Matematika Mérnököknek 1.

Baran Ágnes

Gyakorlat
Vektorok, mátrixok, lineáris egyenletrendszerek

Feladat

1. *Legyen*

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1+i \\ 2i \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+i \\ i^2-3i \end{pmatrix}, \ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} i-1 \\ i-2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Számítsa ki az alábbi kifejezések értékét!

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}, \quad -5\mathbf{c}, \quad 12\mathbf{a}+4\mathbf{b}, \quad 3\mathbf{c}+\mathbf{d}, \quad \|\mathbf{b}\|, \quad \|\mathbf{c}+\mathbf{d}\|, \quad \mathbf{u}-i\mathbf{v},$$

$$(3+2i)\mathbf{w}-i\mathbf{z}, \quad \mathbf{v}-3i\mathbf{u}, \quad \|\mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{z}\|, \quad \|i\mathbf{z}+w\|.$$

Feladatok

2. *Határozza meg az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorok által bezárt szöget!*

(a) $\mathbf{a}^T = (2, 1)$, $\mathbf{b}^T = (1, 3)$

(b) $\mathbf{a}^T = (3, \sqrt{3})$, $\mathbf{b}^T = (2, 0)$

(c) $\mathbf{a}^T = (1, 3, 1)$, $\mathbf{b}^T = (-4, -2, 0)$

(d) $\mathbf{a}^T = (-2, 3, 4)$, $\mathbf{b}^T = (-6, -4, 2)$

3. *Adja meg úgy* λ*-t, hogy az* $\mathbf{a}$ *vektor merőleges legyen* $\mathbf{b}$*-re!*

(a) $\mathbf{a}^T = (1, 1)$, $\mathbf{b}^T = (-2, \lambda)$

(b) $\mathbf{a}^T = (4, 2, 1)$, $\mathbf{b}^T = (-4, -2, \lambda)$

(c) $\mathbf{a}^T = (1, 2, 1, 1)$, $\mathbf{b}^T = (-4, -2, 2, \lambda)$

(d) $\mathbf{a}^T = (1, \lambda, \lambda)$, $\mathbf{b}^T = (-3, -2, \lambda)$

Példa

Alkalmazzuk a Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárást az alábbi vektorrendszerre. Ellenőrizzük a kapott vektorrendszer ortonormáltságát!

$$a_1 = (1, 2, -1)^T, \quad a_2 = (0, -5, 2)^T, \quad a_3 = (2, 9, 8)^T$$

Megoldás. A q_1, q_2, q_3 vektorrendszert a köv. módon határozhatjuk meg:

$$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}, \quad \overline{q}_2 = a_2 - (a_2^T \cdot q_1)q_1, \quad q_2 = \frac{\overline{q}_2}{\|\overline{q}_2\|}$$

$$\overline{q}_3 = a_3 - (a_3^T \cdot q_1)q_1 - (a_3^T \cdot q_2)q_2, \quad q_3 = \frac{\overline{q}_3}{\|\overline{q}_3\|}$$

Ebből

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{q}_2 = a_2 - (a_2^T \cdot q_1)q_1, \quad q_2 = \frac{\overline{q}_2}{\|\overline{q}_2\|},$$

ahol

$$a_2^T \cdot q_1 = -\frac{12}{\sqrt{6}} \quad \text{és} \quad (a_2^T \cdot q_1)q_1 = -\frac{12}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

így

$$\overline{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \|\overline{q}_2\| = \sqrt{5},$$

ebből

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{q}_3 = a_3 - (a_3^T \cdot q_1)q_1 - (a_3^T \cdot q_2)q_2, \quad q_3 = \frac{\overline{q}_3}{\|\overline{q}_3\|}$$

ahol

$$a_3^T \cdot q_1 = \frac{12}{\sqrt{6}} \quad \text{és} \quad (a_3^T \cdot q_1)q_1 = \frac{12}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

és

$$a_3^T \cdot q_2 = -\frac{5}{\sqrt{5}} \quad \text{és} \quad (a_3^T \cdot q_2)q_2 = -\frac{5}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{q}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \frac{1}{\sqrt{120}}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

A kapott vektorrendszer:

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \frac{1}{\sqrt{120}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Mivel mindhárom vektor normája 1, ezért normáltak. Ellenőrizzük az ortogonalitásukat!

$$q_1^T q_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$q_1^T q_3 = \frac{1}{\sqrt{720}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = 0$$

$$q_2^T q_3 = \frac{1}{\sqrt{600}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = 0$$

Feladat

4. Alkalmazza a Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárást az alábbi vektorrendszerekre. Ellenőrizze a kapott vektorrendszer ortonormáltságát!

(a)

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T, \; a_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T, \; a_3 = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}^T$$

(b)

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T, \; a_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}^T, \; a_3 = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 11 \end{pmatrix}^T$$

(c)

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \; a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}^T$$

(d)

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T$$

Feladatok

5. *Mutassa meg, hogy az* $(1,2)$, $(-3,2)$ *vektorok lineárisan függetlenek* $\mathbb{R}^2$*-ben!*

6. *Állapítsa meg, hogy lineárisan függetlenek-e* $\mathbb{R}^3$*-ban az alábbi vektorrendszerek!*

(a) $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,1)$,

(b) $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (1,1,1)$,

(c) $v_1 = (1,2,2)$, $v_2 = (-1,-1,3)$, $v_3 = (2,3,0)$,

(d) $v_1 = (1,1,2)$, $v_2 = (2,3,-1)$, $v_3 = (-1,2,-17)$,

(e) $v_1 = (1,1,2)$, $v_2 = (-2,-2,-4)$,

(f) $v_1 = (-1,2,1)$, $v_2 = (2,-3,1)$ $v_3 = (1,1,2)$

Feladatok

7. *Határozza meg a*

(a) $(1,0)$, $(0,1)$,

(b) $(-2,0)$, $(0,1)$,

(c) $(1,-2)$, $(2,-4)$,

(d) $(3,2)$,

(e) $(1,2)$, $(3,1)$,

(f) $(1,0)$, $(2,-4)$, $(0,2)$.

vektorok által generált alteret $\mathbb{R}^2$*-ben!*

8. *Határozza meg a*

(a) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$,

(b) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$,

(c) $(1,1,0)$, $(0,1,0)$,

(d) $(0,0,1)$,

(e) $(1,1,1)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$,

(f) $(1,0,0)$, $(2,2,0)$, $(0,-1,0)$.

vektorok által generált alteret $\mathbb{R}^3$*-ban!*

Feladat

9. *Legyen*

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \pi \\ i-1 \\ 3-2i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1-i \\ \lambda \end{pmatrix},$$

és

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

Számítsa ki $B\mathbf{a}$, $B\mathbf{b}$, $A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^T B$, $\mathbf{v}^T\mathbf{d}$, $C\mathbf{w}$, $\mathbf{w}^T C\mathbf{d}\mathbf{a}^T$, $\mathbf{b}^T B$, $\mathbf{a}^T\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\mathbf{b}^T$, $\mathbf{w}^T\mathbf{w}$, $\mathbf{w}\mathbf{w}^T$ *értékét!*

Feladat

10. *Tekintsük a következő valós mátrixokat:*

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & -3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & -5\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$F=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ -2 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ -1 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Számítsa ki a következő kifejezések értékét!

$$A+B,\ -3B,\ 2A+3C,\ A^T,\ AD,\ D^TB,\ (A+B)^T,\ (3B)^T,$$
$$DF,\ GD^T,\ AB,\ BA,\ AE,\ EA,\ A(B+C),\ C(2A-B),\ A^TA,$$
$$FG,\ 2F-3G,\ F^T-G,\ G+2F^T,\ G^2-2FG+F^2,\ (G-F)^2$$

Feladat

11. *Számítsa ki az alábbi mátrixok determinánsát és az inverzüket, amennyiben létezik!*

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Feladat

12. *Számítsa ki az alábbi mátrixok determinánsát!*

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 & 19 \\ 8 & -11 & -34 \\ -5 & 7 & 21 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Feladatok

13. *Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket!*

(a)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 6 \\ 3x_1 - x_2 &= 13 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 1 \\ 4x_1 - x_2 &= 7 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} -x_1 - 5x_2 &= 7 \\ 4x_1 - 3x_2 &= -5 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &= -4 \\ 6x_1 - 4x_2 &= 8 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -4 \\ 6x_1 - 3x_2 &= 9 \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} -2x_1 - 5x_2 &= 3 \\ x_1 - 3x_2 &= 4 \end{aligned}$$

14. *Írja fel az előző feladatban adott lineáris egyenletrendszereket $Ax = b$ alakban!*

Példa

Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ -4x_1 - 10x_2 - 5x_3 &= -12 \end{aligned}$$

Megoldás. Felírható $Ax = b$ alakban, ahol

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Gauss-elimináció:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ -4 & -10 & -5 & -12 \end{array}\right) \overset{\substack{\text{II.+I.} \\ \text{III.-2*I.}}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -13 & -18 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{III.+4*II.}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

A visszahelyettesítés:

$$\begin{aligned} -x_3 &= -2 & \rightarrow \quad x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 4 & \rightarrow \quad x_2 &= -1 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 3 & \rightarrow \quad x_1 &= 3 \end{aligned}$$

Megj.: Azt is látjuk, hogy $\det(A) = (-2) \cdot 2 \cdot (-1) = 4$

Feladat

15. *Oldja meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert és számolja ki* $\det(A)$*-t, ha*

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & -7 & 5 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & -9 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -28 \\ -7 \\ -23 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} -12 & 10 & -1 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \\ -9 & 2 & -12 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ 29 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -3 \\ -3 & 11 & 10 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -21 \\ 47 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Megoldás.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & -9 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I.} \leftrightarrow \text{II.}} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -9 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -9 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & -3 & 4 \end{array}\right) \overset{\substack{\text{II.}+2*\text{I.} \\ \text{III.-I.} \\ \text{IV.}+\text{I.}}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -7 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\text{III.}+\text{II.} \\ \text{IV.}+\text{II.}}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \overset{\text{IV.-III.}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Az egyenletrendszer nem megoldható, mivel a kibővített mátrix rangja nagyobb, mint az alapmátrix rangja.

Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -6 & 1 & -8 & -13 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Megoldás.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ -6 & 1 & -8 & -13 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II.}+3*\text{I.}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -6 \end{array}\right)$$

A 2. egyenlet azt jelenti, hogy 3 ismeretlenre csak 1 korlátozó feltételünk van, így bevezetünk 2 szabad paramétert:

$$x_3 = t, \quad x_4 = s, \text{ ahol } t, s \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -6 \end{array}\right)$$

$$x_3 = t, \quad x_4 = s, \text{ ahol } t, s \in \mathbb{R}$$

A 2. egyenletből:

$$x_2 = 3 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}s$$

Az 1. egyenletből:

$$x_1 = 2 - \frac{5}{4}t - \frac{9}{4}s$$

Az egyenletrendszer megoldása tehát:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ahol } t, s \in \mathbb{R}$$

Feladat

16. *Oldja meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ahol*

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -9 & 14 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 0 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Feladat

17. *Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket Gauss-eliminációval!*

(a)

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 &= 15 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 - 8x_4 &= -19 \\ x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 8x_4 &= 17 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} -6x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 8x_4 &= 3 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 6x_1 - 6x_2 - 5x_4 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_3 + 6x_4 &= 14 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} -6x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 8x_4 &= 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 6x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_3 + 6x_4 &= 17 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 8x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= 1 \\ 6x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= 17 \end{aligned}$$

Feladat

(e)

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 - 8x_2 - 3x_4 &= 4 \\ -5x_1 + 17x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -2 \\ 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= 12 \\ -5x_1 + 12x_2 + 9x_3 &= -20 \\ -13x_1 + 32x_2 + 25x_3 &= -52 \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 4 \\ 5x_1 - 8x_2 - 21x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 4x_2 - 29x_3 &= -17 \end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(i)

$$2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$$

Feladat

18. *Határozza meg az alábbi mátrixok inverzét!*

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -6 & 1 & -4 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 6 \\ -9 & 1 & -11 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -4 & 7 & -1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & 8 & -12 & -4 \\ 0 & -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Vektorok Matlab-ban

Megkülönbözteti a sor- és oszlopvektorokat

Sorvektorok

Az $a = (-1.2, 3.1, 4.7, 1.9)$ vektor megadása elemei felsorolásával:

- az elemeket vesszővel választjuk el:

  ```
  a =[-1.2, 3.1, 4.7, 1.9]
  ```

- vagy az elemeket szóközzel választjuk el:

  ```
  a=[-1.2 3.1 4.7 1.9]
  ```

A vektorkoordináták számozása 1-gyel kezdődik, `a(i)` az a vektor i-edik koordinátája.

`length(a)` az a vektor koordinátáinak száma

`a=[]` üres vektor

Vektorok, mint szabályos sorozatok

A kettőspont operátorral

- a $b = (1, 2, 3, 4, 5)$ vektor:

  ```
  b = 1:5
  ```

- a $c = (5, 4, 3, 2, 1)$ vektor:

  ```
  c = 5:-1:1
  ```

- a $d = (2, 2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 3)$ vektor

  ```
  d=2:0.2:3
  ```

Általában:

```
x=elsoelem:lepeskoz:utolsoelem
```

ahol a lépésköz negatív is lehet, vagy

```
x=elsoelem:utolsoelem
```

ekkor a lépésköz 1.

Vektorok, mint szabályos sorozatok

A `linspace` függvénnyel:

- az $e = (1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2)$ vektor

  `e=linspace(1,2,6)`

- egy 100 koordinátából álló f vektor

  `f=linspace(1,2)`

Általában:

```
x=linspace(elsoelem,utolsoelem,elemekszama)
```

ahol a koordináták egyforma lépésközzel követik egymást, vagy

```
x=linspace(elsoelem,utolsoelem)
```

ekkor a koordináták száma 100.

Oszlopvektorok

Oszlopvektorok megadása

- elemeinek felsorolásával (a vektor koordinátáit pontosvesszővel választjuk el)

  `m=[-3;0;7]`

- egy sorvektor transzponálásával: `n=[1 -2 4 -1]'`
  (**valójában a ' jel konjugált transzponáltat eredményez, a konjugálás nélküli transzponátás:** `a.'` **vagy** `transpose(a)`)

`x(i)` és `length(x)` az x vektor i-edik koordinátája és az x vektor koordinátáinak száma (ugyanúgy mint a sorvektoroknál)

`size(x)` az x vektor mérete (sorvektoroknál az `[1 length(x)]` vektor, oszlopvektoroknál a `[length(x) 1]` vektor)

Vektorok konstruálása más vektorokból

- `[a b]` két sorvektor egymás után fűzése
- `[m;n]` két oszlopvektor egymás után fűzése
- `[-4 a 3 -1]` sorvektor bővítése újabb elemekkel
- `[1;m;-3]` oszlopvektor bővítése újabb elemekkel
- `h(2:4)` a *h* vektor 2., 3. és 4. koordinátájából álló vektor
- `h([1 4 5])` a *h* vektor 1., 4. és 5. koordinátájából álló vektor
- `h(2)=[]` elhagyja a *h* vektor 2. koordinátáját
- `h([2 4])=[]` elhagyja a *h* vektor 2. és 4. koordinátáját

Fontos! Ha `a=[-1 3 2]` akkor az `a(6)=4` utasítás eredménye az `a=[-1 3 2 0 0 4]` vektor (a legkisebb olyan vektor, amelyben van értelme a `a(6)=4` utasításnak, a nemdefiniált elemeket 0-kal tölti fel. **Megváltozik a vektor mérete, erre nem figyelmeztet!**)

Néhány hasznos függvény

- `min(x)` és `max(x)` az x vektor legkisebb és legnagyobb eleme
- `sort(x)` az x elemeit növekvő sorrendbe rendezi
- `sort(x,'descend')` az x elemeit csökkenő sorrendbe rendezi
- `flip(x)` az x elemeit fordított sorrendben sorolja fel
- `length(x)` az x vektor elemeinek a száma
- `sum(x)` az x vektor elemeinek összege
- `prod(x)` az x vektor elemeinek szorzata
- `mean(x)` az x vektor elemeinek átlaga
- `x(3)` az x vektor harmadik eleme
- `x(1:3)` az x vektor első három eleme
- `x(3:end)` az x vektor minden elemei a harmadiktól az utolsóig

Műveletek vektorokkal

Ha `a` és `b` két ugyanolyan méretű vektor, akkor

- `a+b` ill. `a-b` a két vektor összege és különbsége
- `x=a+1` egy ugyanolyan méretű vektor mint `a`, $x_i = a_i + 1$
- `x=a.^2` egy ugyanolyan méretű vektor mint `a`, $x_i = a_i^2$.
- `x=a.*b` egy ugyanolyan méretű vektor mint `a` és `b`, $x_i = a_i b_i$
- `x=a./b` egy ugyanolyan méretű vektor mint `a` és `b`, $x_i = \frac{a_i}{b_i}$
- `x=1./a` egy ugyanolyan méretű vektor mint `a`, $x_i = \frac{1}{a_i}$
- `dot(a,b)` az `a` és `b` skaláris szorzata

Fontos! A műveleti jel előtti pont a művelet elemenkénti végrehajtását eredményezi

`sin`, `cos`, `tan`, `exp`, `log`, `sqrt`, `abs`, stb. mind elemenként hajtódik végre.

`NaN` : Not a Number (pl. 0/0, `Inf/Inf`)

Feladatok

- Az elemek egyenkénti begépelése nélkül állítsa elő az alábbi vektorokat!
  (1) $a = (0, 1, \cdots, 30)$
  (2) $b = (2, 4, 6, \ldots, 100)$,
  (3) $c = (2, 1.9, 1.8, \cdots, 0.1, 0)$
  (4) $d = (0, 3, 6, \ldots, 27, 30, -100, 30, 27, \cdots, 6, 3, 0)$
  (5) $e = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{20}\right)$
  (6) $f = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{19}{20}\right)$
- Legyen x egy adott 100 elemű sorvektor. Az x vektorból állítsa elő azt az y vektort, melynek elemei
  (1) az x vektor elemei fordított sorrendben felsorolva,
  (2) az x vektor első 5 eleme,
  (3) az x vektor elemei ugyanolyan sorrendben, kivéve az x 4. elemét
  (4) az x vektor elemei ugyanolyan sorrendben, kivéve az x 5., 72. és 93. elemét
  (5) az x vektor páratlan sorszámú elemei
  (6) az x vektor 2., 5., 17. és 81. eleme.

Feladatok

Legyen x egy adott sorvektor. A `for` utasítás használata nélkül az x vektorból állítsa elő azt az y vektort, melynek i-edik eleme

(1) $x(i) + 2$

(2) $x(i)^2$

(3) $1/x(i)$

(4) $\sin(x(i)^3 - 1)$

(5) $x(i) - i$

Mátrixok Matlab-ban

Mátrix megadása elemenként

$A = [1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9]$ vagy $A = [1 \quad 2 \quad 3; \quad 4 \quad 5 \quad 6; \quad 7 \quad 8 \quad 9]$
eredménye:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(Az egy sorban álló elemeket vesszővel vagy szóközzel, a sorokat pontosvesszővel választjuk el.)

A mátrixelemek számozása $(1, 1)$-gyel kezdődik.

`A(i,j)` a mátrix (i, j)-edik eleme.

Mátrixok megadása

Vektorok összefűzésével

Ha `a=[1 -2 0]`; `b=[2 -11 7]`; `m=[-3;0;7]`; `n=[1; -2; 0]`; akkor `B=[a;b]` eredménye:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -11 & 7 \end{pmatrix}$$

`C=[a' b']` és `D=[m n]` eredménye:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -11 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Mátrixok bővítése

Az előbb definiált mátrixokkal, vektorokkal:
`E=[A;a]` vagy `E=[A;[1,-2,0]]` eredménye

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tehát: *[mátrix „sortörés" (azaz ;) sorvektor]*

Az `F=[A m]` vagy `F=[A, m]` eredménye

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Tehát: *[mátrix szóköz vagy vessző oszlopvektor]*

Mátrixok bővítése

`G=[C D]` és `H=[C;D]` eredménye

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -11 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -11 \\ 0 & 7 \\ -3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

`C(4,5)=9` eredménye:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Megváltozik a mátrix mérete, erre nem figyelmeztet!

Hivatkozás elemekre, sorokra, oszlopokra, részmátrixokra

- `size(A)` az A mátrix mérete (egy kételemű sorvektor)
- `length(A)` egy skalár: `max(size(A))`
- `A(i,j)` az A mátrix (i,j)-edik eleme
- `A(i,:)` egy sorvektor, az A mátrix i-edik sora
- `A(:,j)` egy oszlopvektor, az A mátrix j-edik oszlopa
- `A(2:3,:)` az A mátrix 2. és 3. sora
- `A([1 2 4],:)` az A mátrix 1., 2. és 4. sora
- `A(:,[1 3])` az A mátrix 1. és 3. oszlopa
- `A(2:3,[1 3])` az A mátrix 2. és 3. sorának és 1. és 3. oszlopának metszetéből álló mátrix

Mátrixok „átszabása”

Sorok, oszlopok elhagyása mátrixokból

- `A(i,:)=[]` az *i*-edik sor elhagyása
- `A(:,j)=[]` a *j*-edik oszlop elhagyása
- `A([1 3],:)=[]` az 1. és 3. sor elhagyása
- `A(:,[1 3])=[]` az 1. és 3. oszlop elhagyása

Sor- és oszlopcsere

Az *i*-edik és *j*-edik sor illeve oszlop cseréje:
`A([i,j],:)=A([j,i],:)`, ill. `A(:,[i,j])=A(:,[j,i])`

Mátrixból vektor

`A(:)` az A mátrix elemei oszlopfolytonosan felsorolva

Néhány beépített mátrix

eye(n)	az $n \times n$-es egységmátrix
eye(n,m)	az $n \times m$-es egységmátrix
ones(n)	a csupa 1-esből álló $n \times n$-es mátrix
ones(n,m)	a csupa 1-esből álló $n \times m$-es mátrix
zeros(n)	a csupa 0-ból álló $n \times n$-es mátrix
zeros(n,m)	a csupa 0-ból álló $n \times m$-es mátrix

Néhány hasznos függvény

- `numel(A)` az A elemeinek száma
- `size(A)` az A mérete
- `length(A)` egyenlő `max(size(A))` értékével

Műveletek vektorok és mátrixok között

Legyen A és B két mátrix (melyek akár vektorok is lehetnek), c egy skalár. Az

$$\texttt{A+B}, \quad \texttt{A-B}, \quad \texttt{c*A}, \quad \texttt{A*B}, \quad \texttt{A\^{}2}$$

műveletek a hagyományos, lineáris algebrában értelmezett műveletek, feltéve, hogy A és B mérete megfelelő. Az

$$A + c$$

művelet eredménye: az A minden eleméhez hozzáadunk c-t. Az

$$A/B \quad \text{és} \quad A\backslash B$$

műveletek eredménye $A \cdot B^{-1}$ és $A^{-1} \cdot B$.

Műveletek vektorok és mátrixok között

Elemenkénti művelet

A műveleti jel előtti . jel a művelet elemenkénti végrehajtását eredményezi:

Az `A.*B` mátrix *ij*-edik eleme $a_{ij} * b_{ij}$,
az `A.^2` mátrix *ij*-edik eleme a_{ij}^2,
az `A./B` mátrix *ij*-edik eleme a_{ij}/b_{ij}.

A beépített Matlab függvények általában hívhatók mátrix argumentummal is, pl. `sin(A)`, `log(A)`, `exp(A)`, `abs(A)`, stb. Ilyenkor a függvény a mátrix minden elemére végrehajtódik.

Feladatok

Legyen $x = [-1 \quad 4 \quad 0]$, $y = [3 \quad -2 \quad 5]$
és $A = [-3 \quad 1 \quad -4; 6 \quad 2 \quad -5]$. Döntse el, hogy az alábbi utasítások közül melyik végrehajtható. Ha nem végrehajtható, akkor magyarázza meg miért, ha végrehajtható, akkor fogalmazza meg mi lesz az eredmény!

(1) $z = [x, y]$
(2) $z = [x; y]$
(3) $z = [x', y']$
(4) $z = [x'; y']$
(5) $z = [A; x]$
(6) $z = [A, x]$
(7) $z = [x; A; y]$
(8) $z = [A'; x]$
(9) $z = [A', x]$
(10) $z = [A', x']$
(11) $x + y$
(12) $x + y'$
(13) $A + y$
(14) $A + 2$
(15) x/y
(16) $x./y$
(17) $A\,\hat{}\,2$
(18) $A.\hat{}\,2$

Feladat

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Konstruálja meg (az elemek felsorolása nélkül) azt a B mátrixot, melyet úgy kapunk, hogy

(1) elhagyjuk az A mátrix első sorát,

(2) elhagyjuk az A mátrix 2. és 4. oszlopát,

(3) elhagyjuk az A mátrix utolsó sorát és oszlopát

(4) kétszer egymás mellé írjuk az A mátrixot,

(5) transzponáljuk az A mátrixot,

(6) felcseréljük az A mátrix 2. és 4. oszlopát

(7) négyzetre emeljük az A elemeit

(8) az A minden elemét megnöveljük 3-mal

(9) A minden elemének vesszük a négyzetgyökét

(10) A minden elemének vesszük a szinuszát

(11) az A első sorának második elemét kicseréljük -2-re

(12) az A 2. sorát kicseréljük a $[-1 \quad 0 \quad -2 \quad 3]$ vektorra

Feladat

- Egy rövid Matlab utasítás segítségével állítsa elő az alábbi mátrixot!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 20 & 18 & 16 & 14 & 12 & 10 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 \end{pmatrix}$$

- Az előző feladat A mátrixával vizsgálja meg az alábbi utasítások eredményét!

(1) `sum(A)`
(2) `sum(A,2)`
(3) `reshape(A,6,4)`
(4) `max(A)`
(5) `max(A,[],2)`
(6) `max(A,2)`
(7) `flipud(A)`
(8) `fliplr(A)`
(9) `size(A)`
(10) `length(A)`

Lineáris algebra Matlab-bal

Példa

Matlab segítségével döntse el, hogy a

$$a = \begin{pmatrix} 16 \\ 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}$$

vektorrendszer lineárisan független-e!

1. megoldás: Készítsük el az alábbi A mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 3 \\ 5 & 11 & 10 \\ 9 & 7 & 6 \\ 4 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

majd a `rank` függvénnyel számítsuk ki a rangját.

2. megoldás: Az előző A mátrixszal hívjuk meg a `rref` függvényt!

```
>> R=rref(A)

R=
    1  0  0
    0  1  0
    0  0  1
    0  0  0
```

R az A mátrixon végrehajtott Gauss-Jordan elimináció eredménye, ebből láthatjuk, hogy az A oszlopai lineárisan függetlenek.

Példa

Döntse el, hogy az előző a, b, c vektorokhoz hozzávéve a $d = (13, 8, 12, 1)^T$ vektort lineárisan független vektorrendszert kapunk-e?

1. megoldás. Egészítsük ki az A mátrixot a d oszlopvektorral:

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

Ennek a mátrixnak a rangja:

```
>>rank(A)
ans=
    3
```

Tehát a vektorrendszer nem független.

2. megoldás. Mivel a mátrix négyzetes, most a determinánsát is kiszámíthatjuk:

```
>>det(A)
ans=
    -1.4494e-12
```

Ez azt jelenti, hogy a Matlab szerint a mátrix determinánsa $\det(A) = -1.4494 \cdot 10^{-12}$, ami közel van 0-hoz, de nem 0.
Ez a gépi számítás során bekövetkező hibákra vezethető vissza, ld. később.

3. megoldás. Használjuk újra az `rref` függvényt!

```
R=rref(A)
R=
   1 0 0  1
   0 1 0  3
   0 0 1 -3
   0 0 0  0
```

Ez azt jelenti, hogy a vektorrendszer lineárisan függő, sőt azt is megkaptuk, hogy $d = a + 3b - 3c$.

Feladat

- Keressünk két lineárisan független vektort a

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

  vektorrendszerben, és a másik két vektort írjuk fel ezek lineáris kombinációjaként.

- Keressünk három lineárisan független vektort a

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

  vektorrendszerben, és a negyedik vektort írjuk fel ezek lineáris kombinációjaként.

Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert Matlab-bal, ha

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Megoldás. Használjuk a Matlab `backslash` operátorát!

```
>>A=[-2 -1 4; 2 3 -1; -4 -10 -5];
>>b=[3; 1; -12];
>>x=A\b
x=
    3
   -1
    2
```

Ügyeljünk rá, hogy a b oszlopvektorként legyen megadva!

Ha az egyenletrendszer kibővített mátrixával meghívjuk az `rref` függvényt:

```
>>rref([A b])
ans=
   1 0 0  3
   0 1 0 -1
   0 0 1  2
```

akkor láthatjuk, hogy a Gauss-Jordan elimináció eredményeként valóban így állítható elő a b vektor az A oszlopvektoraiból, amelyek lineárisan függetlenek, tehát a megoldás egyértelmű.

Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert Matlab-bal, ha

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ -2 & -7 & 3 \\ 2 & 12 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Megoldás. Próbálkozzunk ismét a `backslash` operátorral!

```
>>A=[-4 -4 2; -2 -7 3; 2 12 -5];
>>b=[-2; 6; -13];
>>x=A\b
Warning: Matrix is singular to working precision
x=
   NaN
   NaN
   NaN
```

A Matlab arra figyelmeztetett, hogy a mátrix szinguláris (valóban, $\det(A) = 0$), és ezzel a módszerrel nem sikerült meghatároznunk x-et.

Próbálkozzunk az `rref` függvénnyel!

```
>>rref([A b])
ans=
   1.0000        0 -0.1000  1.9000
        0   1.0000 -0.4000 -1.4000
        0        0       0       0
```

Azt látjuk, hogy a mátrix oszlopvektorai lineárisan függőek, de a b vektor benne van az oszlopvektorok által felfeszített térben. Tudjuk, hogy ilyenkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, ezek közül egy:

$$x = \begin{pmatrix} 1.9 \\ -1.4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ha az egyenletrenszer összes megoldását szeretnénk tudni, akkor használjuk a `null` függvényt, amely előállítja a nulltér egy bázisát:

```
>>p=null(A,'r')
p=
   1/10
   2/5
     1
```

(az 'r' opció hatására a vektor racionális alakban jelenik meg)
Ezek szerint a lineáris egyenletrendszer általános megoldása:

$$\begin{pmatrix} 1.9 \\ -1.4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1/10 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ahol $\lambda \in \mathbb{R}$.

Feladat

Oldja meg Matlab-bal az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ahol

- $$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 24 \\ -23 \end{pmatrix}$$

- $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & -13 & 22 \\ 5 & -1 & 16 & -14 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 81 \\ -33 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Hasznos: ha az x racionális elemű vektor koordinátáit nem tizedestört alakban akarjuk látni, akkor használhatjuk a `rats(x)` utasítást, vagy a kiiratás formátumát állítsuk át a `format rat` paranccsal

Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Megoldás. A `backslash` operátorral azt kapjuk, hogy

```
>>x=A\b
x=
   1.0000
   2.7000
```

Könnyen látható, hogy ez **nem megoldása** az egyenletrendszernek.

Az `rref` függvénnyel:

```
>>rref([A b])
ans=
   1 0 0
   0 1 0
   0 0 1
   0 0 0
```

láthatjuk, hogy az alapmátrix rangja 2, a kibővített mátrixé 3, az egyenletrendszer **ellentmondásos**.

Ellentmondásos lineáris egyenletrendszerek esetén a backslash operátor egy olyan x vektort ad vissza, melyre az Ax és b vektorok eltérése euklideszi normában a legkisebb (azaz $\|Ax - b\|_2$ minimális). Ilyenkor azt mondjuk, hogy x az egyenletrendszer legkisebb négyzetes értelemben vett megoldása.

Több jobboldali vektor

Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ és $Ax = c$ egyenletrendszereket, ha

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ -42 \end{pmatrix}$$

Megoldás. Mivel a két rendszer mátrixa azonos, ezért megoldhatjuk őket egyszerre.

```
>>A=[-2 -1 4; 2 3 -1; -4 -10 -5];
>>b=[3; 1; -12]; c=[17; 1; -42];
>>x=A\[b c]
x=
     3   -2
    -1    3
     2    4
```

Több jobboldali vektor

Nagyméretű mátrixok esetén a futási időt jelentősen befolyásolhatja, hogy az azonos mátrixszal adott rendszereket egyszerre, vagy külön-külön oldjuk meg:

```
>> A=rand(10000);
>> b=ones(10000,1);
>> c=zeros(10000,1);
>> tic;x=A\[b,c];toc
Elapsed time is 6.116513 seconds.
>> tic;x=A\b; x2=A\c; toc
Elapsed time is 11.571959 seconds.
```

(A fenti eredmény egy Intel Core i5-4590 processzorral, 7.7 GiB memóriával rendelkező gépen született).

Több jobboldali vektor

Ha több rendszert kell megoldanunk, ahol a mátrix azonos, a jobboldali vektorok különbözőek, de a jobboldali vektorok nem állnak egyszerre rendelkezésre, akkor a következő utasításokat használjuk:

Egyetlen egyszer, a rendszerek megoldása előtt adjuk ki az

```
>> [L,U]=lu(A);
```

utasítást.

Ahányszor egy újabb *b* jobboldali vektor rendelkezésünkre áll, adjuk ki az

```
>> x=U\(L\b);
```

utasítást, amivel megkapjuk az adott jobboldali vektor esetén a rendszer megoldását.

Mátrix inverze Matlab-bal

Az `inv` függvénnyel számítható. Ha a mátrix nem négyzetes, vagy a determinánsa 0 (vagy 0-hoz közeli), akkor hibaüzenetet, illetve figyelmeztetést kapunk.

Nagyméretű mátrixok inverzének kiszámítása túl költséges lehet. Csak akkor számoljuk ki, ha ténylegesen szükségünk van az inverzre.

Pl. az $Ax = b$ négyzetes mátrixú lineáris egyenletrendszer megoldása $x = A^{-1}b$ módon kb háromszor annyi műveletbe kerül, mint az $x = A\backslash b$ megoldás.

Sajátérték, sajátvektor

Feladat

(1) *Határozza meg az alábbi mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait!*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -6 & 2 & -2 \\ 15 & 5 & 7 \\ 21 & 3 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Feladat

(2) *Határozza meg az alábbi mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait!*

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sajátérték, sajátvektor Matlab-bal

Példa

Határozzuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -2 \\ 15 & 5 & 7 \\ 21 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit, sajátvektorait!

Megoldás. Használjuk az `eig` függvényt!

```
u=eig(A)
```

egy u vektorral tér vissza, melynek elemei az A sajátértékei

```
[V,U]=eig(A)
```

Két mátrixszal tér vissza, az első mátrix oszlopvektorai az A sajátvektorai, a második mátrix diagonálisában lévő értékek az A sajétértékei (a sajátvektoroknak megfelelő sorrendben).

```
>>[V,U]=eig(A)
V=
   -0.0000 -0.5345 -0.3651
   -0.7071  0.2673 -0.1826
   -0.7071  0.8018  0.9129

U=
   12.0000        0        0
         0  -4.0000        0
         0        0  -0.0000
```

Tehát az A sajátértékei 12, -4, 0, a megfelelő sajátvektorok a V oszlopvektorai.

Feladat

Határozza meg Matlab-bal az alábbi mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait!

- $$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
- $$B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$