Numerikus matematika

Baran Ágnes

Gyakorlat
Numerikus integrálás Matlab-bal

Anoním függvények, function handle

Függvényeket definiálhatunk parancssorban is:

```
>> f1= @(x) x.*sin(x);
```

Ilyen módon az $f1(x) = x\sin(x)$ függvényt definiáltuk, hívása pl.:

```
>> y=f1(pi/4)
y=
  0.5554
```

A @ szimbólum után zárójelben szerepelnek a függvény változói (most x), ezt követi a függvény (ez egy ú.n. anoním függvény). Az $=$ baloldalán szereplő változó (most f1) egy ú.n. ,,function handle" típusú változó lesz.

Akár többváltozós függvényeket is megadhatunk így:

```
>> f2= @(x,y) x.^2+x.*y-y+3;
```

Ekkor pl.

```
>> z=f2(2,-1)
z=
  6
```

A function handle tárolja azon változók értékét is, amelyek szükségesek a függvény kiértékeléséhez:

```
>> a=2.5; b=3;
>> f3= @(x) a*sin(x)+b*cos(x);
>> y=f3(-4)
y=
  -0.0689
>> clear a b
>> y=f3(-4)
y=
  -0.0689
```

1. Feladat

Egészítse ki az alábbi kódrészletet úgy, hogy `I` az `f` függvény $[a, b]$ intervallum feletti határozott integráljának közelítése legyen

(a) összetett trapéz-képlettel,

(b) összetett Simpson-képlettel,

úgy, hogy az $[a.b]$ intervallumot m részre osztjuk.

```
function I=myinteg(a,b,m)

  f=@(x) ...




end
```

2. Feladat

Az előző kódok segítségével közelítse az

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

integrál értékét $m = 3, 6, 12$ esetén.
Becsülje meg hány részintervallumra van szükség, ha $\varepsilon = 10^{-3}$ pontossággal szeretnénk tudni az integrál értékét.

Numerikus integrálás Matlab-bal

Egyváltozós függvények integrálására pl az `integral` függvényt használhatjuk.

Példa

Matlab segítségével számítsuk ki az

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx$$

integrál értékét!

Megoldás.

```
>> f= @(x) x.*sqrt(1+x);
>> integral(f,0,3)
ans=
   7.7333
```

Az `integral` függvény hívása:

```
>> integral(fv,xmin,xmax)
```

ahol `fv` az integrálandó függvény (`fv` egy function handle típusú változó), `xmin` és `xmax` az alsó és felső határ.

Az `integral` függvény adaptív kvadratúrát használ, és alapértelmezésként 10^{-10} abszolút, vagy 10^{-6} relatív hibával számítja ki az integrál értékét.

A hibahatárok átállíthatóak:

```
>> integral(f,0,3,'RelTol',1e-8,'AbsTol',1e-13)
```

Az előző példában nem feltétlenül szükséges létrehozni a `f` változót:

```
>> integral(@(x) x.*sqrt(1+x),0,3)
ans =

    7.7333
```

Ha a függvényt korábban egy m-fájlban definiáltuk, pl.

```
function y=myfnc(x)
   y=x.*sqrt(1+x)
end
```

akkor az `integral` függvénynek átadhatjuk a függvény nevét is (function handle-ként):

```
>> integral(@myfnc,0,3)
```

Hasonló a helyzet a Matlab beépített függvényeivel:

```
>> integral(@sin,0,pi)
ans=
    2.0000
```

Impropius integrálok

- Az integrálás határai lehetnek $-\infty$ és ∞ is:

```
>> f= @(x) exp(-x);
>> integral(f,0,Inf)
ans =
      1
```

- Az sem probléma, ha a függvény az intervallum végpontjaiban nincs értelmezve:

```
>> f= @(x) 1./sqrt(1-x.^2);
>> integral(f,-1,1)
ans=
   3.1416
```

Paraméteres függvények integrálja

Példa:

$$\int_0^5 x^2 - cx + 3dx$$

Adott paraméterérték esetén kiszámítható az integrál:

```
>> f= @(x,c) x.^2-c*x+3;
```

Az integrál értéke $c = 4.5$ esetén a $[0, 5]$ intervallum felett:

```
>> integral(@(x) f(x,4.5),0,5)
ans =
     0.4167
```

Ha nem ismert a függvény

Előfordulhat, hogy nem ismerünk egzakt képletet az integrálandó függvényre, csak bizonyos pontokban ismerjük az értékeit. Ilyenkor a `trapz` Matlab-függvényt használhatjuk.

Példa

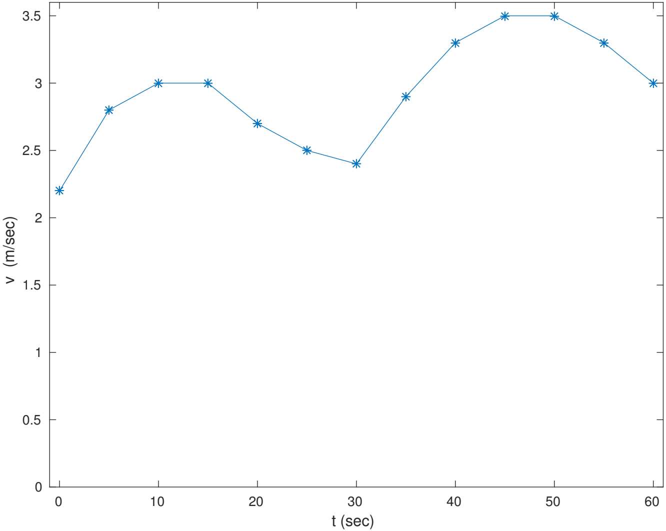
Egy jármű sebességét 1 percen keresztül mértük 5 másodperces időközönként:

t (sec)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
v (m/sec)	2.2	2.8	3	3	2.7	2.5	2.4	2.9	3.3	3.5	3.5	3.3	3

Becsüljük meg a jármű által megtett utat!

Megoldás. Tudjuk, hogy az a idő alatt megtett út:

$$S = \int_0^a v(t)dt$$



3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
v (m/sec)
0
10
20
30
40
50
60
t (sec)

A `trapz` függvény segítségével az integrál becslése:

```
>> x=0:5:60;
>> f=[ 2.2 2.8 3 3 2.7 2.5 2.4 2.9 3.3 3.5 3.5 3.3 3];
>> trapz(x,f)
ans =
     177.5000

>> y=cumtrapz(x,f);
```

Ekkor

$$y = (0, 12.5, 27, 42, 56.25, 69.25, 81.5, 94.75, 110.25, 127.25, 144.75, 161.75, 177.5)$$

Az `y` vektor *i*-edik koordinátája az *i*-edik időpillanatig megtett utat mutatja.

Feladatok

Matlab segítségével számítsa ki az alábbi határozott integrálok értékét!

(a)

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin(x^2)dx$$

(b)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

(c)

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} dx$$

Feladat

Közelítse az

$$\int_0^{10} x \sin(5x) dx$$

integrált a Matlab `integral` függvényével, illetve a `trapz` függvénnyel úgy, hogy alappontoknak az

- `xi=0:10` pontokat
- `xi=[0 0.5:9.5 10]` pontokat

választja. Próbálja megmagyarázni a tapasztalt jelenséget (ábrázolja az integrálandó függvényt a megadott intervallum felett). Növelje az alappontok számát a `trapz` függvény esetén.

Felületek ábrázolása Matlab-ban

Példa

Ábrázoljuk az

$$f(x,y) = xe^{-(x^2+y^2)}$$

függvényt a $T = [-2,2] \times [-1,1]$ tartomány felett!

Megoldás.

Vegyünk fel sok pontot a $[-2,2]$ és a $[-1,1]$ intervallumban!

```
>> x=linspace(-2,2);
>> y=linspace(-1,1);
```

“Rácsozzuk be” a tartományt!

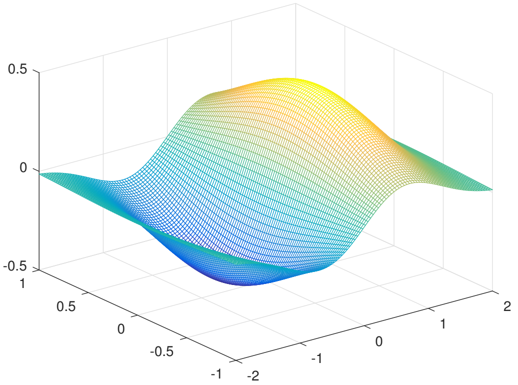
```
>> [xx,yy] = meshgrid(x,y);
```

Számítsuk ki a rácspontokban a függvény értékét!

```
>> zz = xx.*exp(-xx.^2-yy.^2);
```

Felületek ábrázolása Matlab-ban

```
x=linspace(-2,2);
y=linspace(-1,1);
[xx,yy] = meshgrid(x,y);
zz = xx.*exp(-xx.^2-yy.^2);
figure; mesh(xx,yy,zz)
```



Kétváltozós függvények numerikus integrálása Matlab-bal

Használjuk az `integral2` függvényt!

Példa

Matlab segítségével számítsuk ki a

$$\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1} xe^{-x^2-y^2}\,dydx$$

integrál értékét!

Megoldás.

```
>> f= @(x,y) x.*exp(-x.^2-y.^2)
>> integral2(f,-2,2,-1,1)
ans=
   -4.4007e-14
```

Példa

Matlab segítségével számítsuk ki a

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dydx$$

integrál értékét!

Megoldás. Mivel most a belső integrál határai is függvények, ezért ezeket is function handle-ként adjuk meg:

```
>> f= @(x,y) sqrt(1-x.^2-y.^2);
>> ymin= @(x) -sqrt(1-x.^2);
>> ymax= @(x) sqrt(1-x.^2);
>> integral2(f,-1,1,ymin,ymax)
ans=
    2.0944
```

Feladatok

Matlab segítségével számítsa ki a következő integrálok értékét!

(a)

$$\int_{0}^{\pi/4} \int_{-\pi/3}^{0} 2y \sin x \cos^2 x dydx$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$$

(c)

$$\int_{1}^{e} \int_{x}^{x^2} ln(xy) dydx$$