Numerikus Matematika

Baran Ágnes

Gyakorlat
Legkisebb négyzetes közelítések Matlab-bal

Legkisebb négyzetes közelítések, polinomiális modell

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokat legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő egyenest!

t_i	1	1.1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
f_i	8	8.9	9	9.8	10	11	11.5	11.5	12.5	13	13.7	14

Legkisebb négyzetes közelítések, polinomiális modell

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokat legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő egyenest!

t_i	1	1.1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
f_i	8	8.9	9	9.8	10	11	11.5	11.5	12.5	13	13.7	14

Megoldás. Használjuk a `polyfit` függvényt!

```
p=polyfit(t,f,m)
```

megadja a (t_i, f_i) adatokra legkisebb négyzetes értelemben legjobban illeszkedő legfeljebb m-edfokú polinom együtthatóit a főegyütthatóval kezdve.

Legkisebb négyzetes közelítések, polinomiális modell

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokat legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő egyenest!

t_i	1	1.1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
f_i	8	8.9	9	9.8	10	11	11.5	11.5	12.5	13	13.7	14

Megoldás. Használjuk a `polyfit` függvényt!

```
p=polyfit(t,f,m)
```

megadja a (t_i, f_i) adatokra legkisebb négyzetes értelemben legjobban illeszkedő legfeljebb m-edfokú polinom együtthatóit a főegyütthatóval kezdve.

```
>> t=[1 1.1 1.1:0.1:2];
>> f=[8 8.9 9 9.8 10 11 11.5 11.5 12.5 13 13.7 14];
>> p=polyfit(t,f,1)
p=
  5.8235     2.5338
```

A keresett egyenes egyenlete:

$$f(t) = 5.8235t + 2.5338$$

A keresett egyenes egyenlete:

$$f(t) = 5.8235t + 2.5338$$

Ha ábrázolni szeretnénk az adatokat és az illesztett egyenest, akkor használhatjuk a `refline` függvényt. Ennek első argumentumaként az egyenes meredekségét, másodikként a konstanstagot kell megadni, azaz pontosan a `p` vektort:

```
>> figure; plot(t,f,'*');
>> hold on; refline(p)
```

A keresett egyenes egyenlete:

$$f(t) = 5.8235t + 2.5338$$

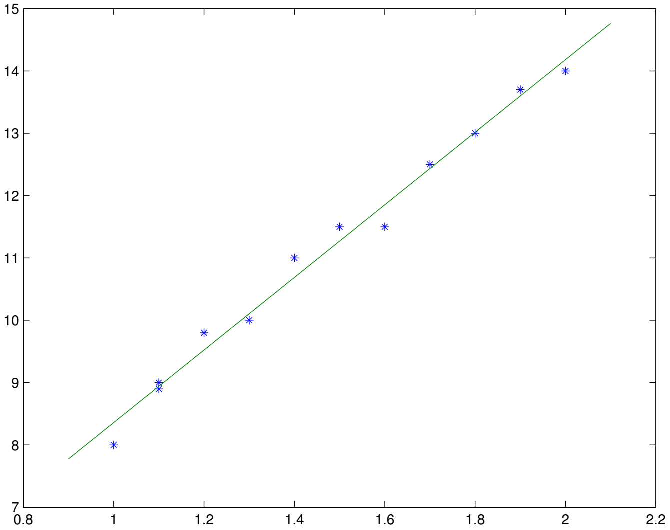
Ha ábrázolni szeretnénk az adatokat és az illesztett egyenest, akkor használhatjuk a `refline` függvényt. Ennek első argumentumaként az egyenes meredekségét, másodikként a konstanstagot kell megadni, azaz pontosan a `p` vektort:

```
>> figure; plot(t,f,'*');
>> hold on; refline(p)
```

Másik lehetőség (ami tetszőleges polinom esetén alkalmazható):

```
>> xx=linspace(0.9,2.1);
>> yy=polyval(p,xx);
>> figure; plot(t,f,'*',xx,yy)
```

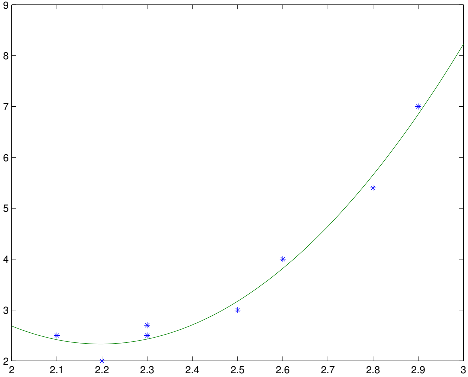
A `polyval` függvény a `p` együtthatójú polinom értékeit adja az `xx`-ben adott helyeken.


15
14
13
12
11
10
9
8
7
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2

Feladat

Határozzuk meg az alábbi adatokat legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő másodfokú polinomot!

t_i	2.1	2.2	2.3	2.3	2.5	2.6	2.8	2.9
f_i	2.5	2	2.5	2.7	3	4	5.4	7



Legkisebb négyzetes közelítések

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokat legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 + x_2 \cos(\pi t) + x_3 \sin(\pi t)$$

alakú modell paramétereit!

t_i	0.1	0.5	1.2	1.5	2	2.1	2.4	3	3.2
f_i	3.9	2.6	-0.8	0.3	3.2	3.8	3.2	-0.7	-0.9

Legkisebb négyzetes közelítések

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokat legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 + x_2 \cos(\pi t) + x_3 \sin(\pi t)$$

alakú modell paramétereit!

t_i	0.1	0.5	1.2	1.5	2	2.1	2.4	3	3.2
f_i	3.9	2.6	-0.8	0.3	3.2	3.8	3.2	-0.7	-0.9

Megoldás. A paramétereket az

$$A^T A x = A^T f$$

Gauss-féle normálegyenlet megoldása szolgáltatja.

$$A^T A x = A^T f$$

ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\pi t_1) & \sin(\pi t_1) \\ 1 & \cos(\pi t_2) & \sin(\pi t_2) \\ \vdots & & \\ 1 & \cos(\pi t_9) & \sin(\pi t_9) \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_9 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A^T A x = A^T f$$

ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\pi t_1) & \sin(\pi t_1) \\ 1 & \cos(\pi t_2) & \sin(\pi t_2) \\ \vdots & & \\ 1 & \cos(\pi t_9) & \sin(\pi t_9) \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_9 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Állítsuk elő a megadott adatokból az A mátrixot:

```
>> t=[0.1 0.5 1.2 1.5 2 2.1 2.4 3 3.2]';
>> f=[3.9 2.6 -0.8 0.3 3.2 3.8 3.2 -0.7 -0.9]';
>> A=[ones(9,1), cos(pi*t), sin(pi*t)];
```

Oldjuk meg a normálegyenletet!

```
>> x=(A'*A)\(A'*f)
x =

    1.4372
    2.0310
    1.1711
```

A legjobban illeszkedő adott alakú modell tehát:

$$F(t) = 1.4372 + 2.0310\cos(\pi t) + 1.1711\sin(\pi t)$$

Oldjuk meg a normálegyenletet!

```
>> x=(A'*A)\(A'*f)
x =

    1.4372
    2.0310
    1.1711
```

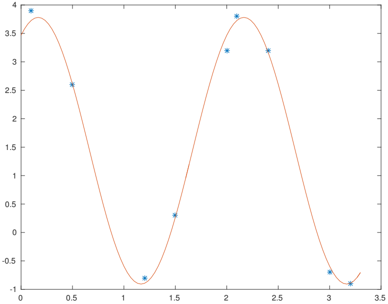
A legjobban illeszkedő adott alakú modell tehát:

$$F(t) = 1.4372 + 2.0310\cos(\pi t) + 1.1711\sin(\pi t)$$

Ábrázoljuk az adatokat és az illesztett modellt!

```
>> xx=linspace(0,3.3);
>> yy=x(1)+x(2)*cos(pi*xx)+x(3)*sin(pi*xx);
>> plot(t,f,'*',xx,yy)
```

```
t=[0.1 0.5 1.2 1.5 2 2.1 2.4 3 3.2]';
f=[3.9 2.6 -0.8 0.3 3.2 3.8 3.2 -0.7 -0.9]';
A=[ones(9,1), cos(pi*t), sin(pi*t)];
x=(A'*A)\(A'*f);
xx=linspace(0,3.3);
yy=x(1)+x(2)*cos(pi*xx)+x(3)*sin(pi*xx);
plot(t,f,'*',xx,yy)
```



Feladatok

(1) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes egyenletét!

t_i	1	1.2	1.4	1.4	1.5	1.7	1.9	2
f_i	6.2	7	8	7.9	8.4	9.2	10	10.6

Feladatok

(1) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes egyenletét!

t_i	1	1.2	1.4	1.4	1.5	1.7	1.9	2
f_i	6.2	7	8	7.9	8.4	9.2	10	10.6

(2) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő harmadfokú polinomot!

t_i	0.5	0.8	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3
f_i	2.5	2.3	1.8	1.3	0.9	0.4	0.1	-0.05	-0.01

Feladatok

(1) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes egyenletét!

t_i	1	1.2	1.4	1.4	1.5	1.7	1.9	2
f_i	6.2	7	8	7.9	8.4	9.2	10	10.6

(2) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő harmadfokú polinomot!

t_i	0.5	0.8	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3
f_i	2.5	2.3	1.8	1.3	0.9	0.4	0.1	-0.05	-0.01

(3) Határozza meg az alábbi adatokat legjobban közelítő

$$F(t) = a + \frac{b}{t}$$

alakú modell paramétereit!

t_i	1	1.2	1.4	1.4	1.5	1.7	1.9	2	2.1	2.2
f_i	4.2	3.8	3.4	3.3	3.3	3	2.8	2.8	2.75	2.7

Feladatok

(4) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 \sin(t) + x_2 \sin(2t) + x_3 \sin(3t)$$

alakú modell paramétereit!

t_i	0.1	0.5	1.2	1.5	2	2.1	2.4	3	3.2	3.4	3.8	4	4.2	4.6	5
f_i	1	4.1	3	1	-1.5	-1.6	-1.7	-0.4	0.1	0.7	1.6	1.8	1.6	0.2	-2.5

Feladatok

(4) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 \sin(t) + x_2 \sin(2t) + x_3 \sin(3t)$$

alakú modell paramétereit!

t_i	0.1	0.5	1.2	1.5	2	2.1	2.4	3	3.2	3.4	3.8	4	4.2	4.6	5
f_i	1	4.1	3	1	-1.5	-1.6	-1.7	-0.4	0.1	0.7	1.6	1.8	1.6	0.2	-2.5

(5) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 + x_2 ln(t)$$

alakú modell paramétereit!

t_i	0.1	0.5	1.2	1.5	2	2.1	2.4	3	3.2
f_i	-0.6	1.5	2.5	2.9	3.2	3.3	3.5	3.8	3.9

Feladatok

(6) Egy fél méter magas, téglatest alakú víztartályt egyenletes sebességgel töltenek fel vízzel. Amikor a tartályban 3 cm magasan áll a víz Péter elhatározza, hogy megméri a vízszint változását az idő függvényében. A következő méréseket végezte:

t_i (min)	0	2	4	6	8	10	12
f_i (cm)	3	4	5	5.5	6.5	7	8

Becsülje meg milyen magasan lesz a víz 20 perccel azután, hogy Péter elindította a mérést! Mikor indították el a tartály feltöltését? Kb mikor lesz tele a tartály?