

Egyszerű Simpson-képlet.

$n = 3$, azaz 3 alappont adott, és ezek az a, $\frac{a+b}{2}$ és b pontok.

Az f-et egy másodfokú polinommal közelítjük.



$$\boxed{\mathcal{I}_3(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}$$

A képlet pontos minden legfeljebb harmadfokú polinom esetén.

Összetett képletek.

Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot m egyforma hosszúságú részintervallumra:

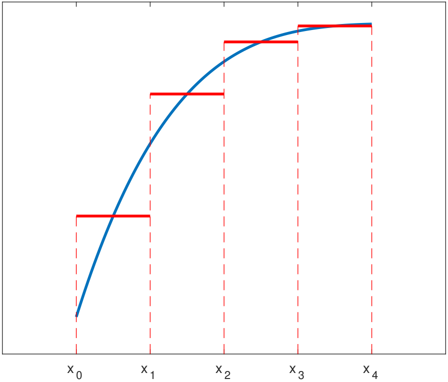
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b,$$

A részintervallumok hosszát jelölje h:

$$h := \frac{b-a}{m} = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Minden részintervallumon alkalmazzuk ugyanazt az egyszerű képletet.

Összetett érintőképlet



Összetett érintőképlet

$$\mathcal{I}_{m\times 1}(f) = h\left[f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_1+\frac{h}{2}\right)+\ldots f\left(x_{m-1}+\frac{h}{2}\right)\right]$$

azaz

$$\mathcal{I}_{m\times 1}(f) = h\sum_{i=0}^{m-1} f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$$

Az összetett érintőképlet hibája:

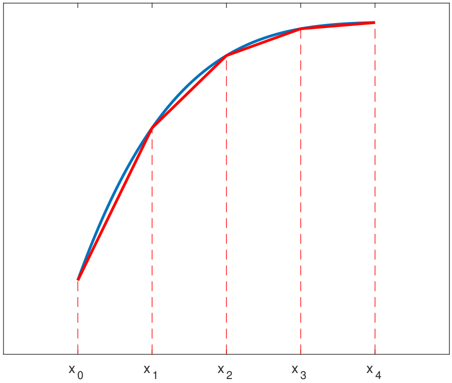
Ha f kétszer folytonosan differenciálható, akkor

$$|\mathcal{I}(f)-\mathcal{I}_{m\times 1}(f)| \le \frac{(b-a)^3}{24m^2}M_2,$$

ahol $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$

A képlet pontos minden legfeljebb elsőfokú polinom esetén.

Összetett trapéz-képlet



Összetett trapéz-képlet.

$$\mathcal{I}_{m\times 2}(f) = h\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{m-1}) + \frac{f(x_m)}{2}\right].$$

azaz

$$\mathcal{I}_{m\times 2}(f) = h\left[\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + \frac{f(x_m)}{2}\right]$$

Az összetett trapéz-képlet hibája:

Ha f kétszer folytonosan differenciálható, akkor

$$|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_{m\times 2}(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12m^2} M_2,$$

ahol $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

A képlet pontos minden legfeljebb elsőfokú polinom esetén.

Összetett Simpson-képlet.

$$\mathcal{I}_{m\times 3} = \frac{h}{6}\left[f(x_0) + 4f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + 2f(x_1) + 4f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \dots\right.$$
$$\left. + 2f(x_{m-1}) + 4f\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}\right) + f(x_m)\right].$$

azaz

$$\mathcal{I}_{m\times 3} = \frac{h}{6}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=0}^{m-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m)\right]$$

Az összetett Simpson-képlet hibája:
Ha f négyszer folytonosan differenciálható, akkor

$$|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_{m\times 3}(f)| \le \frac{(b-a)^5}{2880m^4} M_4,$$

ahol $M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

A képlet pontos minden legfeljebb harmadfokú polinom esetén.

Összetett képletek konvergenciája

Tétel.

Ha az n pontra épülő egyszerű képlet pontos a konstans függények esetén, akkor

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{I}_{m\times n}(f) = \int_a^b f(x)dx$$

minden Riemann-integrálható f függvény esetén.

Példa.

Közelítsük

$$\int_4^{5.2} \ln x dx$$

értékét összetett trapéz-képlettel úgy, hogy az intervallumot 6 részintervallumra osztjuk! Becsüljük meg a közelítés hibáját!

$m = 6$
A részintervallumok hossza: $h = (b - a)/m = 0.2$

Az alappontok:
$x_0 = 4$, $x_1 = 4.2$, $x_2 = 4.4$, $x_3 = 4.6$, $x_4 = 4.8$, $x_5 = 5$, $x_6 = 5.2$

Az integrálközelítés:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{6\times 2} &= 0.2\left(\frac{\ln 4}{2} + \ln 4.2 + \ln 4.4 + \cdots + \ln 5 + \frac{\ln 5.2}{2}\right)\\ &= 1.82765.\end{aligned}$$

A közelítés hibája:

$$|\mathcal{I} - \mathcal{I}_{m\times 2}| \leq \frac{(b-a)^3}{12 \cdot m^2} M_2,$$

ahol $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

Esetünkben $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $M_2 = \frac{1}{16}$,

$$|\mathcal{I} - \mathcal{I}_{6\times 2}| \leq \frac{1.2^3}{12 \cdot 6^2} \cdot \frac{1}{16} = 0.00025.$$

Példa.

Közelítsük

$$\int_4^{5.2} \ln x dx$$

értékét összetett Simpson-képlettel úgy, hogy az intervallumot 3 részintervallumra osztjuk! Becsüljük meg a közelítés hibáját!

$m = 3,\ h = (b - a)/m = 0.4$

$x_0 = 4,\ x_1 = 4.4,\ x_2 = 4.8,\ x_3 = 5.2$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{3\times 3} &= \frac{0.4}{6} \left(\ln 4 + 4 \ln 4.2 + 2 \ln 4.4 + \cdots + 4 \ln 5 + \ln 5.2\right) \\ &= 1.82785.\end{aligned}$$

A közelítés hibája:

$$|\mathcal{I} - \mathcal{I}_{m\times 3}| \leq \frac{(b-a)^5}{2880 \cdot m^4} M_4,$$

ahol $M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

Esetünkben $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$, $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$, $M_4 = \frac{6}{4^4} = \frac{3}{128}$,

$$|\mathcal{I} - \mathcal{I}_{3\times 3}| \leq \frac{1.2^5}{2880 \cdot 3^4} \cdot \frac{3}{128} = 0.00000025.$$

Példa.

Becsüljük meg hány részintervallumra kell osztani az alapintervallumot, ha

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x) dx$$

értékét összetett trapéz-képlettel szeretnénk közelíteni úgy, hogy a hiba kisebb legyen, mint $0.5 \cdot 10^{-2}$.

$$|\mathcal{I} - \mathcal{I}_{m\times 2}| \leq \frac{(b-a)^3}{12 \cdot m^2} M_2.$$

Itt $f(x) = \ln(\cos x)$,

$f'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$

$f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$,

tehát $M_2 = 2$.

$$\frac{(b-a)^3}{12 \cdot m^2} M_2 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{12m^2} \cdot 2$$

m értékét úgy határozzuk meg, hogy

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{12m^2} \cdot 2 < 0.5 \cdot 10^{-2}$$

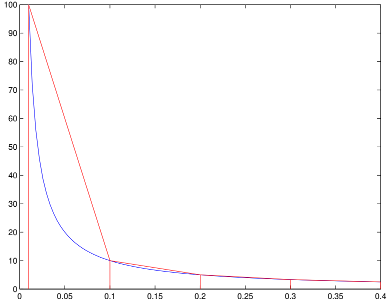
teljesüljön:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \cdot 10^2 < m^2,$$

$$4.019 < m.$$

Adaptív eljárások

- a kvadratúra képlet költsége arányos a függvénykiértékelések (alappontok) számával
- az ekvidisztáns alappontrendszer időnként indokolatlanul sok számítást igényel



Adaptív eljárások

A függvény viselkedését figyelembe véve a számítás költsége csökkenthető

- Az aktuális intervallumon végezzük el az integrál közelítését két különböző módon (vagy ugyanazt a kvadratúra képletet alkalmazzuk két különböző -pl n és $2n$- alappontszám esetén, vagy ugyanarra az alappontszámra két különböző kvadratúra képletet)
- ha a két közelítés eltérése abszolútértékben nagyobb, mint $h_i\varepsilon/(b-a)$ (ahol ε adott, h_i az aktuális intervallum hossza), akkor az intervallumot osszuk fel két egyforma hosszúságú részintervallumra, és mindkettőre ismételjük meg az eljárást

Nemlineáris egyenletek

Nemlineáris egyenletek

Az $f(x) = 0$ egyenlet gyökeit keressük, ahol $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nemlineáris függvény.

Példa:

$$\cos(x) - x = 0$$

vagy

$$x^5 - 3x^4 + x^3 - 5x^2 + 3 = 0$$

vagy

$$e^x - 4x^2 = 0$$

vagy

$$\ln(x) - x + 2 = 0$$

A gyök numerikus közelítése

Az $f(x) = 0$ egyenlet gyökét egy $\{x_k\}$, $k = 0, 1, 2, ...$ sorozattal (iteráció) fogjuk közelíteni.

A közelítés adott, ha adott

- az x_0 kiindulópont,
- az algoritmus x_{k+1} meghatározására, ha x_k már ismert,
- a leállási feltétel.

1. Felezési módszer

Tfh $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, és $f(a) \cdot f(b) < 0$
Ekkor az

$$f(x) = 0$$

egyenletnek van gyöke (a, b)-ben.

Az algoritmus

Adott a maximális iterációszám (maxit) és az ε pontosság.

1. legyen $k = 1$, $x_0 = a$ és $x_1 = b$
2. legyen $x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}$
3. a) ha $f(x_2) = 0$, akkor x_2 gyök $\to$ kilépés (eredmény: x_2)
   b) ha $f(x_0) \cdot f(x_2) < 0$, akkor $x_1 = x_2$
   c) ha $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, akkor $x_0 = x_2$

   ha $|x_1 - x_0| < \varepsilon \to$ kilépés (eredmény: x_2)

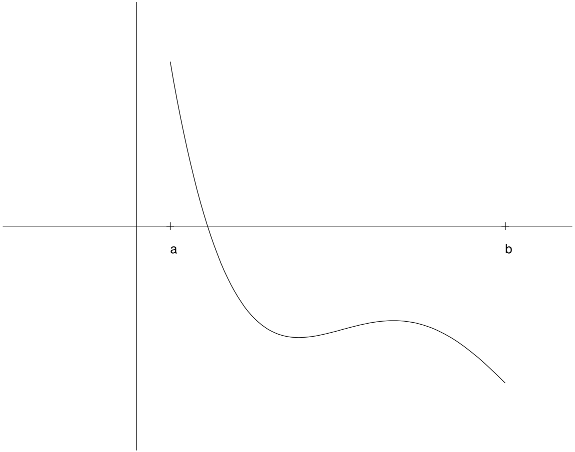
   $k := k + 1$

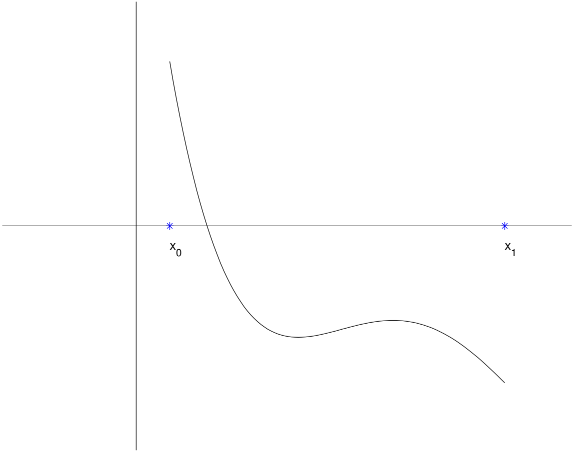
   ha $k = maxit \to$ kilépés (maxit lépésben nem találtunk gyököt)

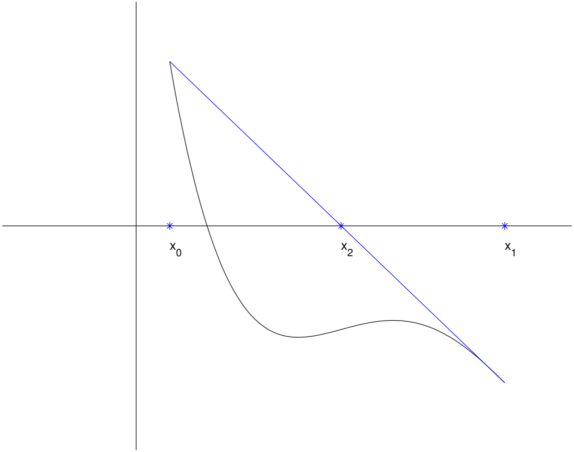
   $\to 2.$

2. Húrmódszer

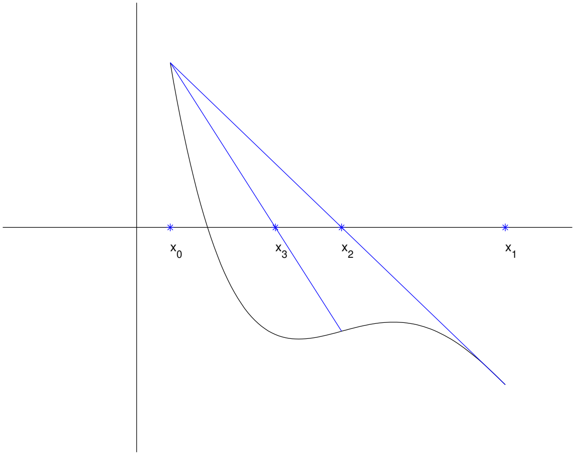
Az $f(x) = 0$ nemlineáris egyenlet gyökét keressük, ahol $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, továbbá $f(a) \cdot f(b) < 0$ és f folytonos.

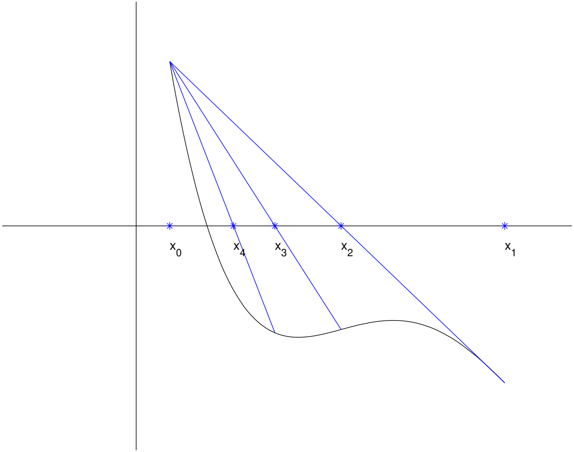



x0
x1

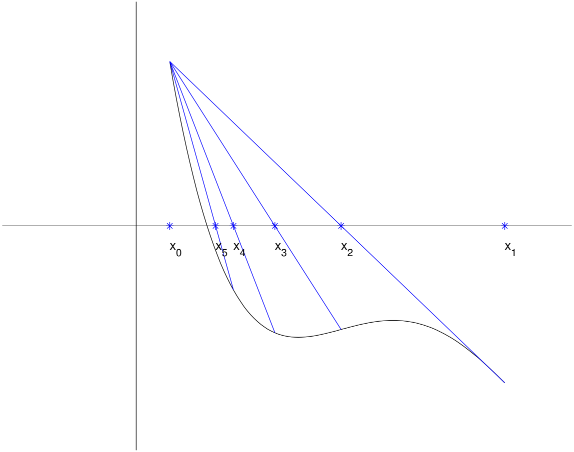


x0
x2
x1


x0
x3
x2
x1



x0
x4
x3
x2
x1


x0
x5
x4
x3
x2
x1

Húrmódszer

$x_0 = a$, $x_1 = b$.
Az x_2 pont meghatározása:

Az $(x_0, f(x_0))$ és $(x_1, f(x_1))$ pontokra illeszkedő egyenes egyenlete (Lagrange-interpoláció):

$$\begin{array}{c|cc} x_0 & f(x_0) & \\ & & \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \\ x_1 & f(x_1) & \end{array}$$

$y(x) = f(x_1) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \cdot (x - x_1)$

Ott metszi az x-tengelyt, ahol $y(x) = 0$:

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

Húrmódszer

x_2 kiszámítása után ismételjük meg az előző lépéseket az $[x_0, x_2]$, illetve $[x_2, x_1]$ intervallumok közül azzal, ahol előjelet vált a függvény.

A húrmódszer esetén

- x_2 kiszámítása jól definiált
- az eljárás minden folytonos f esetén konvergál f egy gyökéhez
- csak páratlan multiplicitású gyök közelítésére
- két pontra támaszkodó iteráció

Az algoritmus:

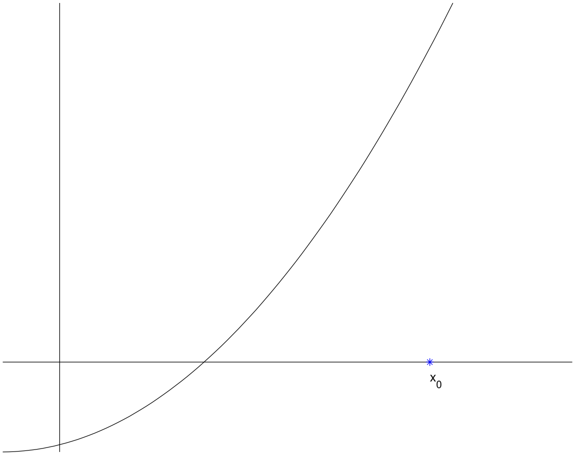
Adott a maximális iterációszám (maxit) és az ε pontosság.

1. $x_0 := a$, $x_1 := b$, $f0 := |f(x_0)|$
2. $$x_2 := x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$
3. a) Ha $f(x_2) = 0$, akkor kilépés (x_2 gyök).
   b) ha $f(x_2) \cdot f(x_1) < 0$, akkor $x_0 = x_2$
   c) ha $f(x_2) \cdot f(x_0) < 0$, akkor $x_1 = x_2$

   ha $|f(x_2)| < \varepsilon * (1 + f0)$, akkor kilépés (eredmény: x_2)
   $k := k + 1$
   ha $k = maxit$, akkor kilépés (maxit lépésben nem találtunk gyököt)
   $\rightarrow$ 2.

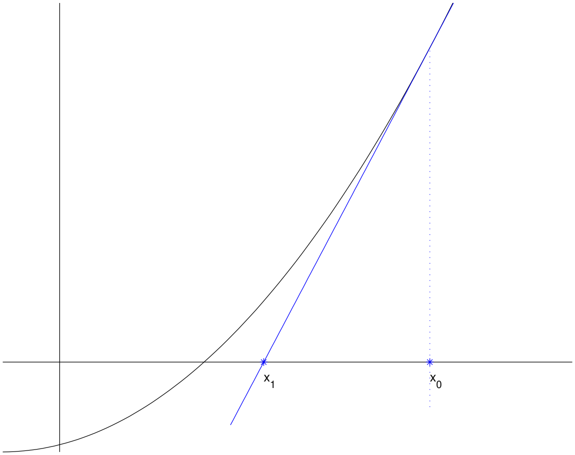
3. Newton-módszer

Az $f(x) = 0$ nemlineáris egyenlet gyökét keressük.



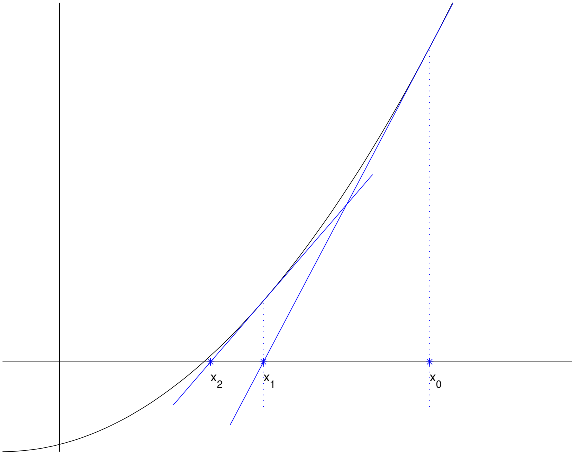
3. Newton-módszer

Az $f(x) = 0$ nemlineáris egyenlet gyökét keressük.



3. Newton-módszer

Az $f(x) = 0$ nemlineáris egyenlet gyökét keressük.



Az algoritmus:

x_0 a gyök egy kezdeti közelítése,
x_{k+1} meghatározása:
Az f függvény x_k-beli érintője (Hermite-interpoláció):

$$\begin{array}{c|ccc} x_k & f(x_k) & & \\ & & & f'(x_k) \\ x_k & f(x_k) & & \end{array}$$

$$y(x) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k)$$

Ott metszi az x-tengelyt, ahol $y(x) = 0$:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

A Newton-iteráció:

x_0 kezdőpont,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

- nem feltétlenül definiált
- egy pontra támaszkodó iteráció

Tétel. Legyen x^* az f egy gyöke. Ha

- f kétszer folytonosan diff.ható,
- $|f'(x)| \geq m_1 > 0$,
- $|f''(x)| \leq M_2$,
- $|x_0 - x^*| < \frac{2m_1}{M_2}$,

akkor a Newton-iteráció jól definiált, $x_k \to x^*$, ha $k \to \infty$, továbbá

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C|x_k - x^*|^2$$

Mit jelent a gyakorlatban a

$$|x_{k+1} - x^*| \le C|x_k - x^*|^2$$

becslés?

Ha valamely k-ra $|x_k - x^*| \approx 0.1$, akkor a sorozat következő néhány tagjának a távolsága a gyöktől kb

$$0.01$$
$$0.0001$$
$$0.00000001$$

A Newton-módszer konvergenciája **kvadratikus**, vagy másodrendű.

Példa

Közelítsük az $x^3 - 3x - 2 = 0$ egyenlet gyökét Newton–módszerrel az $x_0 = 1.5$ pontból indulva!

$f(x) = x^3 - 3x - 2$ és $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k - 2}{3x_k^2 - 3}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1.5 \\
x_1 &= 2.33333333333333 \\
x_2 &= 2.\underline{0}5555555555556 \\
x_3 &= 2.\underline{00}194931773879 \\
x_4 &= 2.\underline{00000}252829797 \\
x_5 &= 2.\underline{00000000000}426
\end{aligned}$$

2. példa

Közelítsük $\sqrt{a}$, $(a > 0)$ értékét Newton–módszerrel!

$f(x) = x^2 - a$ és $f'(x) = 2x$. Ekkor

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right)$$

$a = 5$, $x_0 = 2$ esetén:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2.\underline{2}5 \\
x_2 &= 2.\underline{236}11111111111 \\
x_3 &= 2.\underline{236067977}91580 \\
x_4 &= 2.\underline{23606797749979}
\end{aligned}$$

3. példa

Közelítsük az $x^3 - 3x + 2 = 0$ egyenlet gyökét Newton–módszerrel az $x_0 = 1.5$ pontból indulva!

$f(x) = x^3 - 3x + 2$ és $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k + 2}{3x_k^2 - 3}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1.5 \\
x_1 &= 1.26666666666667 \\
x_2 &= 1.13856209150327 \\
x_3 &= 1.\underline{0}7077733565581 \\
x_4 &= 1.\underline{0}3579185227111 \\
&\ldots \\
x_9 &= 1.\underline{00}113136084711
\end{aligned}$$

Hasonlítsuk össze az eredmény az 1. példa eredményével! Bár az egyenlet gyökéhez konvergál a sorozat, de a konvergencia nem kvadratikus. Miért?

A probléma: az 1 kétszeres gyöke f-nek (a konvergenciatétel 2. feltétele nem teljesül).

Ha az

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

iteráció helyett az

$$x_{k+1} = x_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

iterációt alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1.5 \\ x_1 &= 1.\underline{0}3333333333333 \\ x_2 &= 1.\underline{000}18214936248 \\ x_3 &= 1.\underline{00000000}552926 \end{aligned}$$

A Newton-iteráció nem feltétlenül konvergál, ezért fontos, hogy programozásakor az $\{x_k\}$ sorozatot legfeljebb egy megadott `maxit` iterációszámig határozzuk meg.

4. példa

Vizsgáljuk meg mi történik, ha a Newton-módszert az $f(x) = x^3 - 5x$ függvény gyökének közelítésére alkalmazzuk az $x_0 = 1$ pontból indulva!

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - 5x_k}{3x_k^2 - 5}$$

$$x_0 = 1, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \ldots$$

4. Szelőmódszer

A Newton-iteráció minden lépésében szükséges a derivált adott pontbeli értéke.

Ha a derivált számítása nem lehetséges, vagy túl költséges, akkor az $f'(x_k) \approx [x_{k-1}, x_k]f$ közelítést alkalmazhatjuk.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{[x_{k-1}, x_k]f} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Ez a **szelőmódszer**.

Szelőmódszer

x_0, x_1 kezdőpontok,

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

A képlet hasonló a húrmódszerhez, de itt nem vizsgáljuk az új pontban a függvény előjelét, mindig a 2 utolsó pontból számítjuk a következőt.

- a képlet nem feltétlenül definiált ($f(x_k) = f(x_{k-1})$ lehet)
- 2 pontra támaszkodó

Szelőmódszer

Konvergencia feltételei ugyanazok, mint a Newton-iterációnál, csak még $|x_1 - x^*| < \frac{2m_1}{M_2}$ is kell.

A konvergenciarend alacsonyabb, mint a Newton-iterációnál:

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C|x_k - x^*|^p,$$

ahol $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

(Húrmódszernél $p = 1$, Newton-módszernél $p = 2$.)

5. Fixpont-iteráció.

$g(x) = x$ gyökét keressük, ahol $g : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Az algoritmus:
x_0 kezdőpont, $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$

Tétel

Ha $g([a, b]) \subseteq [a, b]$, és $\exists \quad 0 \le \alpha < 1$:

$$|g(x) - g(y)| \le \alpha \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in [a, b], \tag{1}$$

akkor egyértelműen létezik olyan $x^* \in [a, b]$, hogy $g(x^*) = x^*$, továbbá $\forall x_0 \in [a, b]$ esetén az $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$ sorozat tart x^*-hoz.

Megjegyzés: Ha $|g'(x)| \le \alpha < 1$, akkor (1) teljesül.

Megjegyzés

Ha egy g függvény teljesíti az (1) tulajdonságot, akkor összehúzó leképezésnek (kontrakciónak) nevezzük.

Feladat

Mutassa meg, hogy az $f(x) = e^x - 4x^2$ függvénynek van zérushelye a $[0,1]$ intervallumban! Igazolja, hogy az

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} e^{\frac{x_k}{2}}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

iteráció tetszőleges $x_0 \in [0,1]$ kezdőpont esetén tart ehhez a gyökhöz!

Példa

Az

$$xe^x - 1 = 0, \quad x \in [0.25, 1]$$

egyenlet gyökét szeretnénk közelíteni fixpont-iterációval. Vizsgáljuk meg az

$$x_0 = 0.5, \quad x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

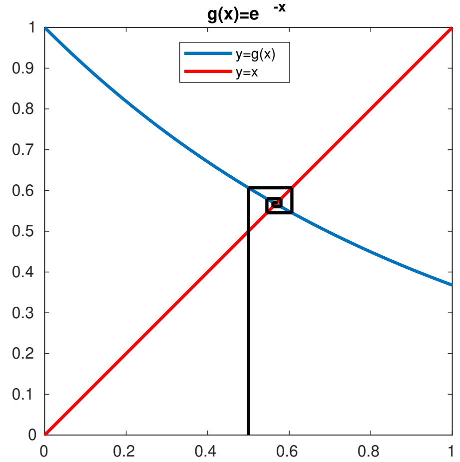
iteráció konvergenciáját, ha

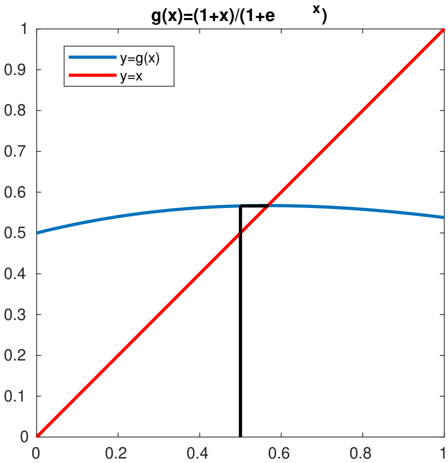
(a) $g(x) = e^{-x}$

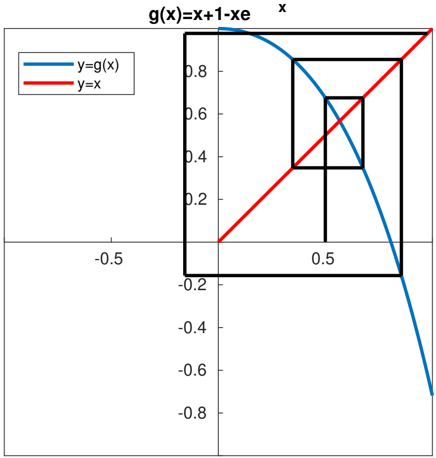
(b) $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$

(c) $g(x) = x + 1 - xe^x$

	$g(x) = e^{-x}$	$g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$	$g(x) = x + 1 - xe^x$
$x^{(1)}$	0.60653	0.56631	0.67564
$x^{(2)}$	0.54524	0.56714	0.34781
$x^{(3)}$	0.57970	0.56714	0.85532
$x^{(4)}$	0.56006	0.56714	-0.15651
$x^{(5)}$	0.57117	0.56714	0.97733
$x^{(6)}$	0.56486	0.56714	-0.61976
$x^{(7)}$	0.56844	0.56714	0.71371
$x^{(8)}$	0.56641	0.56714	0.25663
$x^{(9)}$	0.56756	0.56714	0.92492
$x^{(10)}$	0.56691	0.56714	-0.40742


g(x)=e -x
y=g(x)
y=x
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


g(x)=(1+x)/(1+e^x)
y=g(x)
y=x
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1



g(x)=x+1-xe
x
y=g(x)
y=x
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.5
0.5
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8

Nemlineáris egyenletrendszerek.

$f(x) = 0$, ahol $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Másképpen:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Példa: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_1 x_2 - 3x_2 + 3 &= 0 \\ -3x_1^2 + x_2^2 - x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Newton-módszer több dimenzióban

$x^{(0)}$ kezdővektor,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left(J(x^{(k)})\right)^{-1} \cdot f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

ahol J a Jacobi-mátrix:

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

A mátrixinvertálás helyett: a

$$J(x^{(k)}) \cdot \underbrace{\left(x^{(k+1)} - x^{(k)}\right)}_{\delta x :=} = -f(x^{(k)})$$

lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. Ezután

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \delta x.$$

Leállási feltétel:

$$\|f(x^{(k+1)})\|_\infty < \varepsilon \cdot (1 + \|f(x^{(0)})\|_\infty)$$

Fixpont-iteráció egyenletrendszerekre

A $g(x) = x$ gyökét keressük, ahol $g : T \to \mathbb{R}^n$, $T \subseteq \mathbb{R}^n$.

Példa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\cos(2x_1 - x_2) - \frac{3}{4} &= x_1 \\ \frac{1}{3}\sin(x_1) - \frac{2}{3} &= x_2 \end{aligned}$$

Az algoritmus:
$x^{(0)}$ kezdővektor, $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$, $k = 0, 1, \ldots$.

Fixpont-iteráció egyenletrendszerekre

A $g(x) = x$ gyökét keressük, ahol $g : T \to \mathbb{R}^n$, $T \subseteq \mathbb{R}^n$.

Az algoritmus

$x^{(0)}$ kezdővektor, $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$, $k = 0, 1, \ldots$.

Tétel.

Ha T konvex, $g(T) \subseteq T$, és g differenciálható, továbbá $\|J(x)\| \leq \alpha < 1$ minden $x \in T$-re, akkor az egyenletrendszer egyértelműen megoldható, és $\forall x^{(0)} \in T$ esetén az $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$, $k = 0, 1, \ldots$ sorozat tart a megoldáshoz.

Feladat

Az

$$\begin{aligned} \cos(x_1 - x_2) - \sin(x_2) - 4x_1 &= 0 \\ \cos(x_1 + x_2) - \sin(x_1 - x_2) - 5x_2 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldását keressük a $[-1, 1]^2$ tartományon. Mit mondhatunk a rendszer megoldhatóságáról és az

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{4}\cos(x_1^{(k)} - x_2^{(k)}) - \frac{1}{4}\sin(x_2^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{5}\cos(x_1^{(k)} + x_2^{(k)}) - \frac{1}{5}\sin(x_1^{(k)} - x_2^{(k)}) \end{aligned}$$

$k = 0, 1, \ldots$ eljárás konvergenciájáról?

Optimalizálás

Egyváltozós függvény szélsőértéke (emlékeztető)

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény szélsőértékhelyeit keressük.

Szükséges feltétel

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek csak ott lehet lokális szélsőértéke, ahol $f'(x) = 0$.

Elégséges feltételek

Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható és

- $f'(x^\star) = 0$, $f''(x^\star) > 0$, akkor f-nek $x^\star$-ban lokális minimuma van.
- $f'(x^\star) = 0$, $f''(x^\star) < 0$, akkor f-nek $x^\star$-ban lokális maximuma van.

Példa

Egy légitársaság A és B város közötti repülőjáratára 500 Euró egy jegy. A két város között egy 300 férőhelyes gép közlekedik, de átlagosan csak 180 utassal. Piackutatások szerint minden 5 Eurós engedmény a jegyárból átlagosan 3 plusz utast jelentene. Milyen jegyár mellett lenne maximális a légitársaság bevétele?

Tegyük fel, hogy a légitársaság $5n$ Eurót enged a jegyárból. Ekkor a várható bevétele:

$$f(n) = (180 + 3n)(500 - 5n) = -15n^2 + 600n + 90000$$

Az f maximumhelyét keressük.

$$f'(n) = -30n + 600$$

$$f'(n) = 0 \iff n = 20$$

Mivel

$$f''(n) = -30,$$

így $f''(20) < 0$, azaz $n = 20$ az f függvény maximumhelye.

1. feladat

Keresse meg az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$ függvény lokális szélsőértékhelyeit!

2. feladat

Egy 108 dm^3 térfogatú, négyzet alapú, felül nyitott dobozt akarunk készíteni. Hogyan válasszuk meg a doboz méretét, ha a készítéséhez felhasznált anyag mennyiségét minimalizálni szeretnénk?

3. feladat

Egy folyó melletti telken szeretnénk egy 1800 m^2-es téglalap alakú részt elkeríteni úgy, hogy egyik oldalról a folyó határolja. Milyen méretű részt kerítsünk el, ha a felhasznált kerítés hosszát minimalizálni szeretnénk?

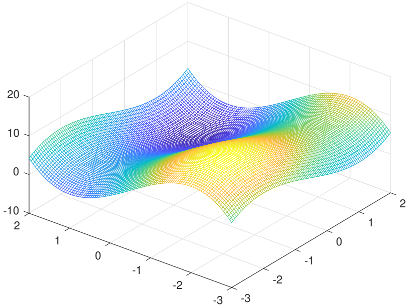
Kétváltozós függvények

Példa

Az

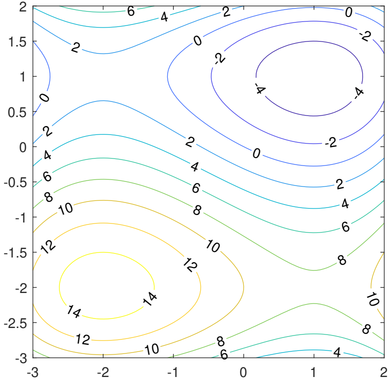
$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(2x_1^3 + 3x_1^2 - 12x_1) + \frac{1}{2}(2x_2^3 + 3x_2^2 - 12x_2)$$

függvény a $[-2, 2] \times [-2, 3]$ tartomány felett.



Példa

Rajzoltassuk ki az előző függvény szintvonalait is.



Kétváltozós függvények minimalizálása

Az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény lokális minimumhelyeit keressük.

Gradiens

Az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény x-beli gradiense

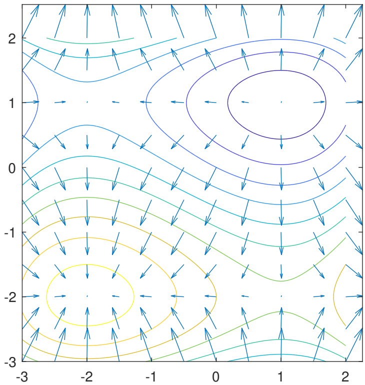
$$\nabla f(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\end{pmatrix}$$

Példa

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{4}(2x_1^3+3x_1^2-12x_1)+\frac{1}{2}(2x_2^3+3x_2^2-12x_2)$$

$$\nabla f(x)=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}x_1^2+\frac{3}{2}x_1-3\\ 3x_2^2+3x_2-6\end{pmatrix}$$

Látjuk, hogy a gradiensvektor értéke pontonként más-más lehet. Rácsozzuk be a $[-3,2]^2$ tartományt (mindkét tengely mentén 11-11 részre osztva) és számítsuk ki az előző függvény gradiensét ezekben a pontokban, majd rajzoltassuk rá ezeket a vektorokat a szintvonalakra!

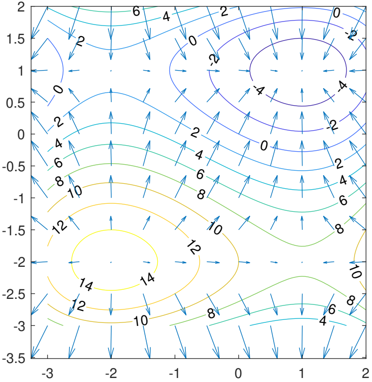


Az előző ábrán megfigyelhetjük, hogy

- a gradiensvektor merőleges az adott pontbeli szintvonalra
- a vektorok hossza a gradiens nagyságát, az iránya a gradiens irányát mutatja
- bizonyos pontokban a gradiensvektor hossza 0, vagy 0 közeli

A gradiensvektor az adott pontban a legmeredekebb emelkedés irányába mutat, a (-1)-szerese (a negatív gradiens) pedig a legmeredekebb csökkenés irányába.

Ha a gradiensmező helyett a negatív gradiensmezőt rajzoltatjuk ki, akkor a nyilak a csökkenés irányába mutatnak.



Az

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(2x_1^3 + 3x_1^2 - 12x_1) + \frac{1}{2}(2x_2^3 + 3x_2^2 - 12x_2)$$

függvény szintvonalai és a negatív gradiens mező.

A lokális szélsőérték feltételei

Elsőrendű szükséges feltétel

Ha x^* az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lokális minimumhelye, és f folytonosan differenciálható az x^* egy nyílt környezetében, akkor $\nabla f(x^*) = 0$.

Definíció (Stacionárius pont)

Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Az x^* pontot stacionárius pontnak hívjuk, ha $\nabla f(x^*) = 0$.

Megjegyzés

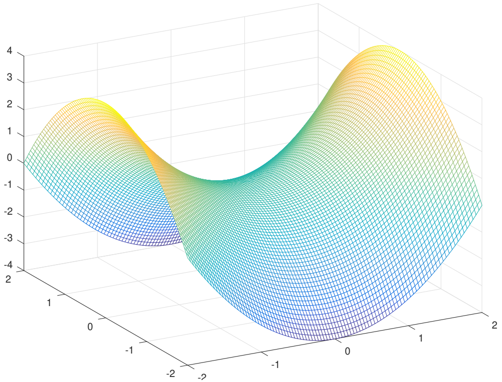
Ha x^* stacionárius pontja f-nek, akkor stacionárius pontja $-f$-nek is, azaz a stacionárius pont lokális maximum is lehet.

Definíció (Nyeregpont)

Ha x^* olyan stacionárius pontja f-nek, amely se nem lokális minimum, se nem lokális maximum, akkor nyeregpontnak hívjuk.

Példa

Legyen $f(x) = x_1^2 - x_2^2$. Ekkor $\nabla f(x) = (2x_1, -2x_2)^T$, így $x = (0, 0)$ az egyetlen stacionárius pont, amely nyeregpont.



Példa

Határozzuk meg az

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(2x_1^3 + 3x_1^2 - 12x_1) + \frac{1}{2}(2x_2^3 + 3x_2^2 - 12x_2)$$

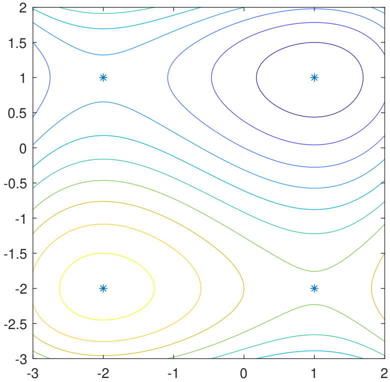
függvény stacionárius pontjait!

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_1 - 3 \\ 3x_2^2 + 3x_2 - 6 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x) = 0 \iff x_1^2 + x_1 - 2 = 0 \text{ és } x_2^2 + x_2 - 2 = 0$$

A stacionárius pontok:

$$(1, 1), \quad (1, -2), \quad (-2, 1), \quad (-2, -2)$$



Az

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(2x_1^3 + 3x_1^2 - 12x_1) + \frac{1}{2}(2x_2^3 + 3x_2^2 - 12x_2)$$

függvény szintvonalai és stacionárius pontjai.

A stacionárius pont típusai

Hesse-mátrix

Vezessük be a következő jelölést:

$$f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, 2.$$

Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény Hesse-mátrixa:

$$H(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{pmatrix}$$

Legyen $\Delta_1 := f_{11}(x)$ és $\Delta_2 := \det(H(x))$.

A stacionárius pont típusai

Tétel

Ha az $x \in \mathbb{R}^2$ stacionárius pontban

- $\Delta_2 > 0$ és $\Delta_1 > 0$, akkor x lokális minimumhely.
- $\Delta_2 > 0$ és $\Delta_1 < 0$, akkor x lokális maximumhely.
- $\Delta_2 < 0$, akkor x nyeregpont.
- $\Delta_2 = 0$, akkor további vizsgálat szükséges.

Példa

Határozzuk meg az

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(2x_1^3 + 3x_1^2 - 12x_1) + \frac{1}{2}(2x_2^3 + 3x_2^2 - 12x_2)$$

függvény stacionárius pontjainak típusát.

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(2x_1^3 + 3x_1^2 - 12x_1) + \frac{1}{2}(2x_2^3 + 3x_2^2 - 12x_2)$$

A gradiens:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_1 - 3 \\ 3x_2^2 + 3x_2 - 6 \end{pmatrix}$$

A stacionárius pontok:

$$(1, 1), \quad (1, -2), \quad (-2, 1), \quad (-2, -2)$$

A Hesse-mátrix:

$$H(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 + \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 6x_2 + 3 \end{pmatrix}$$

$$H(1, 1) = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 > 0$ és $\Delta_2 > 0$, így az $(1, 1)$ lokális minimumhely

$$H(1,-2) = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

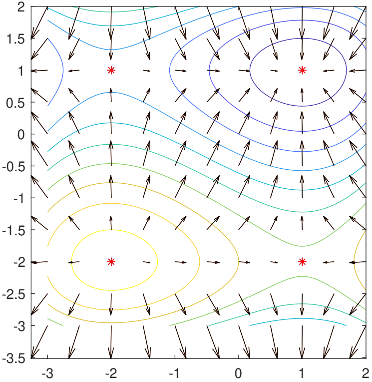
$\Delta_2 < 0$, így az $(1,-2)$ nyeregpont.

$$H(-2,1) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\Delta_2 < 0$, így az $(-2,1)$ nyeregpont.

$$H(-2,-2) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 < 0$ és $\Delta_2 > 0$, így az $(-2,-2)$ lokális maximumhely



Az

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(2x_1^3 + 3x_1^2 - 12x_1) + \frac{1}{2}(2x_2^3 + 3x_2^2 - 12x_2)$$

függvény szintvonalai, stacionárius pontjai és a negatív gradiens mező.

4. feladat

Határozza meg az

$$f(x) = 2x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 + 4x_1 x_2$$

függvény stacionárius pontjait, és azok típusát.

5. feladat

Határozza meg az

$$f(x) = x_1^3 - x_2^3 + 6x_1 x_2$$

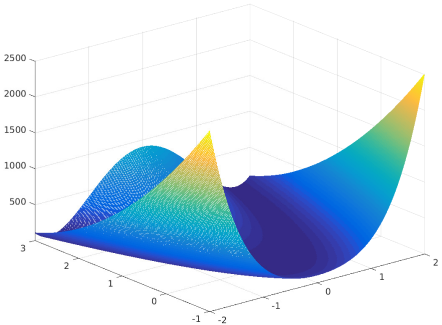
függvény stacionárius pontjait, és azok típusát.

6. feladat (Rosenbrock függvény)

Határozza meg az

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

függvény stacionárius pontjait, és azok típusát.



7. feladat

Egy autókereskedés egy adott autómárkából kombi és szedán típust is értékesít. Egy piackutatás eredménye azt mutatja, hogy ha a kombik ára x_1, a szedánoké x_2, akkor a kereslet a két autótípus iránt rendre

$$k = 10000 - 2x_1 + 2.5x_2$$
$$s = 16000 + 1.5x_1 - 3x_2$$

(ha az egyik típus ára emelkedik, akkor az ezirányú kereslet csökken, viszont a másik típusé nő). Hogyan érdemes megválasztani az egyes típusok árait, ha a bevételt maximalizálni szeretnénk?

Gradiens-módszer

Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény lokális minimumhelyeit keressük.

Egy $x^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$ sorozatot definiálunk, mely optimális esetben közelíti a függvény egy lokális minimumhelyét.

A módszer adott, ha

- az $x^{(0)}$ kezdővektor adott,
- ismert az $x^{(k)} \mapsto x^{(k+1)}$ stratégia,
- adott a leállási feltétel.

A gradiens-módszer esetén az $x^{(k)}$ pontból a legmeredekebb leereszkedés irányában lépünk tovább.

Az $x^{(k)}$-beli legmeredekebb leereszkedés iránya: $-\nabla f(x^{(k)})$.

Gradiens módszer

- $x^{(0)}$ adott,
- ha $x^{(k)}$ adott, akkor

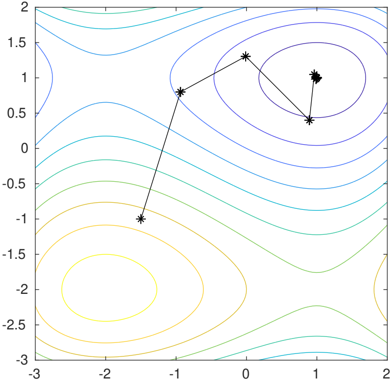
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \nabla f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

  ahol $\alpha_k > 0$ a lépéshossz. α_k értékét úgy határozzuk meg, hogy $x^{(k)}$-ból indulva $p_k = -\nabla f(x^{(k)})$ irányban meghatározzuk az f minimumhelyét, vagy annak egy elég jó közelítését.
- Leállási feltétel: ha $\|\nabla f(x^{(k)})\| < \varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$ adott paraméter.

Megjegyzés: Az α_k lépéshossz meghatározására különféle algoritmusok léteznek.

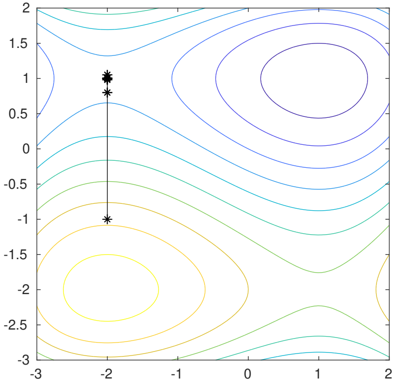
Példa

Vizsgáljuk meg a gradiens-módszer viselkedését az
$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(2x_1^3 + 3x_1^2 - 12x_1) + \frac{1}{2}(2x_2^3 + 3x_2^2 - 12x_2)$ függvény esetén.



$x^{(0)} = [-1.5, -1]^T$, $\varepsilon = 0.001$, az elvégzett lépések száma 10,
$x^{(10)} = [1.0000, 0.9999]^T$.

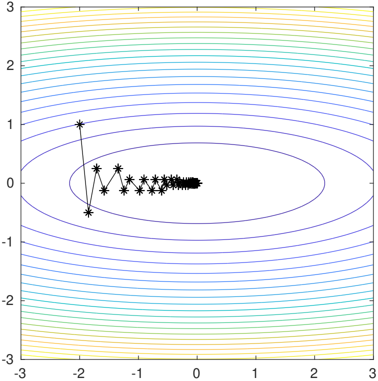
Előfordulhat, hogy a gradiens-módszer a függvény egy nyeregpontjában áll meg.



$x^{(0)} = [-2, -1]^T$, $\varepsilon = 0.001$, az elvégzett lépések száma 7, $x^{(7)} = [-2.0000, 1.0000]^T$.

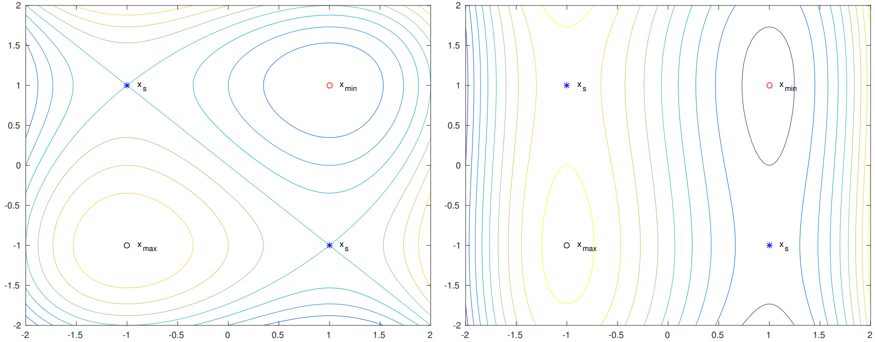
Megjegyzés

Ha a felület elnyújtott völgyeket tartalmaz, akkor a gradiens-módszer konvergenciája lassú lehet.



$f(x) = x_1^2 + 10x_2^2$,
$x^{(0)} = [-2, 1]^T$, $\varepsilon = 0.001$, az elvégzett lépések száma 78,
$x^{(78)} = [0.0000, 0.0000]^T$.

Gradiens módszer



Az

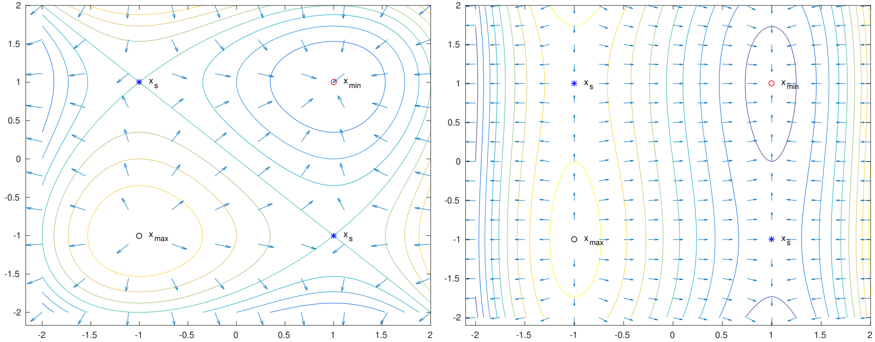
$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 3x_2$$

és a

$$f(x_1, x_2) = 10x_1^3 + x_2^3 - 30x_1 - 3x_2$$

függvény szintvonalai.

Gradiens módszer



Az

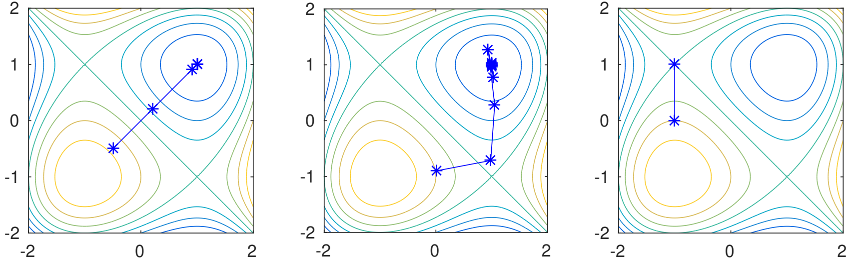
$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 3x_2$$

és a

$$f(x_1, x_2) = 10x_1^3 + x_2^3 - 30x_1 - 3x_2$$

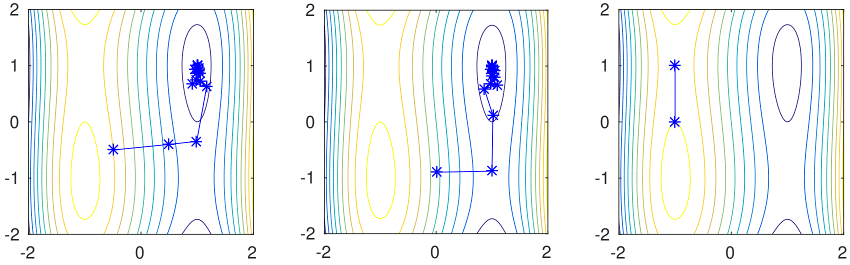
függvény szintvonalai és a negatív gradiensmezők.

Gradiens módszer



A gradiens módszer az $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 3x_2$ függvény esetén.

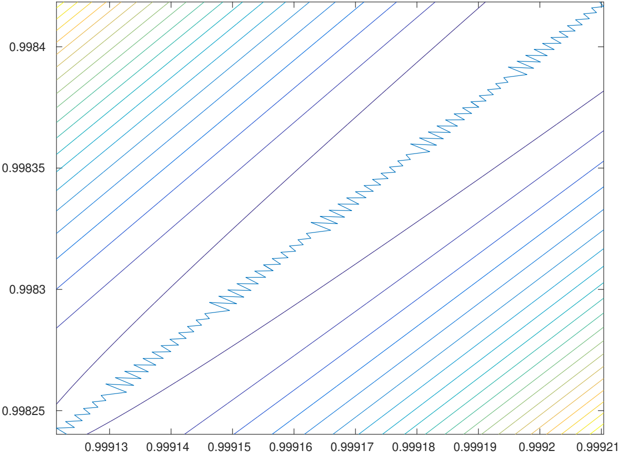
x_0	$(-0.5, -0.5)$	$(0, -0.9)$	$(-1, 0)$
lépés	6	11	2
x^*	$(1.0000, 1.0000)$	$(1.0000, 0.9999)$	$(-1, 1)$



A gradiens módszer az $f(x_1, x_2) = 10x_1^3 + x_2^3 - 30x_1 - 3x_2$ függvény esetén.

x_0	$(-0.5, -0.5)$	$(0, -0.9)$	$(-1, 0)$
lépésszám	36	33	2
x^*	$(1.0000, 0.9999)$	$(1.0000, 1.0001)$	$(-1, 1)$

Gradiens módszer



A gradiens módszer a Rosenbrock-függvényre, az utolsó 130 iterált.
$x^{(0)} = (-1.2, 1)$, $\varepsilon = 10^{-3}$. Az elvégzett lépések száma 5231.

Newton-módszer optimalizálásra

Newton-módszer nemlineáris egyenletek gyökeinek közelítésére, emlékeztető:

Az $f(x) = 0$ (ahol $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) **nemlineáris egyenlet** gyökének közelítésére szolgáló Newton-iteráció:

$$x_0 \text{ adott}, \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Az $F(x) = 0$ (ahol $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) **nemlineáris egyenletrendszer** gyökének közelítésére szolgáló Newton-iteráció:

$$x^{(0)} \text{ adott}, \qquad F'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Newton-módszer optimalizálásra

Az f függvény minimumhelye megoldása a $\nabla f(x) = 0$ egyenletnek. Mivel $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ezért ez egy nemlineáris egyenletrendszer.

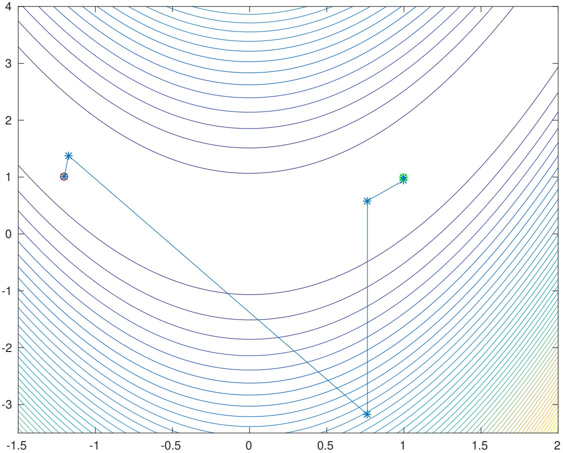
Ha f kétszer folytonosan differenciálható, akkor a Newton-módszer a $\nabla f(x) = 0$ egyenletre:

$$x^{(0)} \text{ adott}, \quad H(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -\nabla f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ahol H az f függvény Hesse-mátrixa.

- $x^{(0)}$ adott,
- $H(x^{(k)})p_k = -\nabla f(x^{(k)})$, (azaz $p_k = -(H_k)^{-1}\nabla f_k$)
- $x^{(k+1)} = x^{(k)} + p_k$
- ha $\|\nabla f_k\| < \varepsilon$, akkor leállás

Newton-módszer, példa



A Newton-módszer a Rosenbrock-függvényre. $x^{(0)} = (-1.2, 1)$, $x_{opt} = (0.999996, 0.999991)$, $f(x_{opt}) = 1.8 \cdot 10^{-11}$, $k = 5$.