Numerikus Matematika

Baran Ágnes

Gyakorlat
Interpoláció

Lagrange-interpoláció

Példa

Határozzuk meg a $(-2,-5),(-1,3),(0,1),(2,15)$ *pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!*

Megoldás. Készítsük el az osztott differenciák táblázatát!
Az első két oszlopba az alappontok és a megfelelő függvényértékek kerülnek:

$$\begin{array}{r|r} -2 & -5 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 15 \end{array}$$

Számítsuk ki az elsőrendű osztott differenciákat!

$$
\begin{array}{c|c}
-2 & -5 \\
 & & \frac{3-(-5)}{-1-(-2)} = 8 \\
-1 & 3 \\
 & & \frac{1-3}{0-(-1)} = -2 \\
0 & 1 \\
 & & \frac{15-1}{2-0} = 7 \\
2 & 15
\end{array}
$$

Számítsuk ki a másodrendű osztott differenciákat!

$$
\begin{array}{r|rrl}
-2 & -5 & & \\
 & & 8 & \\
-1 & 3 & & \frac{-2-8}{0-(-2)} = -5 \\
 & & -2 & \\
0 & 1 & & \frac{7-(-2)}{2-(-1)} = 3 \\
 & & 7 & \\
2 & 15 & &
\end{array}
$$

Számítsuk ki a harmadrendű osztott differenciát!

$$
\begin{array}{r|rrrl}
-2 & -5 & & & \\
 & & 8 & & \\
-1 & 3 & & -5 & \\
 & & -2 & & \frac{3-(-5)}{2-(-2)} = 2 \\
0 & 1 & & 3 & \\
 & & 7 & & \\
2 & 15 & & &
\end{array}
$$

A táblázat felső élét használva írjuk fel a polinomot!

$$
\begin{array}{r|cccc}
-2 & -5 & & & \\
 & & 8 & & \\
-1 & 3 & & -5 & \\
 & & -2 & & 2 \\
0 & 1 & & 3 & \\
 & & 7 & & \\
2 & 15 & & &
\end{array}
$$

$$L_3(x) = -5 + 8(x+2) - 5(x+2)(x+1) + 2(x+2)(x+1)x$$

Megj.:

A Lagrange-polinom nem függ az adatok sorrendjétől, így választhattuk volna a táblázat alsó élét is:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & -5 & & & \\
 & & 8 & & \\
-1 & 3 & & -5 & \\
 & & -2 & & 2 \\
0 & 1 & & 3 & \\
 & & 7 & & \\
2 & 15 & & & \\
\end{array}
$$

$$L_3(x) = 15 + 7(x-2) + 3(x-2)x + 2(x-2)x(x+1)$$

Mindkét esetben

$$L_3(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$$

Feladat

(1) *Írja fel az alábbi pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!*

   (a) $(-3,-6)$, $(-2,-17)$, $(-1,-8)$, $(1,-2)$, $(2,19)$,
   (b) $(-3,-31)$, $(-2,-8)$, $(1,1)$, $(2,22)$,
   (c) $(-2,-13)$, $(-1,-4)$, $(1,2)$,
   (d) $(-2,-5)$, $(-1,3)$, $(0,1)$, $(2,15)$,
   (e) $(-1,4)$, $(1,2)$, $(2,10)$, $(3,40)$,
   (f) $(-2,38)$, $(-1,5)$, $(1,-1)$, $(2,-10)$, $(3,-7)$,
   (g) $(-2,-33)$, $(-1,-2)$, $(1,6)$, $(2,7)$, $(3,-18)$,
   (h) $(-3,-209)$, $(-2,-43)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(2,-19)$.

(2) *Határozzuk meg a* $(-2,-6)$, $(0,4)$, $(1,-3)$, $(2,-10)$ *pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot! Határozzuk meg azt a minimális fokszámú polinomot, amely az előző pontokon kívül áthalad a* $(-1,2)$ *ponton is!*

Lagrange-interpoláció Matlab-bal

A `polyfit` függvény

`polyfit(x,f,n-1)` Ha x és f n-elemű vektorok, akkor megadja annak a legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinomnak az együtthatóit, amely illeszkedik az (x_i, f_i), $i = 1, \ldots, n$ adatokra.

Példa

Határozzuk meg Matlab-bal a $(-2,-5),(-1,3),(0,1),(2,15)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

Megoldás.

```
>>x=[-2, -1, 0, 2];
>>f=[-5, 3, 1, 15];
>>p=polyfit(x,f,3)
p=
   2.0000 1.0000 -3.0000 1.0000
```

Ábrázoljuk a pontokat és az illesztett függvényt!

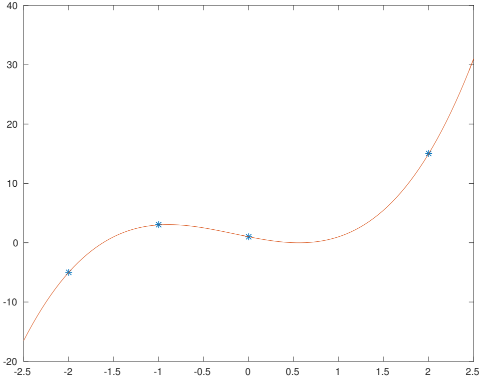
```
x=[-2, -1, 0, 2];
f=[-5, 3, 1, 15];
p=polyfit(x,f,3);
xx=linspace(-2.5,2.5);
yy=polyval(p,xx);
figure; plot(x,f,'*',xx,yy)
```

A `polyval` függvény:

```
yy=polyval(p,xx);
```

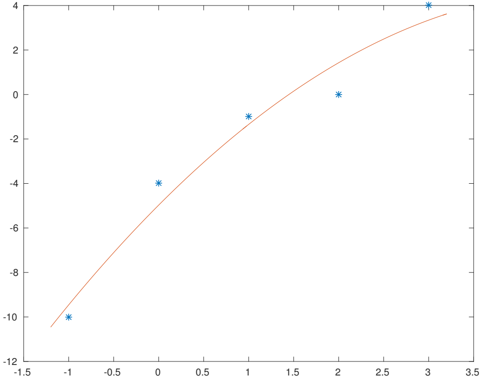
a `p` együtthatójú polinom értékeit adja az `xx` vektor koordinátáiban.
(p-ben a polinom együtthatói a főegyütthatóval kezdve szerepelnek)

```
x=[-2, -1, 0, 2];
f=[-5, 3, 1, 15];
p=polyfit(x,f,3);
xx=linspace(-2.5,2.5);
yy=polyval(p,xx);
figure; plot(x,f,'*',xx,yy)
```



Fontos! Ha a `polyfit` függvényben nem megfelelően írjuk elő a polinom fokszámát, akkor a polinom nem feltétlenül illeszkedik az adatokra.

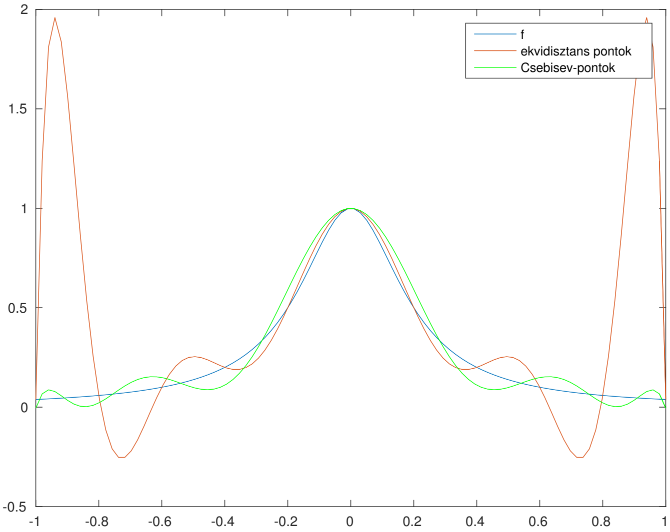
```
x=[-1 0 1 2 3]; f=[-10 -4 -1 0 4]; p=polyfit(x,f,2);
xx=linspace(-1.2,3.2); ff=polyval(p,xx);
figure; plot(x,f,'*',xx,ff)
```



Feladat

Rajzoltassuk ki közös ábrára az alábbi 3 függvényt:

- az
$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$
függvényt a $[-1, 1]$ intervallumon
- az f függvény
$$-1, -0.8, -0.6, ..., 0.6, 0.8, 1$$
egyenlő lépésközű (ekvidisztáns) alappontokhoz tartozó Lagrange-polinomját
- az f függvény
$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{22}\pi\right), \quad k = 1, 2, \ldots, 11$$
alappontokhoz (Csebisev-pontok) tartozó Lagrange-polinomját.


f
ekvidisztans pontok
Csebisev-pontok
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Hermite-interpoláció

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

x_i	-2	-1	1
$f(x_i)$	-10	-2	2
$f'(x_i)$	-20	10	10
$f''(x_i)$		-16	

Megoldás. Az illeszkedési feltételek száma: $m = 7$, így az Hermite-polinom legfeljebb 6-odfokú lesz.

Készítsük el az osztott differenciák táblázatát!

A kiinduló adatok:

x_i	-2	-1	1
$f(x_i)$	-10	-2	2
$f'(x_i)$	-20	10	10
$f''(x_i)$		-16	

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & -10 & & \\
 & & -20 & \\
-2 & -10 & & \\
 & & & \\
-1 & -2 & & \\
 & & 10 & \\
-1 & -2 & & -8 \\
 & & 10 & \\
-1 & -2 & & \\
 & & & \\
1 & 2 & & \\
 & & 10 & \\
1 & 2 & &
\end{array}
$$

Számoljuk ki a hiányzó értékeket!

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & -10 & & \\
 & & -20 & \\
-2 & -10 & & \\
 & & & \\
-1 & -2 & & \\
 & & 10 & \\
-1 & -2 & & -8 \\
 & & 10 & \\
-1 & -2 & & \\
 & & & \\
1 & 2 & & \\
 & & 10 & \\
1 & 2 & &
\end{array}
$$

A hiányzó elsőrendű osztott differenciák:

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & -10 & & \\
 & & -20 & \\
-2 & -10 & & \\
 & & 8 & \\
-1 & -2 & & \\
 & & 10 & \\
-1 & -2 & & -8 \\
 & & 10 & \\
-1 & -2 & & \\
 & & 2 & \\
1 & 2 & & \\
 & & 10 & \\
1 & 2 & &
\end{array}
$$

A hiányzó másodrendű osztott differenciák:

-2	-10		
		-20	
-2	-10		28
		8	
-1	-2		2
		10	
-1	-2		-8
		10	
-1	-2		-4
		2	
1	2		4
		10	
1	2		

A harmadrendű osztott differenciák:

-2	-10			
		-20		
-2	-10		28	
		8		-26
-1	-2		2	
		10		-10
-1	-2		-8	
		10		2
-1	-2		-4	
		2		4
1	2		4	
		10		
1	2			

A negyedrendű osztott differenciák:

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
-2 & -10 & & & & & & \\
 & & -20 & & & & & \\
-2 & -10 & & 28 & & & & \\
 & & 8 & & -26 & & & \\
-1 & -2 & & 2 & & 16 & & \\
 & & 10 & & -10 & & & \\
-1 & -2 & & -8 & & 4 & & \\
 & & 10 & & 2 & & & \\
-1 & -2 & & -4 & & 1 & & \\
 & & 2 & & 4 & & & \\
1 & 2 & & 4 & & & & \\
 & & 10 & & & & & \\
1 & 2 & & & & & &
\end{array}
$$

Az ötödrendű osztott differenciák:

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
-2 & -10 & & & & & \\
 & & -20 & & & & \\
-2 & -10 & & 28 & & & \\
 & & 8 & & -26 & & \\
-1 & -2 & & 2 & & 16 & \\
 & & 10 & & -10 & & -4 \\
-1 & -2 & & -8 & & 4 & \\
 & & 10 & & 2 & & -1 \\
-1 & -2 & & -4 & & 1 & \\
 & & 2 & & 4 & & \\
1 & 2 & & 4 & & & \\
 & & 10 & & & & \\
1 & 2 & & & & &
\end{array}
$$

A hatodrendű osztott differencia:

-2	-10						
		-20					
-2	-10		28				
		8		-26			
-1	-2		2		16		
		10		-10		-4	
-1	-2		-8		4		1
		10		2		-1	
-1	-2		-4		1		
		2		4			
1	2		4				
		10					
1	2						

-2	-10						
		-20					
-2	-10		28				
		8		-26			
-1	-2		2		16		
		10		-10		-4	
-1	-2		-8		4		1
		10		2		-1	
-1	-2		-4		1		
		2		4			
1	2		4				
		10					
1	2						

$$
\begin{aligned}
H(x) = & -10 - 20(x+2) + 28(x+2)^2 - 26(x+2)^2(x+1) \\
& + 16(x+2)^2(x+1)^2 - 4(x+2)^2(x+1)^3 \\
& + 1(x+2)^2(x+1)^3(x-1)
\end{aligned}
$$

Feladat

Határozza meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

(a)

x_i	-1	1	2
$f(x_i)$	4	6	94
$f'(x_i)$	9	17	213

(b)

x_i	-2	-1	1
$f(x_i)$	13	3	7
$f'(x_i)$	-31	14	18
$f''(x_i)$		-40	

Feladat

Írja fel az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *differenciálható függvény* x_0*-beli érintőjének az egyenletét!*

Spline interpoláció Matlab-bal

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokhoz tartozó harmadfokú spline-t!

x_i	-2	-1	0	1	2	3
S	4	1	7	4	12	9
S'	15					8

Megoldás. Használjuk a Matlab `spline` függvényét!

```
p=spline(x,y)
```

Előállítja a szakaszonként harmadfokú spline együtthatóit. Itt `x` az alappontok vektora, az `y` vektor első és utolsó koordinátája a két végpontban adott deriváltérték, a többi koordináta a függvényértékek.

```
>>x=-2:3; y=[15 4 1 7 4 12 9 8]; p=spline(x,y)
p =
      form: 'pp'
    breaks: [-2 -1 0 1 2 3]
     coefs: [5x4 double]
    pieces: 5
     order: 4
       dim: 1
```

A spline együtthatói:

```
>> p.coefs

ans =
   19.0000  -37.0000   15.0000    4.0000
  -12.0000   20.0000   -2.0000    1.0000
   11.0000  -16.0000    2.0000    7.0000
  -12.0000   17.0000    3.0000    4.0000
   15.0000  -19.0000    1.0000   12.0000
```

Figyeljünk arra, hogy a polinomok együtthatóit a részintervallumok kezdőpontjaihoz viszonyítva kapjuk!

Az 5 illesztett polinom:

$$
\begin{aligned}
p_1(x) &= 19(x+2)^3 - 37(x+2)^2 + 15(x+2) + 4 \\
p_2(x) &= -12(x+1)^3 + 20(x+1)^2 - 2(x+1) + 1 \\
p_3(x) &= 11x^3 - 16x^2 + 2x + 7 \\
p_4(x) &= -12(x-1)^3 + 17(x-1)^2 + 3(x-1) + 4 \\
p_5(x) &= 15(x-2)^3 - 19(x-2)^2 + (x-2) + 12
\end{aligned}
$$

Ellenőrizzük az illeszkedési feltételeket!

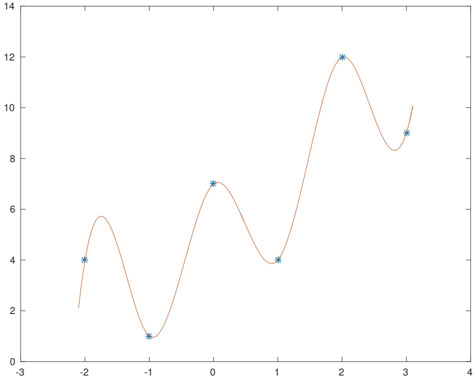
Ha nem az együtthatókat szeretnénk tudni, hanem a spline értékét valamely pont(ok)ban, akkor

```
yy=spline(x,y,xx)
```

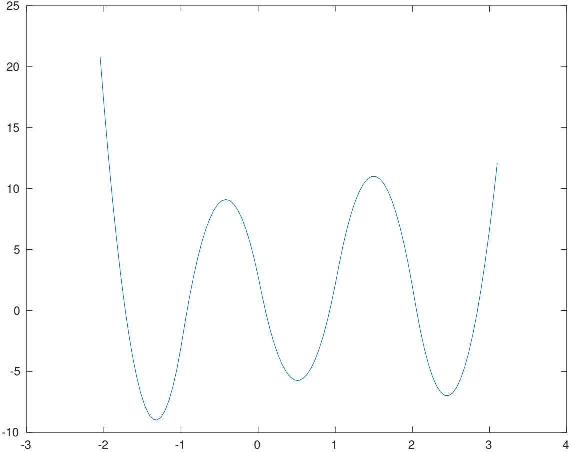
ahol `x` és `y` az előbbi vektorok, `xx` azon pontok vektora, ahol a helyettesítési értéket keressük. Ekkor `yy`-ba kerülnek a kiszámolt függvényértékek.

```
>> x=-2:3;
>> y=[15 4 1 7 4 12 9 8];
>> xx=linspace(-2.1,3.1);
>> yy=spline(x,y,xx);
>> plot(x,y(2:end-1),'*',xx,yy)
```

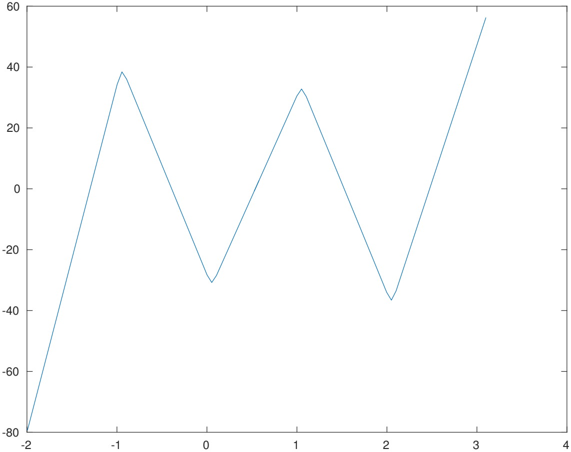
```
x=-2:3;
y=[15 4 1 7 4 12 9 8];
xx=linspace(-2.1,3.1);
yy=spline(x,y,xx);
plot(x,y(2:end-1),'*',xx,yy)
```



Az előbb ábrázolt spline 1. deriváltja:



A 2. derivált:



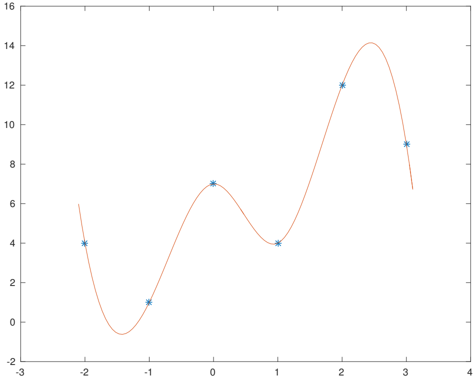
Ez még mindig folytonos, de a részintervallumok határainál töréspontja van.

Megj.

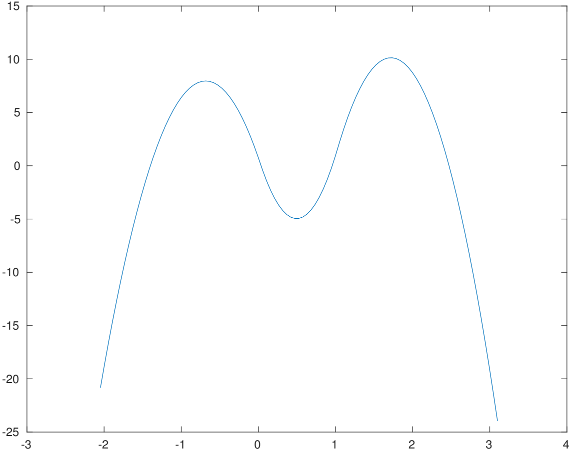
Ha a `spline` függvényt olyan `x` és `y` vektorokkal hívjuk, amelyek ugyanannyi koordinátát tartalmaznak, akkor a hiányzó két feltételt a Matlab azzal helyettesíti, hogy az első és utolsó két részintervallum találkozásánál a harmadik deriváltat is folytonosnak tekinti.

```
x=-2:3;
y=[4 1 7 4 12 9];
xx=linspace(-2.1,3.1);
yy=spline(x,y,xx);
plot(x,y,'*',xx,yy)
```

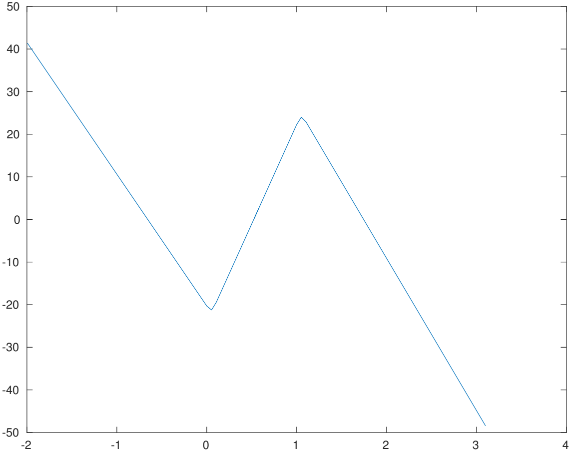
```
x=-2:3;
y=[4 1 7 4 12 9];
xx=linspace(-2.1,3.1);
yy=spline(x,y,xx);
plot(x,y,'*',xx,yy)
```



Az előbb ábrázolt spline 1. deriváltja:



A 2. derivált:

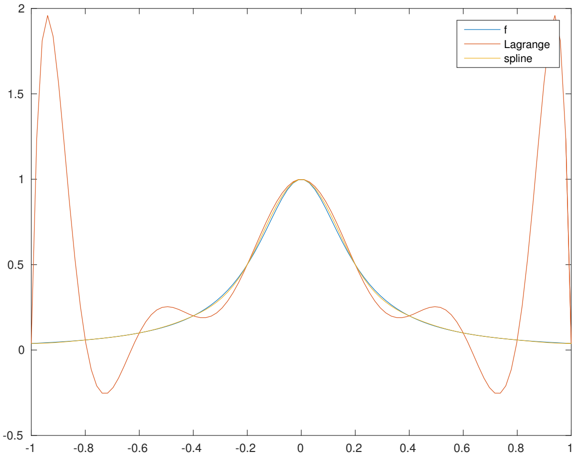


Most az első és utolsó osztópontban (-1-ben és 2-ben) már nincs töréspontja.

Feladat

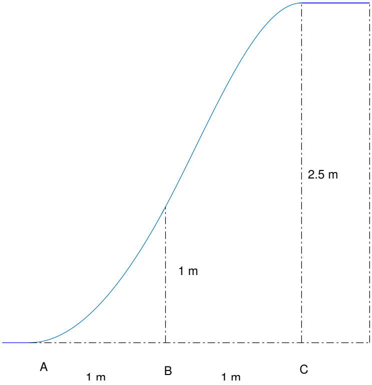
Rajzoltassuk ki közös ábrán az alábbi 3 függvényt:

- az
$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$
függvényt a $[-1,1]$ intervallumon
- az f függvény
$$-1, -0.8, -0.6, ..., 0.6, 0.8, 1$$
egyenlő lépésközű (ekvidisztáns) alappontokhoz tartozó Lagrange-polinomját
- az f függvény
$$-1, -0.8, -0.6, ..., 0.6, 0.8, 1$$
alappontokhoz tartozó harmadfokú spline polinomját. (A végpontokban a deriváltértékeket tekintsük 0-nak.)


f
Lagrange
spline
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Feladat

Az ábrán látható csúszda csúszófelületét szeretnénk elkészíteni két darabból úgy, hogy az A és C helyeken simán csatlakozzon a vízszintes felületekhez, illetve a két lemez is minél simábban csatlakozzon egymáshoz B-ben. Írja fel azt a függvényt, ami a csúszófelület lefutását modellezi!



Feladat

Az ábrán látható két útszakasz (Leis út, Felis út) egymáshoz közelebbi végei között szeretnénk utat építeni úgy, hogy az így kapott út menetében ne legyen törés. Adja meg a hiányzó útszakasz nyomvonalát leíró függvényt!