

# Matematika Mérnököknek 1.

Baran Ágnes

Gyakorlat  
Komplex számok

## Feladatok

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!  
Ábrázolja a megoldásokat a komplex számsíkon!

(a)\*  $x^2 + 4 = 0$ ,

(c)  $x^2 - x + 1 = 0$ ,

(b)\*  $x^2 + 2x + 2 = 0$ ,

(d)  $x^3 - 6x^2 + 13x = 0$ .

\*2. Írja fel az alábbi komplex számok algebrai alakját!

(a)  $(3 + i)(2 + 3i)$ ,  $(-2 + 3i)(5 - 2i)$ ,  $i(1 + 2i)$ ,  
 $(-1 + i)(1 - 2i)(1 + 2i)$ ,

(b)  $\overline{5 - 2i}$ ,  $\overline{(3 + 4i)(2 + i)}$ ,

(c)  $(2 - i)^3$ ,  $i^6 + 3i^5 - 2i^3 + i^2 - 1$ ,  $i^{2008}$ ,  $i^{103}$ ,

(d)  $\frac{5 + 3i}{i}$ ,  $\frac{1 - i}{2 + i}$ ,  $\frac{1 - 2i}{1 - 3i}$ ,  $\frac{2 - i}{(3 - 2i)(2 + 5i)}$ .

## Feladatok

3. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

(a)\*  $\bar{z} + 2z = 9 + 2i,$

(d)\*  $z^2 + |z|^2 = 2 - 6i,$

(b)  $\bar{z} + |z|^2 = 31 - i,$

(e)  $\bar{z} \cdot z^2 = 8i,$

(c)  $i^3 \cdot \bar{z} = -3 - 2i,$

(f)  $z^2 = i.$

\*4. Ábrázolja a komplex számsíkon az alábbi halmazokat!

(a)  $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0\},$

(d)  $D = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \geq 2\},$

(b)  $B = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = 0\},$

(e)  $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\},$

(c)  $C = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \leq 0\},$

(f)  $F = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = \text{Im}(z)\}.$

## Példa

Adja meg a  $2$ ,  $-5$ ,  $3i$ ,  $-2i$  komplex számok trigonometrikus alakját.

1. Ha  $z = 2$ , akkor  $|z| = 2$  és a szám a valós tengely pozitív felén helyezkedik el, így a szöge  $\phi = 0$ . Ebből a trigonometrikus alak:

$$z = 2(\cos 0 + i \sin 0)$$

2. Ha  $z = -5$ , akkor  $|z| = 5$  és a szám a valós tengely negatív felén helyezkedik el, így a szöge  $\phi = \pi$ . Ebből a trigonometrikus alak:

$$z = 5(\cos \pi + i \sin \pi)$$

3. Ha  $z = 3i$ , akkor  $|z| = 3$  és a szám a képzetes tengely pozitív felén helyezkedik el, így a szöge  $\phi = \frac{\pi}{2}$ . Ebből a trigonometrikus alak:

$$z = 3 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

4. Ha  $z = -2i$ , akkor  $|z| = 2$  és a szám a képzetes tengely negatív felén helyezkedik el, így a szöge  $\phi = \frac{3\pi}{2}$ . Ebből a trigonometrikus alak:

$$z = 2 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

## Példa

Adja meg az  $1 + \sqrt{3}i$ ,  $-2 + 2i$ ,  $-\sqrt{3} - i$  és  $1 - i$  komplex számok trigonometrikus alakját.

### Megoldás.

Ha a  $z = a + bi$  komplex szám nem a tengelyek valamelyikén helyezkedik el, akkor

1. számoljuk ki  $|z|$  értékét és állapítsuk meg melyik síknegyedben helyezkedik el  $z$  (ábrázoljuk a komplex számsíkon!)
2. A  $\tan \phi_0 = \frac{|b|}{|a|}$  összefüggésből határozzuk meg  $0 < \phi_0 < \frac{\pi}{2}$  értékét
3. A  $z$  trigonometrikus alakja:  $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$ , ahol
  - $\phi = \phi_0$ , ha  $z$  az első síknegyedben van
  - $\phi = \pi - \phi_0$ , ha  $z$  a második síknegyedben van
  - $\phi = \pi + \phi_0$ , ha  $z$  a harmadik síknegyedben van
  - $\phi = 2\pi - \phi_0$ , ha  $z$  a negyedik síknegyedben van

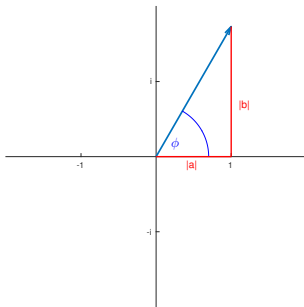
Ha  $z = 1 + \sqrt{3}i$ , akkor

1.  $|z| = 2$

2.  $\tan \phi_0 = \frac{|b|}{|a|} = \sqrt{3}$ , így  $\phi_0 = \frac{\pi}{3}$

3.  $z$  az első síknegyedben van, így  $\phi = \phi_0 = \frac{\pi}{3}$ , azaz  $z$  trigonometrikus alakja

$$z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$



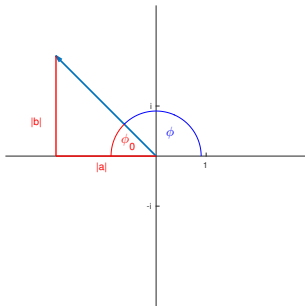
Ha  $z = -2 + 2i$ , akkor

1.  $|z| = \sqrt{8}$

2.  $\tan \phi_0 = \frac{|b|}{|a|} = 1$ , így  $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$

3.  $z$  a második síknegyedben van, így  $\phi = \pi - \phi_0 = \frac{3\pi}{4}$ , azaz  $z$  trigonometrikus alakja

$$z = \sqrt{8} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$



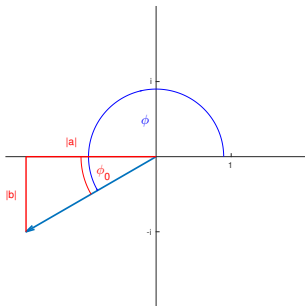
Ha  $z = -\sqrt{3} - i$ , akkor

1.  $|z| = 2$

2.  $\tan \phi_0 = \frac{|b|}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , így  $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$

3.  $z$  a harmadik síknegyedben van, így  $\phi = \pi + \phi_0 = \frac{7\pi}{6}$ , azaz  $z$  trigonometrikus alakja

$$z = 2 \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$$



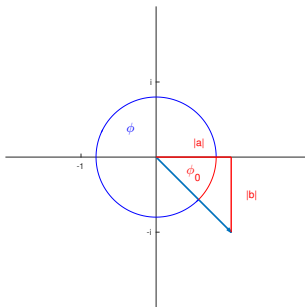
Ha  $z = 1 - i$ , akkor

1.  $|z| = \sqrt{2}$

2.  $\tan \phi_0 = \frac{|b|}{|a|} = 1$ , így  $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$

3.  $z$  a negyedik síknegyedben van, így  $\phi = 2\pi - \phi_0 = \frac{7\pi}{4}$ , azaz  $z$  trigonometrikus alakja

$$z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$



## Feladatok

5. Adja meg az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját!

- (a)\* 3,                      (d)\*  $-4i$ ,                      (g)  $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ ,                      (j)  $\frac{5}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{3}i$ ,  
(b)  $-2$ ,                      (e)\*  $2 + 2i$ ,                      (h)\*  $-1 + \sqrt{3}i$ ,  
(c)  $i$ ,                      (f)  $1 - i$ ,                      (i)  $-3 - 3\sqrt{3}i$ ,                      (k)  $\sqrt{3} - i$ .

\*6. Legyen  $x = 3 \left( \cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right)$  és  $y = 2 \left( \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right)$ . Határozza meg az alábbi kifejezések értékét!

- (a)  $x \cdot y$ ,                      (b)  $\frac{x}{y}$ ,                      (c)  $x^3$ ,                      (d)  $y^5$ ,                      (e)  $\frac{1}{x}$ ,                      (f)  $x^2 y$ .

7. Trigonometrikus alak segítségével határozza meg az alábbi kifejezések értékét!

- (a)\*  $\sqrt{i}$ ,                      (c)  $(2 + 2i)^{2008}$ ,  
(b)  $\sqrt[3]{i}$ ,                      (d)\*  $(1 + \sqrt{3}i)^{301}$ .

Számítsuk ki a  $z = 8 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$  komplex szám harmadik gyökeit!

### Megoldás.

$|z| = 8$ ,  $\varphi_z = \frac{\pi}{4}$ . Tudjuk, hogy a  $z$  szám  $n$ -edik gyökei

$$\zeta_k = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi_z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi_z + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, \dots, n-1,$$

így a harmadik gyökök

$$\zeta_0 = \sqrt[3]{8} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{4} + 0}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 0}{3} \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$\zeta_1 = \sqrt[3]{8} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} \right) = 2 \left( \cos \frac{9\pi}{12} + i \sin \frac{9\pi}{12} \right)$$

$$\zeta_2 = \sqrt[3]{8} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} \right) = 2 \left( \cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$$

## Feladatok

\*8. Számítsa ki a  $z = 81 \left( \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right)$  komplex szám második, harmadik, negyedik gyökeit! Ábrázolja a gyököket a komplex számsíkon!

9. Számítsa ki a  $z = 16 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$  komplex szám második és negyedik gyökeit! Ábrázolja a gyököket a komplex számsíkon!

10. Számítsa ki a  $z = i$  komplex szám harmadik és hatodik gyökeit! Ábrázolja a gyököket a komplex számsíkon!

\*11. Írja fel a 2., 3., 4. és 5. egységgyökök trigonometrikus alakját és ábrázolja a számokat a komplex számsíkon!

12. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

(a)\*  $z^2 - 3iz + 4 = 0,$

(d)  $z^2 + (2 + 4i)z - 3 + 3i = 0,$

(b)\*  $z^3 + z^2 + z = 0,$

(c)  $z^5 - z = 0,$

(e)  $2iz^2 + (4 + 5i)z + 5 = 0.$

## Feladatok

\***13.** Írja fel az alábbi komplex számok exponenciális alakját!

$$2 \left( \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right), \quad 5 \left( \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} \right)$$

\***14.** Határozza meg az alábbi komplex számok trigonometrikus és algebrai alakját!

$$e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad 2e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad e^{-i\frac{\pi}{3}}, \quad e^{-i\pi}$$

\***15.** Számolja ki  $z \cdot w$ ,  $\frac{z}{w}$  és  $z^3$  értékét, ha

(a)  $z = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}, w = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$

(b)  $z = 5e^{i\frac{\pi}{4}}, w = 2e^{i\frac{2\pi}{5}}$

\***16.** Írja fel a 2., 3., 4. és 5. egységgyökök exponenciális alakját!

# Komplex számok Matlab-ban

- $1i$  a képzetes egység
- $z=1.5+2i$  vagy  $z=1.5+2*1i$  a  $z = 1.5 + 2i$  komplex szám
- `real(z)` a  $z$  valós része
- `imag(z)` a  $z$  képzetes része
- `conj(z)` a  $z$  konjugáltja
- `abs(z)` a  $z$  abszolút értéke
- `angle(z)` a  $z$  komplex szám szöge

Ha  $z$  és  $w$  komplex számok, akkor

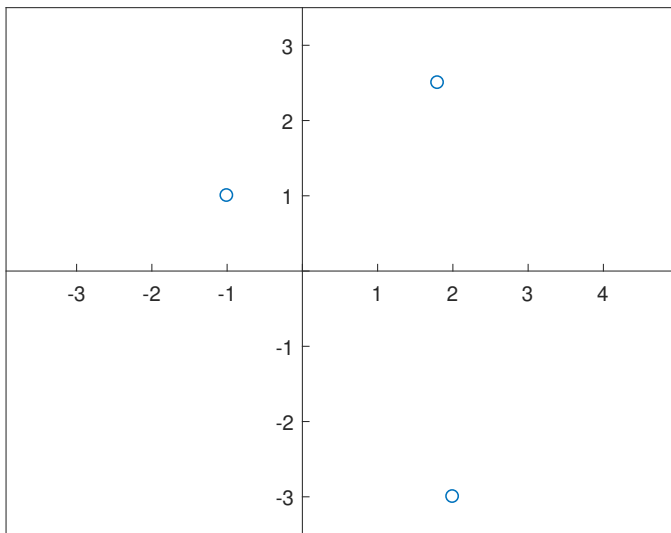
- $z+w$  az összegük
- $z-w$  a különbségük
- $z*w$  a szorzatuk
- $z/w$  a hányadosuk

**Megj.:** A Matlab-ban az  $i$  és  $j$  változók értéke is alapértelmezés szerint  $i = \sqrt{-1}$ , de ez felülírható, ezért tanácsosabb az `1i` változót használni.

## Példa

Ábrázoljuk a  $2 - 3i$ ,  $-1 + i$ ,  $1.8 + 2.5i$  komplex számokat a komplex számsíkon!

```
v=[2-3i, -1+1i, 1.8+2.5i];  
figure; plot(v,'o')  
axis([-1.5 2.5 -3.5 3.5])  
axis equal  
ax=gca;  
ax.XAxisLocation = 'origin';  
ax.YAxisLocation = 'origin';
```



## A kettőspont operátor

- az  $a = (1, 2, 3, 4, 5)$  vektor:  
 $a = 1:5$
- a  $b = (5, 4, 3, 2, 1)$  vektor:  
 $b = 5:-1:1$
- a  $c = (2, 2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 3)$  vektor  
 $c=2:0.2:3$

## Általában:

$x=elsoelem:lepeskoz:utolsoelem$

ahol a lépésköz negatív is lehet, vagy

$x=elsoelem:utolsoelem$

akkor a lépésköz 1.

# for-ciklus

```
for ciklusváltozo=vektor  
    utasitasok  
end
```

## Példák

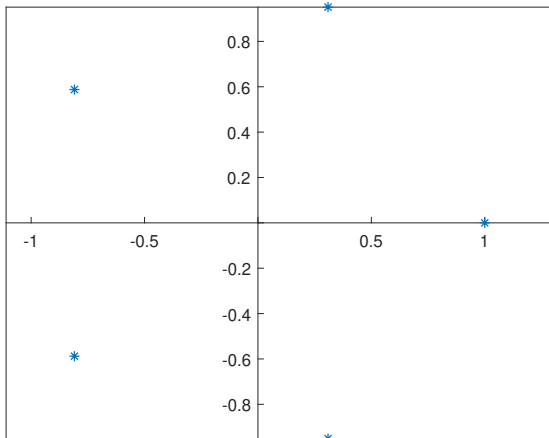
```
s=0;  
for i=1:100  
    s=s+i;  
end
```

```
s=100;  
for i=98:-2:2  
    s=s+i;  
end
```

## Példa

Ábrázolja a komplex számsíkon az 5. komplex egységgyököt!

```
z=zeros(1,5);
for k=1:5
    alfa=2*(k-1)*pi/5;
    z(k)=cos(alfa)+1i*sin(alfa);
end
figure; plot(z,'*')
axis equal
ax=gca;
ax.XAxisLocation = 'origin';
ax.YAxisLocation = 'origin';
```



# Függvények írása

## A Matlab-függvények szerkezete:

```
function kimenovaltozok=fvneve(bemenovaltozok)
    utasitasok
end
```

**Fontos!** A fenti függvényt fvneve.m néven kell elmenteni.

## Példák.

```
function y=masodf(x)
    y=2*x.^2-3*x+5;
end
```

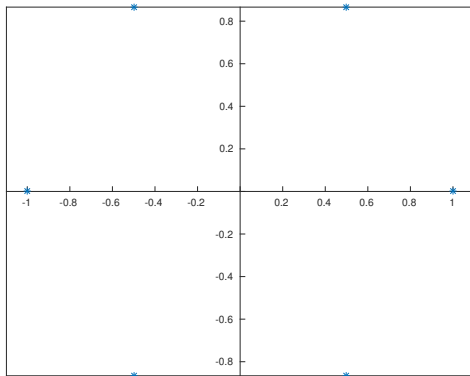
Ekkor a  $y=masodf(x)$  utasítás eredménye a  $2x^2 - 3x + 5$  kifejezés értéke, ahol  $x$  akár vektor is lehet, ebben az esetben a függvény elemenként hajtódik végre és  $y$  is vektor (ezt az teszi lehetővé, hogy a fv-ben minden művelet végrehajtható vektorokra is, mivel a négyzetreemelés jele elé kitettük a  $.$  jelet)

## Példa

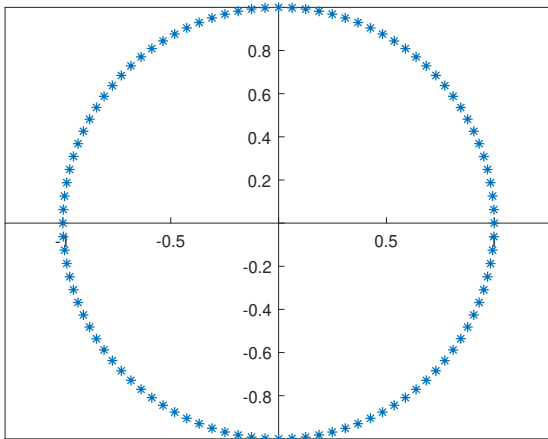
Írjon egy Matlab-függvényt, mely adott  $n$  esetén előállítja és ábrázolja az  $n$ -edik komplex egységgyököket!

```
function z=egyseg(n)
    z=zeros(1,n);
    for k=1:n
        alfa=2*(k-1)*pi/n;
        z(k)=cos(alfa)+1i*sin(alfa);
    end
    figure; plot(z,'*')
    axis equal
    ax=gca;
    ax.XAxisLocation = 'origin';
    ax.YAxisLocation = 'origin';
end
```

>> egyseg(6)



```
>> egyseg(100)
```



## Megjegyzés

Kihasználva hogy a beépített Matlab-függvények jelentős része vektor argumentummal is hívható, az előző kódok elkészíthetők for-ciklus nélkül is. Pl. a legutóbbi kód:

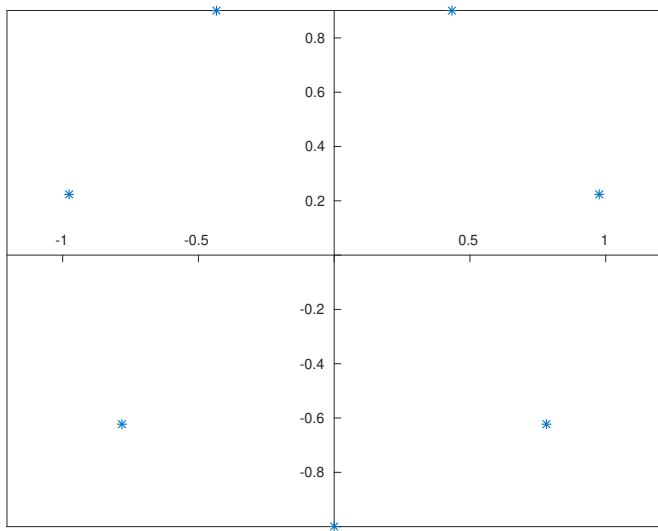
```
function z=egysegB(n)
    k=1:n;
    alfa=2*(k-1)*pi/n;
    z=cos(alfa)+1i*sin(alfa);
    figure; plot(z,'*')
    axis equal
    ax=gca;
    ax.XAxisLocation = 'origin';
    ax.YAxisLocation = 'origin';
end
```

## Példa

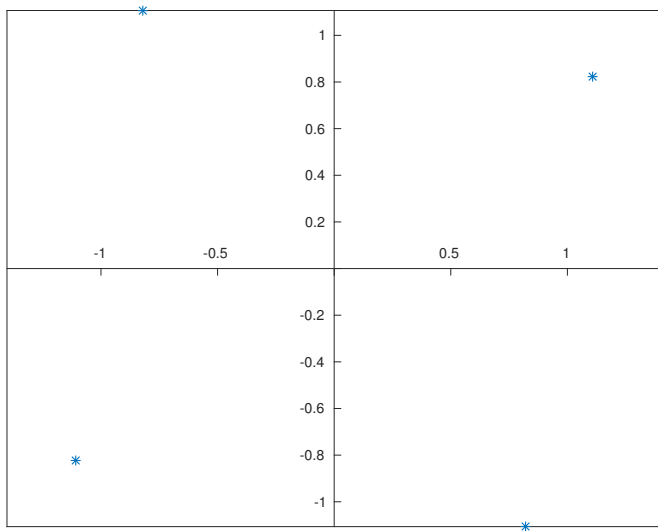
Írjunk egy Matlab-függvényt, mely adott  $z$  komplex szám és  $n$  pozitív egész szám esetén kiszámolja és ábrázolja a  $z$  szám  $n$ -edik gyökeit.

```
function zroot=gyokok(z,n)
    A=nthroot(abs(z),n);
    alfa=angle(z);
    zroot=zeros(1,n);
    for k=0:n-1
        Nalfa=(alfa+k*2*pi)/n;
        zroot(k+1)=A*(cos(Nalfa)+1i*sin(Nalfa));
    end
    figure; plot(zroot,'*');
    axis equal;
    ax=gca;
    ax.XAxisLocation = 'origin';
    ax.YAxisLocation = 'origin';
end
```

```
>> zn=gyokok(1i,7)
```



```
>> zn=gyokok(-3+2i,4)
```



## Feladat

1. Matlab segítségével határozza meg az alábbi komplex számok algebrai alakját!

$$e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad 2e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad e^{-i\frac{\pi}{3}}, \quad e^{-i\pi}$$

2. Matlab segítségével ábrázolja az alábbi komplex számokat

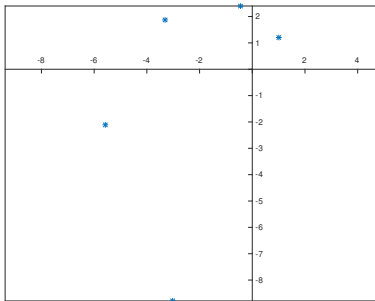
(a)  $e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ , ahol  $n = 4$  és  $k = 0, 1, 2, 3$

(b)  $e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ , ahol  $n = 6$  és  $k = 0, \dots, 5$

(c)  $e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ , ahol  $n = 10$  és  $k = 0, \dots, 9$

## Feladat

Ábrázolja a  $z = 1 + 1.2i$  komplex szám első 5 hatványát!



## Szorgalmi feladat

Írjon egy Matlab-függvényt, mely adott  $z$  komplex szám és  $n$  természetes szám esetén kiszámolja és ábrázolja a  $z$  első  $n$  hatványát!

## Szorgalmi feladat

Ábrázoljuk a komplex számsíkon az  $e^{i\alpha}$  komplex számokat, miközben  $\alpha$  befutja a  $[0, 2\pi]$  tartományt.

```
alfa=linspace(0.01,2*pi);
z=exp(1i*alfa);
figure; f1=gca;
f1.XAxisLocation='origin'; f1.YAxisLocation='origin';
axis([-1.2,1.2,-1.2,1.2]); axis('square');
hold('on');
for k=1:100
    plot(z(k), 'b*');
    v1=plot([0,real(z(k))],[0,imag(z(k))], 'b');
    pause(0.2)
    delete(v1);
end
```

## Szorgalmi feladat

Ábrázoljuk a komplex számsíkon az  $z = e^{i\alpha}$  komplex számokat, miközben  $\alpha$  befutja a  $[0, 2\pi]$  tartományt. Figyeljük meg a  $z$  képzetes részének változását az  $\alpha$  változásának függvényében. Ábrázoljuk ezt is a  $z = e^{i\alpha}$  értékekkel egyszerre, egy külön koordináta-rendszerben.

```

alfa=linspace(0.01,2*pi);
z=exp(1i*alfa);
figure; f1=subplot(1,2,1); f2=subplot(1,2,2);
f1.XAxisLocation='origin'; f1.YAxisLocation='origin';
axis(f1,[-1.2,1.2,-1.2,1.2]); axis(f1,'square');
f2.XAxisLocation='origin'; f2.YAxisLocation='origin';
axis(f2,[0,2*pi,-1.2,1.2]); axis(f2,'square');
hold(f1,'on');hold(f2,'on');
for k=1:100
    plot(f1,z(k),'b*');
    v1=plot(f1,[0,real(z(k))],[0,imag(z(k))],'b');
    v2=plot(f1,[real(z(k)),real(z(k))],[0,imag(z(k))],'r');
    plot(f2,alfa(k),imag(z(k)),'r*');
    v3=plot(f2,[alfa(k),alfa(k)],[0,imag(z(k))],'r');
    pause(0.2)
    delete(v1);delete(v2);delete(v3);
end

```