

MATLAB feladatok

Lebegőpontos számok

1. Számítógépén vizsgálja meg mi a $0.4 - 0.5 + 0.1 == 0$ logikai kifejezés, illetve a $0.4 - 0.5 + 0.1$ kifejezés értéke. Adjon magyarázatot az eredményre! Írassa ki a $0.1 - 0.5 + 0.4 == 0$ kifejezés értékét is.
2. Legyen $x = 1/3$. Ciklusban futtassuk le néhányszor (≈ 40) az $x = 4x - 1$ utasítást, ami elméletileg az $x = 1/3$ értéket adja vissza. Mit tapasztalunk a gyakorlatban?
3. Az alábbi algoritmus elméletileg minden $x \geq 0$ esetén az x eredeti értékét adja vissza. Vizsgálja meg mi történik a gyakorlatban, ha az algoritmust $x = 1000$, $x = 100$ kezdőértékkel futtatja! Mi az oka a tapasztalt jelenségnek?

```
for i=1:60
    x=sqrt(x);
end
```

```
for i=1:60
    x=x^2;
end
```

4. Határozza meg számítógépén kísérletileg ε_1 és ε_0 értékét! A kapott értékeket hasonlítsa össze az `eps` függvény alkalmas értékeivel!
5. Írassa ki a $10^{20} + 1 == 10^{20}$, $10^{20} + 10 == 10^{20}$, $10^{20} + 100 == 10^{20}$, $10^{20} + 1000 == 10^{20}$, $10^{20} + 10000 == 10^{20}$ logikai kifejezések értékét. Magyarázza meg a tapasztalt jelenséget!
6. Az

$$\left(\frac{1}{5x} + 1\right)x - x = 0.2$$

egyenlőség elméletileg minden $x \neq 0$ esetén igaz. Az $x = 1, \dots, 100$ értékekre számítógépén tesztelje a fenti egyenlőség teljesülését!

7. Ismert, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Számítsa ki az $\frac{e^x - 1}{x}$ hányados értékét egyre csökkenő x értékek esetén! ($x = 1$ kezdőértékkel x -et 40-szer, 200-szor, 2000-szer felezgetve írassa ki a kifejezés értékét!) Magyarázza meg a tapasztalt jelenséget!
8. Adott az $x_1, \dots, x_n$ minta esetén a tapasztalati szórásnégyzet kiszámításának két lehetséges módja:

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \quad \text{és} \quad s_n^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right)$$

Az $x = (10000, 10001, 10002)$ minta esetén egyszeres pontosságot használva ($x = \text{single}([10000, 10001, 10002])$) számítsa ki a tapasztalati szórásnégyzetet mindkét képlettel!

Normák, kondíciós számok

1. Írjon 1-1 függvényt az 1- és ∞ -mátrixnormák számítására! Olvassa el a Matlab `norm` függvényének help-jét, néhány mátrixra hasonlítsa össze a saját függvénye és a `norm` függvény által adott eredményt.
2. Számítsa ki a 6×6 -os Hilbert-mátrix kondíciós számát 2- és ∞ -normában! (Használja a `cond` és `hilb` MATLAB-függvényeket!) Legyen B egy 6×6 -os véletlen mátrix (használja a `rand` függvényt), számítsa ki B kondíciós számát is (végezzen több kísérletet)!
3. Oldja meg Matlab-bal az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{pmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy b helyett $b + \Delta b$ ismert,

$$b + \Delta b = \begin{pmatrix} 1.98 \\ 1.98 \end{pmatrix}.$$

Oldja meg az $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$ lineáris egyenletrendszert! Számítsa ki a $\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$, $\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$ relatív hibákat! Számítsa ki az A kondíciós számát (∞ -normában)!

4. Állítsa elő a következő $A \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$ mátrixot és $b \in \mathbb{R}^{100}$ vektort, és a „backslash” operátort használva oldja meg az $Ax = b$ egyenletrendszert (azaz alkalmazza az $x = A \backslash b$ parancsot). Ezután perturbálja a b vektort, pl. 1 helyett legyen $b(100) = 1.00001$ és oldja meg a rendszert újra. Számítsa ki az A kondíciós számát (adjon egy egzakt képletet is $\text{cond}_\infty(A)$ -ra).

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ -1, & \text{ha } i < j, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases} \quad b = (-98, -97, \dots, 0, 1)^T.$$

Lineáris egyenletrendszerek

1. Olvassa el az `rref` függvény MATLAB help-jét! Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \\ 31 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

Az `rref` függvényt alkalmazva a kibővített mátrixokra mit tud mondani az $Ax = b$ és $Ax = c$ lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságáról?

2. Alkalmazza a `backslash` operátort az $Ax = b$ lineáris rendszerek esetén. Mit tapasztal? Ellenőrizze, hogy az eredményként kapott vektor valóban megoldja-e az egyenletrendszert.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & -11 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 29 \\ -7 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & -11 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 29 \\ -7 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Oldja meg MATLAB-bal az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ahol

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 24 \\ -23 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & -13 & 22 \\ 5 & -1 & 16 & -14 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 81 \\ -33 \\ 15 \end{pmatrix}$$

4. Oldja meg az $Ax = b$ és $Ax = c$ lineáris egyenletrendszereket a `backslash` operátor segítségével.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 12 & -6 & 2 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -28 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

5. Az alábbi néhány kódsor segítségével vizsgálja meg mi történik ha azonos nagyméretű mátrixszal adott lineáris egyenletrendszereket párhuzamosan, illetve egymás után old meg.

```
>> A=rand(10000);  
>> b=ones(10000,1);  
>> c=zeros(10000,1);  
>> tic;x=A\[b,c];toc  
>> tic;x=A\b; x2=A\c; toc
```

6. Olvassa el az `lu` és `chol` MATLAB-függvények helpjét.
7. Legyen $A = \text{pascal}(10)$ (azaz A a 10×10 -es Pascal mátrix, ami egy szimmetrikus, pozitív definit mátrix), $x = \text{ones}(10,1)$ és definiálja a b vektort úgy, hogy $b = A * x$. Oldja meg az $Ax = b$ rendszert az `lu`, `chol` és $A \backslash b$ utasításokat alkalmazva (használgon „format long”-ot)!