

Matematika Mérnököknek 1.

Baran Ágnes

Gyakorlat
Numerikus matematika

Lebegőpontos számok

Példa

$a = 2$, $t = 4$, $k_- = -3$, $k_+ = 2$ esetén mi lesz a 0.1875 lebegőpontos alakja?

Megoldás.

$$\begin{array}{r|l} 0. & 1875 \\ 0 & 375 \\ 0 & 75 \\ 1 & 5 \\ 1 & 0 \end{array}$$

$$0.1875_{10} = 0.0011_2$$

$$\text{Normalizálás után: } 2^{-2} \cdot 0.1100$$

Példa

$a = 2$, $t = 4$, $k_- = -3$, $k_+ = 2$ esetén mi lesz a $\frac{1}{3}$ lebegőpontos alakja?

Megoldás.

0.		3333...
0		6666...
1		3333...
0		6666...
1		3333...
⋮		⋮

$$0.3333..._{10} = 0.0101010..._2$$

Normalizálás után: $2^{-1} \cdot 0.101010...$

Levágás esetén: $2^{-1} \cdot 0.1010$

Szabályos kerekítés esetén: $2^{-1} \cdot 0.1011$

Feladat

**(a) $a = 2$, $t = 4$, $k_- = -3$, $k_+ = 3$ esetén mi lesz az alábbi számok lebegőpontos alakja?*

$$0.9375, \quad 0.1, \quad 0.6, \quad \frac{1}{32}, \quad 2.625,$$

- (b) Adott a , t , k_- és k_+ mellett írja fel a legnagyobb ábrázolható lebegőpontos számot (M_∞), a legkisebb pozitív normalizált ábrázolható számot (ε_0), illetve az 1 jobb- és baloldali szomszédját!*
- (c) Adott a , t , k_- és k_+ mellett hány darab pozitív lebegőpontos szám írható fel?*
- (d) $a = 2$, $t = 4$, $k_- = -3$, $k_+ = 2$ esetén ábrázolja számegyenesen az összes pozitív lebegőpontos számot!*

Feladat

- * (1) Olvassa el a Matlab eps függvényének help-jét.
- * (2) Vizsgálja meg számítógépén a $0.4 - 0.5 + 0.1 == 0$ logikai kifejezés értékét! Mi lesz a $0.1 - 0.5 + 0.4 == 0$ logikai kifejezés értéke?
- * (3) Legyen $x = 1/3$. Ciklusban futtassuk le negyvenszer az $x = 4x - 1$ utasítást, ami elméletileg az $x = 1/3$ értéket adja vissza. Mit tapasztalunk a gyakorlatban?
- * (4) Vizsgálja meg számítógépén a $10^{20} + 1 == 10^{20}$, $10^{20} + 10 == 10^{20}$, $10^{20} + 100 == 10^{20}$, $10^{20} + 1000 == 10^{20}$ és $10^{20} + 10000 == 10^{20}$ logikai kifejezések értékét!

Feladat

- * (5) Az alábbi algoritmus elméletileg minden $x \geq 0$ esetén az x eredeti értékét adja vissza. Vizsgálja meg mi történik a gyakorlatban, ha az algoritmust $x = 1000$, $x = 100$ kezdőértékkel futtatja! Mi az oka a tapasztalt jelenségnek?

```
for i=1:60
    x=sqrt(x);
end
for i=1:60
    x=x^2;
end
```

- (6) Ismert, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Számítsa ki Matlab-ban az $\frac{e^x - 1}{x}$ hányados értékét egyre csökkenő x értékek esetén! ($x = 1$ kezdőértékkel x -et 40-szer, 200-szor, 2000-szer felezgetve írassa ki a kifejezés értékét!) Magyarázza meg a tapasztalt jelenséget!

Feladat

***(7)** Oldja meg Matlab-bal az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{pmatrix} \text{ ill. } b = \begin{pmatrix} 1.98 \\ 1.98 \end{pmatrix}.$$

(8) Számítsa ki a 6×6 -os Hilbert-mátrix kondíciószámát! (Használja a `cond` és `hilb` MATLAB-függvényeket!) Legyen B egy 6×6 -os véletlen mátrix (használja a `rand` függvényt), számítsa ki B kondíciószámát is (végezzen több kísérletet)!

Feladat

*(9) Állítsa elő a következő $A \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$ mátrixot és $b \in \mathbb{R}^{100}$ vektort, és a backslash operátort használva oldja meg az $Ax = b$ egyenletrendszert. Ezután perturbálja a b vektort, pl. 1 helyett legyen $b(100) = 1.00001$ és oldja meg a rendszert újra. Számítsa ki az A kondíciósámát.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ -1, & \text{ha } i < j, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases} \quad b = (-98, -97, \dots, 0, 1)^T.$$

Legkisebb négyzetes közelítések, polinomiális modell

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokat legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő egyenest!

t_i	1	1.1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
f_i	8	8.9	9	9.8	10	11	11.5	11.5	12.5	13	13.7	14

Megoldás. Használjuk a polyfit függvényt!

```
p=polyfit(t,f,m)
```

megadja a (t_i, f_i) adatokra legkisebb négyzetes értelemben legjobban illeszkedő legfeljebb m -edfokú polinom együtthatóit a főegyütthatóval kezdve.

```
>> t=[1 1.1 1.1:0.1:2];  
>> f=[8 8.9 9 9.8 10 11 11.5 11.5 12.5 13 13.7 14];  
>> p=polyfit(t,f,1)  
p=  
5.8235 2.5338
```

A keresett egyenes egyenlete:

$$f(t) = 5.8235t + 2.5338$$

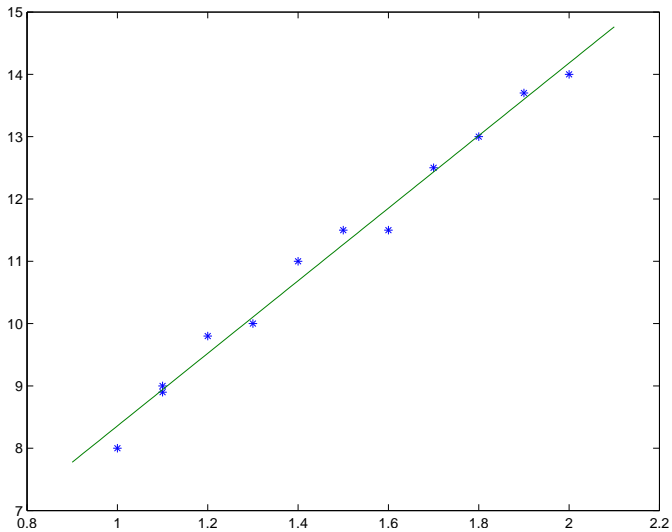
Ha ábrázolni szeretnénk az adatokat és az illesztett egyenest, akkor használhatjuk a `refline` függvényt. Ennek első argumentumaként az egyenes meredekségét, másodikként a konstanstagot kell megadni, azaz pontosan a `p` vektort:

```
>> figure; plot(t,f,'*');  
>> hold on; reffline(p)
```

Másik lehetőség (ami tetszőleges polinom esetén alkalmazható):

```
>> xx=linspace(0.9,2.1);  
>> yy=polyval(p,xx);  
>> figure; plot(t,f,'*',xx,yy)
```

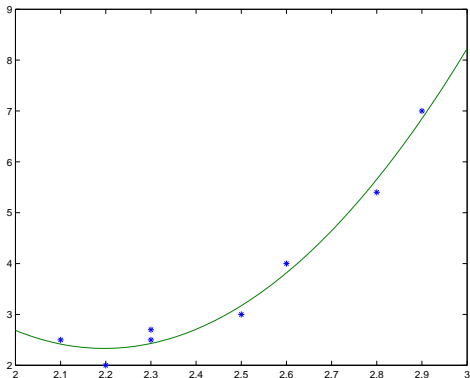
A `polyval` függvény a `p` együtthatójú polinom értékeit adja az `xx`-ben adott helyeken.



*Feladat

Határozzuk meg az alábbi adatokat legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő másodfokú polinomot!

t_i	2.1	2.2	2.3	2.3	2.5	2.6	2.8	2.9
f_i	2.5	2	2.5	2.7	3	4	5.4	7



Legkisebb négyzetes közelítések

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokat legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 + x_2 \cos(\pi t) + x_3 \sin(\pi t)$$

alakú modell paramétereit!

t_i	0.1	0.5	1.2	1.5	2	2.1	2.4	3	3.2
f_i	3.9	2.6	-0.8	0.3	3.2	3.8	3.2	-0.7	-0.9

Megoldás. A paramétereket az

$$A^T A x = A^T f$$

Gauss-féle normálegyenlet megoldása szolgáltatja.

$$A^T A x = A^T f$$

ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\pi t_1) & \sin(\pi t_1) \\ 1 & \cos(\pi t_2) & \sin(\pi t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\pi t_9) & \sin(\pi t_9) \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_9 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Állítsuk elő a megadott adatokból az A mátrixot:

```
>> t=[0.1 0.5 1.2 1.5 2 2.1 2.4 3 3.2]';  
>> f=[3.9 2.6 -0.8 0.3 3.2 3.8 3.2 -0.7 -0.9]';  
>> A=[ones(9,1), cos(pi*t), sin(pi*t)];
```

Oldjuk meg a normálegyenletet!

```
>> x=(A'*A)\(A'*f)
```

```
x =
```

```
1.4372
```

```
2.0310
```

```
1.1711
```

A legjobban illeszkedő adott alakú modell tehát:

$$F(t) = 1.4372 + 2.0310 \cos(\pi t) + 1.1711 \sin(\pi t)$$

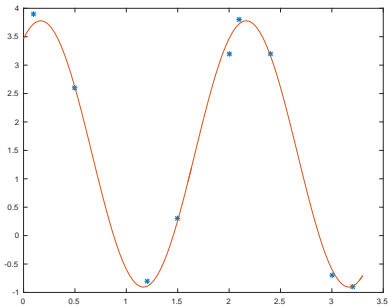
Ábrázoljuk az adatokat és az illesztett modellt!

```
>> xx=linspace(0,3.3);
```

```
>> yy=x(1)+x(2)*cos(pi*xx)+x(3)*sin(pi*xx);
```

```
>> plot(t,f,'*',xx,yy)
```

```
t=[0.1 0.5 1.2 1.5 2 2.1 2.4 3 3.2]';  
f=[3.9 2.6 -0.8 0.3 3.2 3.8 3.2 -0.7 -0.9]';  
A=[ones(9,1), cos(pi*t), sin(pi*t)];  
x=(A'*A)\(A'*f);  
xx=linspace(0,3.3);  
yy=x(1)+x(2)*cos(pi*xx)+x(3)*sin(pi*xx);  
plot(t,f,'*',xx,yy)
```



Feladatok

- *(1) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes egyenletét!

t_i	1	1.2	1.4	1.4	1.5	1.7	1.9	2
f_i	6.2	7	8	7.9	8.4	9.2	10	10.6

- *(2) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő harmadfokú polinomot!

t_i	0.5	0.8	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3
f_i	2.5	2.3	1.8	1.3	0.9	0.4	0.1	-0.05	-0.01

- *(3) Határozza meg az alábbi adatokat legjobban közelítő

$$F(t) = a + \frac{b}{t}$$

alakú modell paramétereit!

t_i	1	1.2	1.4	1.4	1.5	1.7	1.9	2	2.1	2.2
f_i	4.2	3.8	3.4	3.3	3.3	3	2.8	2.8	2.75	2.7

Feladatok

* (4) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 \sin(t) + x_2 \sin(2t) + x_3 \sin(3t)$$

alakú modell paramétereit!

t_j	0.1	0.5	1.2	1.5	2	2.1	2.4	3	3.2	3.4	3.8	4	4.2	4.6	5
f_j	1	4.1	3	1	-1.5	-1.6	-1.7	-0.4	0.1	0.7	1.6	1.8	1.6	0.2	-2.5

(5) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 + x_2 \ln(t)$$

alakú modell paramétereit!

t_j	0.1	0.5	1.2	1.5	2	2.1	2.4	3	3.2
f_j	-0.6	1.5	2.5	2.9	3.2	3.3	3.5	3.8	3.9

Lagrange-interpoláció

Példa

Határozzuk meg a $(-2, -5)$, $(-1, 3)$, $(0, 1)$, $(2, 15)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

Megoldás. Készítsük el az osztott differenciák táblázatát!

Az első két oszlopba az alappontok és a megfelelő függvényértékek kerülnek:

-2	-5
-1	3
0	1
2	15

Számítsuk ki az elsőrendű osztott differenciákat!

$$\begin{array}{l|l} -2 & -5 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 15 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{3-(-5)}{-1-(-2)} = 8 \\ \frac{1-3}{0-(-1)} = -2 \\ \frac{15-1}{2-0} = 7 \end{array}$$

Számítsuk ki a másodrendű osztott differenciákat!

$$\begin{array}{r|l} -2 & -5 \\ & 8 \\ -1 & 3 \\ & -2 \\ 0 & 1 \\ & 7 \\ 2 & 15 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \frac{-2-8}{0-(-2)} = -5 \\ \\ \frac{7-(-2)}{2-(-1)} = 3 \\ \end{array}$$

Számítsuk ki a harmadrendű osztott differenciát!

$$\begin{array}{c|ccc} -2 & -5 & & \\ -1 & 3 & 8 & \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & 15 & 7 & 3 \end{array} \quad \frac{3 - (-5)}{2 - (-2)} = 2$$

A táblázat felső élet használva írjuk fel a polinomot!

-2	-5			
-1	3	8	-5	
0	1	-2	3	2
2	15	7		

$$L_3(x) = -5 + 8(x + 2) - 5(x + 2)(x + 1) + 2(x + 2)(x + 1)x$$

Megj.:

A Lagrange-polinom nem függ az adatok sorrendjétől, így választhattuk volna a táblázat alsó élét is:

-2	-5			
		8		
-1	3		-5	
		-2		2
0	1		3	
		7		
2	15			

$$L_3(x) = 15 + 7(x - 2) + 3(x - 2)x + 2(x - 2)x(x + 1)$$

Mindkét esetben

$$L_3(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$$

Feladat

- (1) *Írja fel az alábbi pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!*
- ***(a)** $(-3, -6), (-2, -17), (-1, -8), (1, -2), (2, 19),$
 - ***(b)** $(-3, -31), (-2, -8), (1, 1), (2, 22),$
 - (c)** $(-2, -13), (-1, -4), (1, 2),$
 - (d)** $(-2, -5), (-1, 3), (0, 1), (2, 15),$
 - (e)** $(-1, 4), (1, 2), (2, 10), (3, 40),$
 - (f)** $(-2, 38), (-1, 5), (1, -1), (2, -10), (3, -7),$
 - (g)** $(-2, -33), (-1, -2), (1, 6), (2, 7), (3, -18),$
 - (h)** $(-3, -209), (-2, -43), (-1, -1), (1, -1), (2, -19).$
- (2) *Határozzuk meg a $(-2, -6), (0, 4), (1, -3), (2, -10)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot! Határozzuk meg azt a minimális fokszámú polinomot, amely az előző pontokon kívül áthalad a $(-1, 2)$ ponton is!*

Lagrange-interpoláció Matlab-bal

A polyfit függvény

`polyfit(x,f,n-1)` Ha x és f n -elemű vektorok, akkor megadja annak a legfeljebb $(n - 1)$ -edfokú polinomnak az együtthatóit, amely illeszkedik az (x_i, f_i) , $i = 1, \dots, n$ adatokra.

Példa

Határozzuk meg Matlab-bal a $(-2, -5)$, $(-1, 3)$, $(0, 1)$, $(2, 15)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

Megoldás.

```
>>x=[-2, -1, 0, 2];  
>>f=[-5, 3, 1, 15];  
>>p=polyfit(x,f,3)  
p=  
2.0000 1.0000 -3.0000 1.0000
```

Ábrázoljuk a pontokat és az illesztett függvényt!

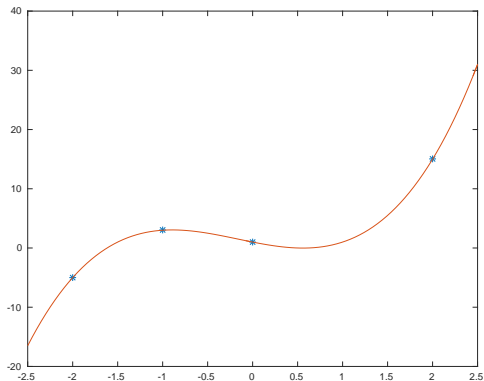
```
x=[-2, -1, 0, 2];  
f=[-5, 3, 1, 15];  
p=polyfit(x,f,3);  
xx=linspace(-2.5,2.5);  
yy=polyval(p,xx);  
figure; plot(x,f,'*',xx,yy)
```

A polyval függvény:

```
yy=polyval(p,xx);
```

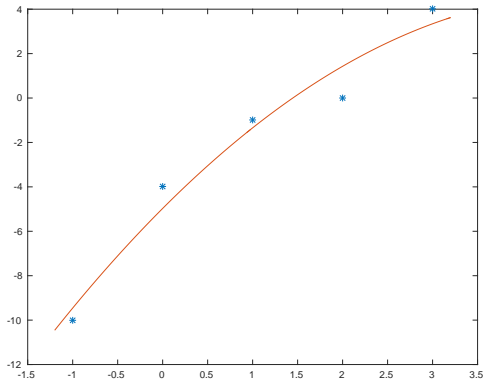
a p együtthatójú polinom értékeit adja az xx vektor koordinátaiban.
(p-ben a polinom együtthatói a főegyütthatóval kezdve szerepelnek)

```
x=[-2, -1, 0, 2];  
f=[-5, 3, 1, 15];  
p=polyfit(x,f,3);  
xx=linspace(-2.5,2.5);  
yy=polyval(p,xx);  
figure; plot(x,f,'*',xx,yy)
```



Fontos! Ha a `polyfit` függvényben nem megfelelően írjuk elő a polinom fokszámát, akkor a polinom nem feltétlenül illeszkedik az adatokra.

```
x=[-1 0 1 2 3]; f=[-10 -4 -1 0 4]; p=polyfit(x,f,2);  
xx=linspace(-1.2,3.2); ff=polyval(p,xx);  
figure; plot(x,f,'*',xx,ff)
```



*Feladat

Rajzoltassuk ki közös ábrára az alábbi 3 függvényt:

- az

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

függvényt a $[-1, 1]$ intervallumon

- az f függvény

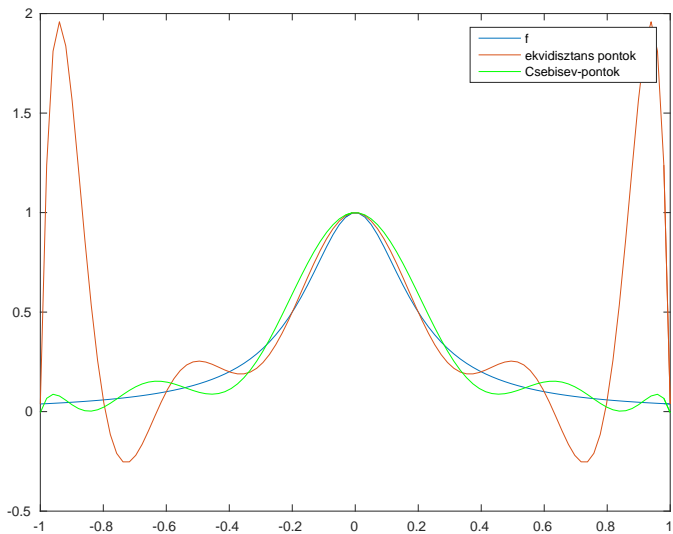
$$-1, -0.8, -0.6, \dots, 0.6, 0.8, 1$$

egyenlő lépésközű (ekvidisztáns) alappontokhoz tartozó
Lagrange-polinomját

- az f függvény

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{22}\pi\right), \quad k = 1, 2, \dots, 11$$

alappontokhoz (Csebisev-pontok) tartozó Lagrange-polinomját.



Hermite-interpoláció

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

x_i	-2	-1	1
$f(x_i)$	-10	-2	2
$f'(x_i)$	-20	10	10
$f''(x_i)$		-16	

Megoldás. Az illeszkedési feltételek száma: $m = 7$, így az Hermite-polinom legfeljebb 6-odfokú lesz.

Készítsük el az osztott differenciák táblázatát!

A kiinduló adatok:

x_i	-2	-1	1
$f(x_i)$	-10	-2	2
$f'(x_i)$	-20	10	10
$f''(x_i)$		-16	

-2	-10		
-2	-10	-20	
-1	-2		
-1	-2	10	
-1	-2	10	-8
-1	-2		
1	2		
1	2	10	
1	2		

Számoljuk ki a hiányzó értékeket!

-2	-10		
		-20	
-2	-10		
-1	-2		
		10	
-1	-2		-8
		10	
-1	-2		
1	2		
		10	
1	2		

A hiányzó elsőrendű osztott differenciák:

-2	-10		
		-20	
-2	-10		
		8	
-1	-2		
		10	
-1	-2		-8
		10	
-1	-2		
		2	
1	2		
		10	
1	2		

A hiányzó másodrendű osztott differenciák:

-2	-10		
		-20	
-2	-10		28
		8	
-1	-2		2
		10	
-1	-2		-8
		10	
-1	-2		-4
		2	
1	2		4
		10	
1	2		

A harmadrendű osztott differenciák:

-2	-10			
-2	-10	-20	28	
-1	-2	8	2	-26
-1	-2	10	-8	-10
-1	-2	10	2	
-1	-2	2	-4	4
1	2		4	
1	2	10		

A negyedrendű osztott differenciák:

-2	-10				
		-20			
-2	-10		28		
		8		-26	
-1	-2		2		16
		10		-10	
-1	-2		-8		4
		10		2	
-1	-2		-4		1
		2		4	
1	2		4		
		10			
1	2				

Az ötödrendű osztott differenciák:

-2	-10					
		-20				
-2	-10		28			
		8		-26		
-1	-2		2		16	
		10		-10		-4
-1	-2		-8		4	
		10		2		-1
-1	-2		-4		1	
		2		4		
1	2		4			
		10				
1	2					

A hatodrendű osztott differencia:

-2	-10						
-2	-10	-20					
-1	-2	8	28				
-1	-2	10	-10	-26			
-1	-2	10	-8	2	16		
-1	-2	10	-4	2	4	-4	
1	2	2	4	1	-1	1	
1	2	10	4	4			
1	2						

-2	-10					
-2	-10	-20				
-1	-2	8	28	-26		
-1	-2	10	2		16	
-1	-2	10	-8	-10	4	-4
-1	-2	10	-8	2	4	1
-1	-2	10	-4	2	1	-1
		2		4		
1	2		4			
1	2	10				
1	2					

$$\begin{aligned}
 H(x) = & -10 - 20(x+2) + 28(x+2)^2 - 26(x+2)^2(x+1) \\
 & + 16(x+2)^2(x+1)^2 - 4(x+2)^2(x+1)^3 \\
 & + 1(x+2)^2(x+1)^3(x-1)
 \end{aligned}$$

Feladat

Határozza meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

*(a)	x_i	-1	1	2
	$f(x_i)$	4	6	94
	$f'(x_i)$	9	17	213

(b)	x_i	-2	-1	1
	$f(x_i)$	13	3	7
	$f'(x_i)$	-31	14	18
	$f''(x_i)$		-40	

Feladat

Írja fel az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény x_0 -beli érintőjének az egyenletét!

Spline interpoláció Matlab-bal

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokhoz tartozó harmadfokú spline-t!

x_i	-2	-1	0	1	2	3
S	4	1	7	4	12	9
S'	15					8

Megoldás. Használjuk a Matlab `spline` függvényét!

```
p=spline(x,y)
```

Előállítja a szakaszonként harmadfokú spline együtthatóit. Itt x az alappontok vektora, az y vektor első és utolsó koordinátája a két végpontban adott deriváltérték, a többi koordináta a függvényértékek.

```
>>x=-2:3; y=[15 4 1 7 4 12 9 8]; p=spline(x,y)
```

```
p =
```

```
    form: 'pp'  
  breaks: [-2 -1 0 1 2 3]  
   coefs: [5x4 double]  
  pieces: 5  
   order: 4  
    dim: 1
```

A spline együtthatói:

```
>> p.coefs
```

```
ans =
```

```
    19.0000   -37.0000    15.0000     4.0000  
   -12.0000    20.0000    -2.0000     1.0000  
    11.0000   -16.0000     2.0000     7.0000  
   -12.0000    17.0000     3.0000     4.0000  
    15.0000   -19.0000     1.0000    12.0000
```

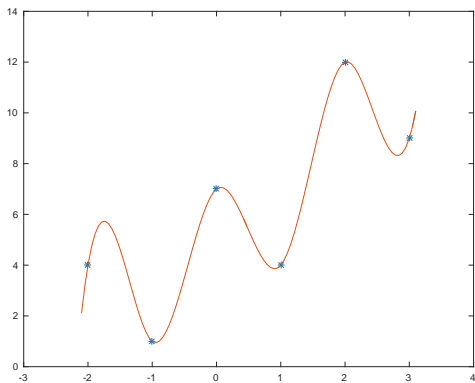
Ha nem az együtthatókat szeretnénk tudni, hanem a spline értékét valamely pont(ok)ban, akkor

```
yy=spline(x,y,xx)
```

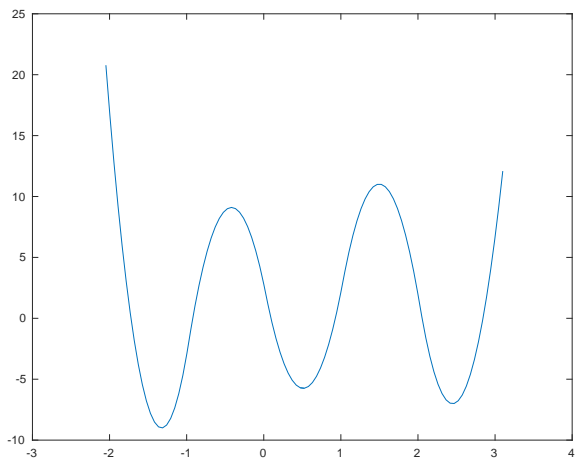
ahol x és y az előbbi vektorok, xx azon pontok vektora, ahol a helyettesítési értéket keressük. Ekkor yy -ba kerülnek a kiszámolt függvényértékek.

```
>> x=-2:3;  
>> y=[15 4 1 7 4 12 9 8];  
>> xx=linspace(-2.1,3.1);  
>> yy=spline(x,y,xx);  
>> plot(x,y(2:end-1),'*',xx,yy)
```

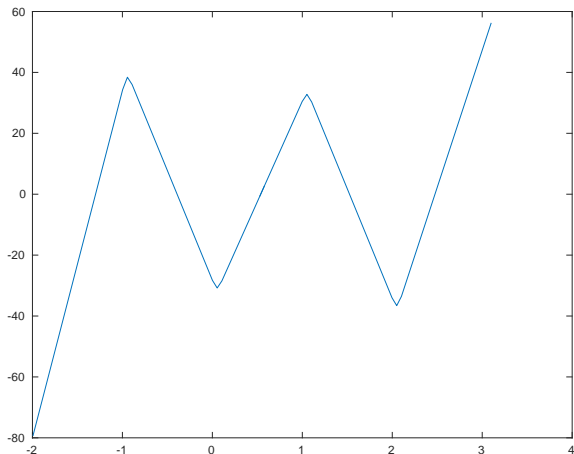
```
x=-2:3;  
y=[15 4 1 7 4 12 9 8];  
xx=linspace(-2.1,3.1);  
yy=spline(x,y,xx);  
plot(x,y(2:end-1),'*',xx,yy)
```



Az előbb ábrázolt spline 1. deriváltja:



A 2. derivált:



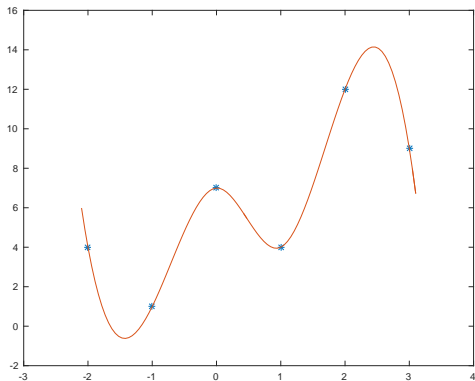
Ez még mindig folytonos, de a részintervallumok határainál töréspontja van.

Megj.

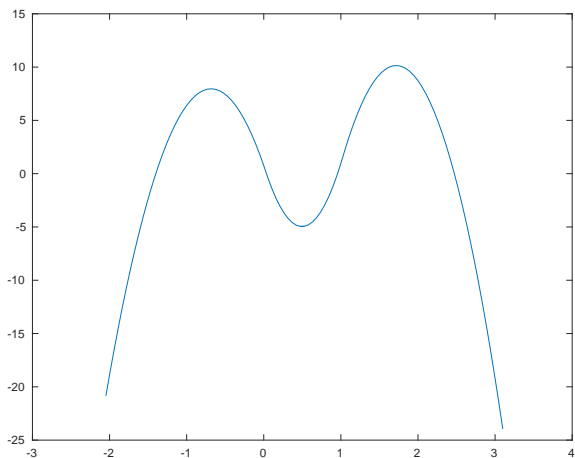
Ha a spline függvényt olyan x és y vektorokkal hívjuk, amelyek ugyanannyi koordinátát tartalmaznak, akkor a hiányzó két feltételt a Matlab azzal helyettesíti, hogy az első és utolsó két részintervallum találkozásánál a harmadik deriváltat is folytonosnak tekinti.

```
x=-2:3;  
y=[4 1 7 4 12 9];  
xx=linspace(-2.1,3.1);  
yy=spline(x,y,xx);  
plot(x,y,'*',xx,yy)
```

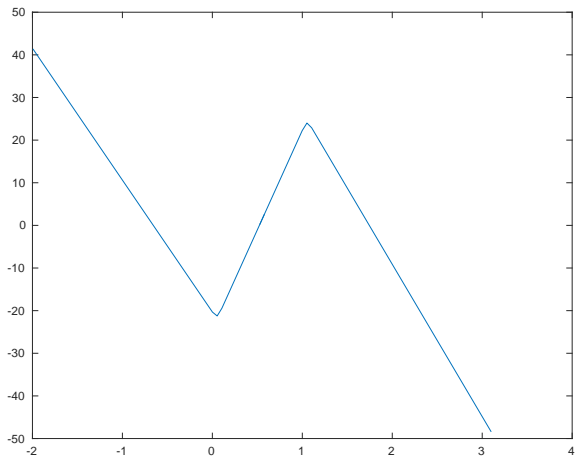
```
x=-2:3;  
y=[4 1 7 4 12 9];  
xx=linspace(-2.1,3.1);  
yy=spline(x,y,xx);  
plot(x,y,'*',xx,yy)
```



Az előbb ábrázolt spline 1. deriváltja:



A 2. derivált:



Most az első és utolsó osztópontban (-1 -ben és 2 -ben) már nincs töréspontja.

*Feladat

Rajzoltassuk ki közös ábrán az alábbi 3 függvényt:

- az

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

függvényt a $[-1, 1]$ intervallumon

- az f függvény

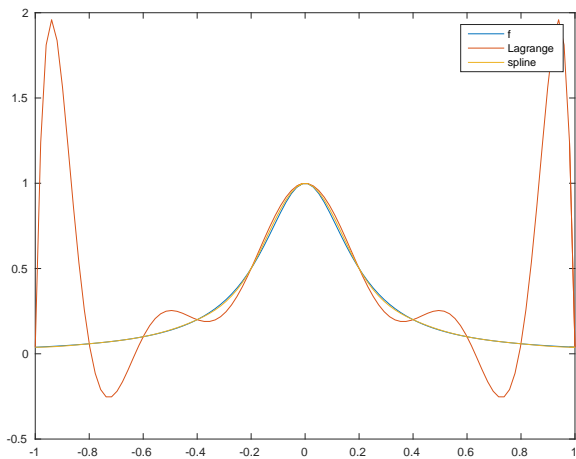
$$-1, -0.8, -0.6, \dots, 0.6, 0.8, 1$$

egyenlő lépésközű (ekvidisztáns) alappontokhoz tartozó
Lagrange-polinomját

- az f függvény

$$-1, -0.8, -0.6, \dots, 0.6, 0.8, 1$$

alappontokhoz tartozó harmadfokú spline polinomját. (A végpontokban a deriváltértékeket tekintjük 0-nak.)



Anoním függvények, function handle

Függvényeket definiálhatunk parancssorban is:

```
>> f1= @(x) x.*sin(x);
```

Ilyen módon az $f1(x) = x \sin(x)$ függvényt definiáltuk, hívása pl.:

```
>> y=f1(pi/4)
y=
    0.5554
```

A @ szimbólum után zárójelben szerepelnek a függvény változói (most x), ezt követi a függvény (ez egy ún. anoním függvény). Az = baloldalán szereplő változó (most $f1$) egy ún. „function handle” típusú változó lesz.

Akár többváltozós függvényeket is megadhatunk így:

```
>> f2= @(x,y) x.^2+x.*y-y+3;
```

Ekkor pl.

```
>> z=f2(2,-1)
```

```
z=
```

```
6
```

A function handle tárolja azon változók értékét is, amelyek szükségesek a függvény kiértékeléséhez:

```
>> a=2.5; b=3;
```

```
>> f3= @(x) a*sin(x)+b*cos(x);
```

```
>> y=f3(-4)
```

```
y=
```

```
-0.0689
```

```
>> clear a b
```

```
>> y=f3(-4)
```

```
y=
```

```
-0.0689
```


Numerikus integrálás Matlab-bal

Egyváltozós függvények integrálására pl az `integral` függvényt használhatjuk.

Példa

Matlab segítségével számítsuk ki az

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x} dx$$

integrál értékét!

Megoldás.

```
>> f= @(x) x.*sqrt(1+x);  
>> integral(f,0,3)  
ans=  
    7.7333
```

Az `integral` függvény hívása:

```
>> integral(fv,xmin,xmax)
```

ahol `fv` az integrálandó függvény (`fv` egy `function handle` típusú változó), `xmin` és `xmax` az alsó és felső határ.

Az `integral` függvény adaptív kvadratúrát használ, és alapértelmezésként 10^{-10} abszolút, vagy 10^{-6} relatív hibával számítja ki az integrál értékét.

A hibahatárok átállíthatóak:

```
>> integral(f,0,3,'RelTol',1e-8,'AbsTol',1e-13)
```

Az előző példában nem feltétlenül szükséges létrehozni a `f` változót:

```
>> integral(@(x) x.*sqrt(1+x),0,3)
ans =
```

7.7333

Ha a függvényt korábban egy `m`-fájlban definiáltuk, pl.

```
function y=myfnc(x)
    y=x.*sqrt(1+x)
end
```

akkor az `integral` függvénynek átadhatjuk a függvény nevét is (function handle-ként):

```
>> integral(@myfnc,0,3)
```

Hasonló a helyzet a Matlab beépített függvényeivel:

```
>> integral(@sin,0,pi)
ans=
```

2.0000

Improprius integrálok

- Az integrálás határai lehetnek $-\infty$ és ∞ is:

```
>> f = @(x) exp(-x);  
>> integral(f,0,Inf)  
ans =  
    1
```

- Az sem probléma, ha a függvény az intervallum végpontjaiban nincs értelmezve:

```
>> f = @(x) 1./sqrt(1-x.^2);  
>> integral(f,-1,1)  
ans =  
    3.1416
```

Paraméteres függvények integrálja

Példa:

$$\int_0^5 x^2 - cx + 3 dx$$

Adott paraméterérték esetén kiszámítható az integrál:

```
>> f = @(x,c) x.^2-c*x+3;
```

Az integrál értéke $c = 4.5$ esetén a $[0, 5]$ intervallum felett:

```
>> integral(@(x) f(x,4.5),0,5)
```

```
ans =
```

```
0.4167
```

Ha nem ismert a függvény

Előfordulhat, hogy nem ismerünk egzakt képletet az integrálandó függvényre, csak bizonyos pontokban ismerjük az értékeit. Ilyenkor a trapz Matlab-függvényt használhatjuk.

Példa

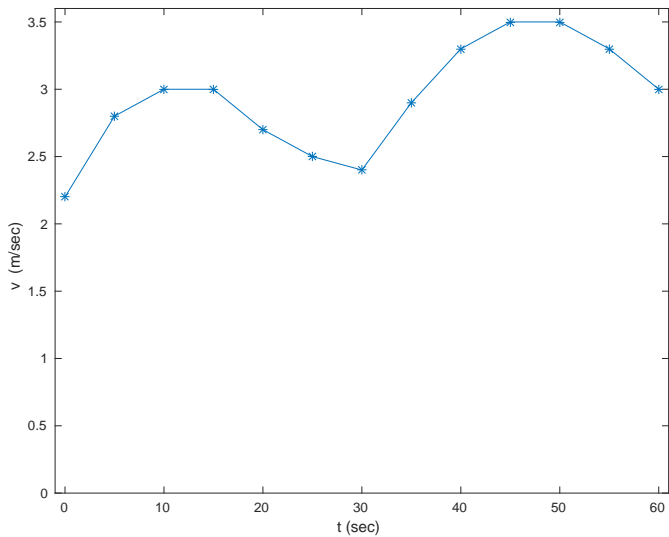
Egy jármű sebességét 1 percen keresztül mértük 5 másodperces időközönként:

t (sec)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
v (m/sec)	2.2	2.8	3	3	2.7	2.5	2.4	2.9	3.3	3.5	3.5	3.3	3

Becsüljük meg a jármű által megtett utat!

Megoldás. Tudjuk, hogy az a idő alatt megtett út:

$$S = \int_0^a v(t) dt$$



A trapz függvény segítségével az integrál becslése:

```
>> x=0:5:60;  
>> f=[ 2.2 2.8 3 3 2.7 2.5 2.4 2.9 3.3 3.5 3.5 3.3 3];  
>> trapz(x,f)  
ans =  
    177.5000  
  
>> y=cumtrapz(x,f);
```

Ekkor

$$y = (0, 12.5, 27, 42, 56.25, 69.25, 81.5, 94.75, 110.25, 127.25, 144.75, 161.75, 177.5)$$

Az y vektor i -edik koordinátája az i -edik időpillanatig megtett utat mutatja.

Feladatok

Matlab segítségével számítsa ki az alábbi határozott integrálok értékét!

*(a)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin(x^2) dx$$

*(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

*(c)

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Feladat

Közelítse az

$$\int_0^{10} x \sin(5x) dx$$

integrált a Matlab `integral` függvényével, illetve a trapz függvénnyel úgy, hogy alappontoknak az

- `xi=0:10` pontokat
- `xi=[0 0.5:9.5 10]` pontokat

választja. Próbálja megmagyarázni a tapasztalt jelenséget (ábrázolja az integrálandó függvényt a megadott intervallum felett). Növelje az alappontok számát a trapz függvény esetén.

Nemlineáris egyenletek Matlab-bal

Az fzero függvény.

Az f nemlineáris függvény olyan gyökének közelítésére, melyek környezetében előjelet vált a függvény.

Ha f function handle-ként adott, akkor

- $x=fzero(f,x0)$
Az $x0$ pontból indulva előállítja a gyök x közelítését
- $[x,fval,exitflag,output]=fzero(f,x0)$
Az $x0$ pontból indulva előállítja a gyök x közelítését, megadja az x helyen a függvényértéket ($fval$), a közelítőeljárás leállításának az okát ($exitflag$), és a keresési eljárás néhány részletét ($output$)

Példa

Matlabbal számítsuk ki az $f(x) = e^x - 4x^2$ függvény $[0, 1]$ -beli gyökét.

Megoldás.

```
>> f=@(x) exp(x)-4*x^2;
>> [x,fval]=fzero(f,0.5)
x=
    0.7148
fval=
   -4.4409e-16
```

A gyök közelítése 4 tizedesjegyre kerekítve: 0.7148, ebben a pontban a függvényérték $-4.4409 \cdot 10^{-16}$.

Ha több tizedesjegyre akarjuk látni az eredményt állítsuk át a kiiratás formátumát!

```
>> format long
>> x
x=
0.714805912362778
```

Ha a keresési eljárásról több információt szeretnénk:

```
>> [x,fval,exitflag,output]=fzero(f,0.5)
```

```
x =
```

```
0.714805912362778
```

```
fval =
```

```
-4.440892098500626e-16
```

```
exitflag =
```

```
1
```

```
output =
```

```
intervaliterations: 9
```

```
iterations: 6
```

```
funcCount: 25
```

```
algorithm: 'bisection, interpolation'
```

```
message: 'Zero found in the interval [0.273726, 0.726274]'
```

Ha ismerünk olyan intervallumot, ahol a függvény előjelet vált, akkor meggyorsíthatjuk a keresési eljárást, ha x_0 helyett ezzel az intervallummal hívjuk az `fzero` függvényt:

```
>> [x,fval,exitflag,output]=fzero(f,[0,1])
x =
    0.714805912362778

fval =
   -4.440892098500626e-16

exitflag =
     1

output =
    intervaliterations: 0
      iterations: 7
      funcCount: 9
    algorithm: 'bisection, interpolation'
      message: 'Zero found in the interval [0, 1]'
```

Ha a függvény nem vált előjelet a gyök környezetében, akkor az fzero függvény nem találja meg a gyököt:

```
>> f=@(x) 13-9*cos(x).^2-12*sin(x);  
>> x=fzero(f,0)
```

```
Exiting fzero: aborting search for an interval containing a sign change  
because NaN or Inf function value encountered during search.
```

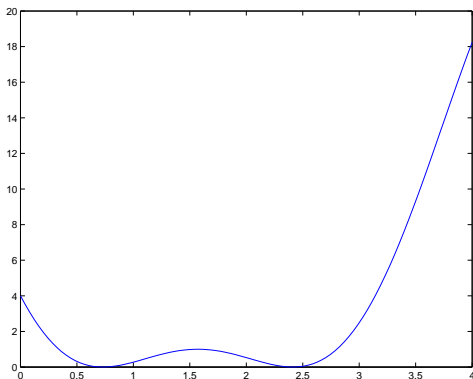
```
(Function value at -Inf is NaN.)
```

```
Check function or try again with a different starting value.
```

```
x =
```

```
NaN
```

Ábrázoljuk az f függvényt a $[0, 4]$ intervallumon!



Az ábra alapján azt sejtjük, hogy a függvénynek 0.5 és 2.5 környezetében van 1-1 gyöke, ahol a függvény nem vált előjelet. Az is látszik, hogy itt a függvénynek minimuma van.

fminbnd

- `x=fminbnd(f,xmin,xmax)`
- `[x,fval,exitflag,output]=fminbnd(f,xmin,xmax)`

Megkeresi az f függvény $[xmin, xmax]$ intervallumbeli minimumát.

Példa:

```
>> f=@(x) 13-9*cos(x).^2-12*sin(x);
```

```
>> [x,fval]=fminbnd(f,0,1)
```

```
x =
```

```
0.7297
```

```
fval =
```

```
9.2491e-11
```

```
>> [x,fval]=fminbnd(f,2,3)
```

```
x =
```

```
2.4119
```

```
fval =
```

```
1.7231e-13
```

Ha az ábra alapján -vagy egyéb rendelkezésre álló információ alapján- úgy látjuk, hogy a függvénynek olyan gyöke van, ahol nem vált előjelet, és ez a függvény lokális maximuma, akkor az $f_{\min bnd}$ függvényt $-f$ -re hívjuk meg.

Fontos! Mindig ellenőrizzük (a függvényérték kiíratásával), hogy az adott szélsőérték hely valóban gyökhely-e.

Polinomok gyökeinek keresésére az `roots` függvényt használhatjuk: keressük meg az $x^4 + x^3 - x - 1$ polinom gyökeit!

```
>> p=[1 1 0 -1 -1];
```

```
>> roots(p)
```

```
ans =
```

```
1.0000 + 0.0000i
```

```
-0.5000 + 0.8660i
```

```
-0.5000 - 0.8660i
```

```
-1.0000 + 0.0000i
```

Feladatok

- *(a) Közelítse a $3x = \cos(x)$ egyenlet gyökeit!
- *(b) Közelítse a $3x^3 - 12x + 4 = 0$ egyenlet gyökeit!
- *(c) Közelítse az $e^x = \sin(x)$ egyenlet gyökeit!
- *(d) Közelítse az $\ln(x) = 2 - x$ egyenlet gyökét!
- *(e) Közelítse a $\cos^2(x) + 2 \sin(x) = 2$ egyenlet gyökét!
- *(f) Közelítse az $x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$ egyenlet gyökeit!