

# Matematika Mérnököknek 1.

Baran Ágnes

Gyakorlat  
Halmazok, függvények, Matlab alapok

# Matematika Mérnököknek 1.

A gyakorlatok fóliái: <https://arato.inf.unideb.hu/baran.agnes/oktatas.html>

Feladatsorok: <https://arato.inf.unideb.hu/baran.agnes/oktatas.html>

Előadás fóliák: <https://arato.inf.unideb.hu/burai.pal/>

## Feladatok

\*1. Tekintsük az alábbi halmazokat:  $A = \mathbb{Z}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ páros}\}$ ,  $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $D = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ prím}\}$ . Adja meg az alábbi halmazokat:

$$A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad A \cap B, \quad C \setminus B, \quad (A \setminus B) \cup D, \quad B \Delta D$$

2. Egy társaságban 27-en beszélnek angolul, 23-an németül, 12-en mindkét nyelvet beszélnek, 8-an egyiket sem. Hány tagú a társaság?

## Feladatok

\*3. Jelölje  $X$  a 2008 szeptember elsején 20.00 és 22.00 között a „Vak késdobáló” elnevezésű vendéglátóipari egységben megjelent vendégek halmazát. Tekintsük  $X$  alábbi részhalmazait:  $N$  a nők halmaza,  $T$  a törzsvendégek (az egységet hetente legalább 4 alkalommal látogatók) halmaza,  $A$  az alkalmi turisták (az egységet ezidáig legfeljebb kétszer látogatók) halmaza,  $S$  a sört ivók halmaza,  $B$  a bort ivók halmaza. Fogalmazza meg halmazelméleti műveletekkel az alábbi állításokat!

- (a)  $A$  bort ivó alkalmi turisták között nincs nő.
- (b)  $A$  férfi törzsvendégek sört és bort is isznak.
- (c) Nincs olyan sörivő nő, aki törzsvendég.
- (d) Aki vagy csak sört, vagy csak bort iszik az alkalmi turista nő.
- (e) Minden alkalmi turista sörivő.

# Függvények

## Feladat

Döntse el, hogy az alábbi függvények közül melyik szürjektív („ráképezés”), ill. injektív (kölsönösen egyértelmű). Amennyiben a függvény invertálható adja meg az inverzét!

(a)\*  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (x + 3)^2 - 1,$

(b)\*  $f : [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1], \quad f(x) = \sin x,$

(c)\*  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } x < 0 \\ x^2, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

(d)\*  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{ha } x < 0 \\ \sqrt{2x + 1}, & \text{ha } 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{x}{2} + 1 & \text{ha } x > 4 \end{cases}$$

## Feladat

Adja meg az  $f \circ g$  függvényt, ha

(a)\*  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$  és  $g(x) = x + 3$ ,

(b)  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  és  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2 + 3$ ,

(c)  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$  és  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2$ ,

(d)\*  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  és  $g(x) = x^3$ .

# MATLAB

MATLAB = „Matrix laboratory”

Részletes leírás, help: <http://www.mathworks.com/help/>

Irodalom: Stoyan Gisbert (szerk.), MATLAB, Typotex, 2008

A parancsablakba utasításokat gépelhetünk, pl:

```
>> 3+4
```

```
ans =
```

```
7
```

```
>> 3*1.5
```

```
ans =
```

```
4.5000
```

```
>> cos(0)
```

```
ans =
```

```
1
```

Ha másképp nem rendelkezünk, akkor az eredmény az `ans` nevű változóba kerül.

Használhatunk más változókat is, pl.:

```
>> a=3+4
```

```
a =  
    7
```

```
>> a=3; b=4; c=a+b
```

```
c =  
    7
```

**Ha egy értékadó utasítást pontosvesszővel zárunk le, akkor az értékadás végrehajtódik, de az eredmény nem jelenik meg a parancsablakban. Pl.:**

```
>> a=3; b=4; c=a+b;
```

A változó értékét ekkor is megkérdezhetjük, nevének begépelésével:

```
>> c  
c =  
    7
```

# Változónevek

- Betűvel kell kezdődniük, tartalmazhatnak betűket, számokat, aláhúzást. **Megkülönbözteti a kis- és nagybetűket.** Ne használjunk ékezetes betűket!
- Nem lehetnek változónevek a Matlab kulcsszavai (pl. `if`, `end`, `stb`), az `iskeyword` utasítással felsoroltathatjuk ezeket a kulcsszavakat.
- Figyeljünk rá, hogy ne használjuk változónévként Matlab-függvények neveit (pl. `cos`, `size`, `stb`). Ha nem vagyunk biztosak benne, hogy egy név létezik-e már, akkor az `exist` függvénnyel ellenőrizhetjük (pl. `exist cos`)
- A `clear` utasítással törölhetünk változókat (pl. `clear a,b` törli az `a` és `b` változókat). A `clear all` utasítással minden változó törlődik.

# Egy egyszerű ábra

## Példa

Rajzoltassuk ki a  $(-1, 2)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1.5)$ ,  $(2, 3)$  pontokat a síkon!

**1. lépés:** Soroljuk fel egy változóban a pontok első koordinátáit!

```
>> x=[-1, 0, 1, 2];
```

(Az értékeket szögletes zárójelek között soroljuk fel, egymástól vesszővel, vagy szóközzel elválasztva.)

**2. lépés:** Soroljuk fel egy másik változóban a pontok második koordinátáit!

```
>> y=[2, 1, 1.5, 3];
```

(Figyeljünk rá, hogy Matlab-ban “tizedesvessző” helyett “tizedespont” szerepel)

**3. lépés:** A plot függvény segítségével rajzoltassuk ki a pontokat!

```
>> plot(x,y,'*')
```

## M-fájlok

A Matlab futtatható állományai az M-fájlok.

- Nyissunk meg a szerkesztőablakban egy új fájlt:

Kattintsunk a bal felső sarokban a + ikonra, vagy

New → Script

- Írjuk ide a programunkat

```
% kirajzolunk 4 pontot  
x=[-1, 0, 1, 2];  
y=[2, 1, 1.5, 3];  
plot(x,y,'*')
```

A megjegyzéseinket %-jel mögött helyezhetjük el.

Itt is figyeljünk a sorvégi pontosvesszőkre, ha egy értékadó utasítás végén lemarad, akkor annak eredménye futás közben megjelenik a parancsablakban.

# M-fájlok

- Mentsük el a fájlt.

Olyan könyvtárba mentünk, amelyet a Matlab el tud érni. Ezek listáját megkaphatjuk, ha a parancsablakba a `path` utasítást gépeljük, vagy menüből:

HOME → Set Path

A fájl `.m` kiterjesztésű legyen, pl. `rajz.m`

- Futtassuk a programunkat.

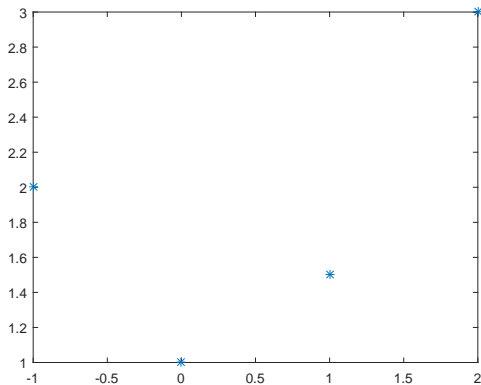
Írjuk be a fájl nevét a parancsablakba kiterjesztés nélkül:

```
>> rajz
```

vagy menüből

EDITOR → Run

```
% kirajzolunk 4 pontot  
x=[-1, 0, 1, 2];  
y=[2, 1, 1.5, 3];  
plot(x,y,'*')
```



Az elkészült programunkat könnyen módosíthatgatjuk. Pl.

```
% kirajzolunk 4 pontot
figure
x=[-1, 0, 1, 2];
y=[2, 1, 1.5, 3];
plot(x,y,'*')
axis([-1.5 2.5 0.5 3.5])
```

A `figure` utasítás hatására egy új grafikus ablak nyílik. Ennek hiányában, ha van megnyitott grafikus ablak, akkor abba készíti el az ábrát, annak korábbi tartalmát felülírva.

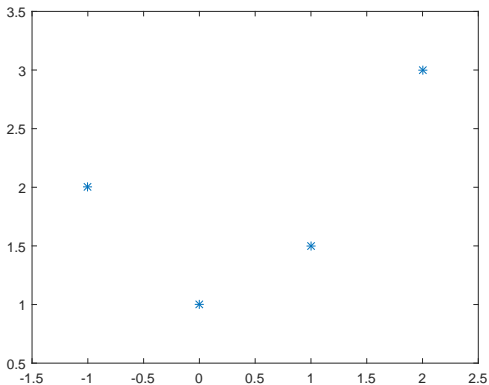
Az `axis` beállítja a tengelyek határait.

A `plot` függvényről (ill. hasonlóan bármely más Matlab-függvényről) a parancsablakba a

```
>> help plot
```

utasítást gépelve tudhatunk meg többet.

```
% kirajzolunk 4 pontot  
figure  
x=[-1, 0, 1, 2];  
y=[2, 1, 1.5, 3];  
plot(x,y,'*')  
axis([-1.5 2.5 0.5 3.5])
```



# A plot függvény

- `plot(x,y)`  
ábrázolja azokat a síkbeli pontokat, melyeknek első koordinátája az  $x$ , második az  $y$  változóban szerepel, és összeköti őket.
- `plot(x,y,'szin típus')`  
ábrázolja a pontokat, a megadott típusú markerrel, illetve vonaltípussal, a megadott színnel.

## Vonaltípusok

- - folyamatos vonal  
(alapértelmezés)
- : pontozott vonal
- - - szaggatott vonal
- -. szaggatott-pontozott vonal

# A plot függvény

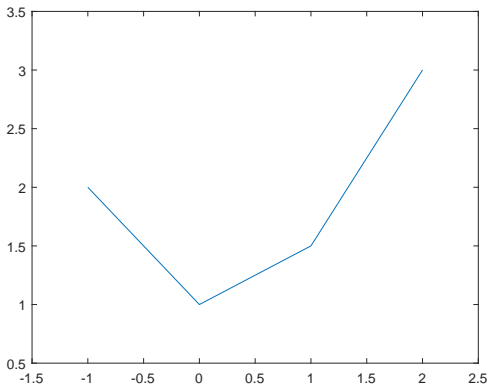
## Markerek

- \* csillag
- o kör
- + összeadás jel
- x kereszt
- s négyzet
- d rombusz
- p ötszög
- h hatszög
- < balra mutató háromszög
- > jobbra mutató háromszög
- ^ felfele mutató háromszög
- v lefele mutató háromszög

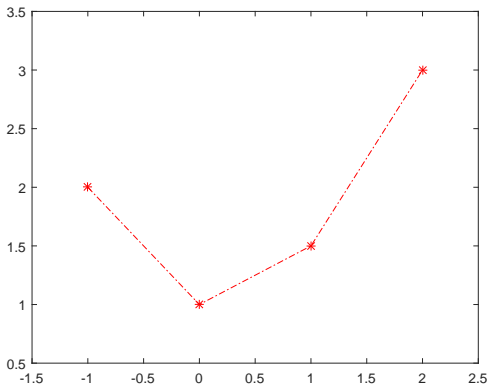
## Színek

- b kék
- r piros
- g zöld
- k fekete
- w fehér
- y sárga
- m magenta
- c cián

```
% kirajzolunk 4 pontot  
figure  
x=[-1, 0, 1, 2];  
y=[2, 1, 1.5, 3];  
plot(x,y)  
axis([-1.5 2.5 0.5 3.5])
```



```
% kirajzolunk 4 pontot  
figure  
x=[-1, 0, 1, 2];  
y=[2, 1, 1.5, 3];  
plot(x,y,'-.r*')  
axis([-1.5 2.5 0.5 3.5])}
```



# Függvények ábrázolása

## Példa

Rajzoltassuk ki az  $f(x) = \sin(x)$  függvényt a  $[0, 2\pi]$  intervallumon!

Függvényeket úgy ábrázolhatunk, hogy a függvénygörbe nagyon sok pontját kirajzoltatjuk.

Vegyünk a  $[0, 2\pi]$  intervallumon sok pontot, pl:

```
>> x=linspace(0,2*pi,50);
```

vagy

```
>> x=linspace(0,2*pi);
```

Az első esetben 50, a másodikban 100 egyforma lépközű pontot kapunk a  $[0, 2\pi]$  intervallumon.

## Függvények ábrázolása

**Általában:**

```
x=linspace(elsoelem,utolsoelem,elemekszama)
```

ahol az elemek egyforma lépésközzel követik egymást, vagy

```
x=linspace(elsoelem,utolsoelem)
```

ekkor az elemek száma 100.

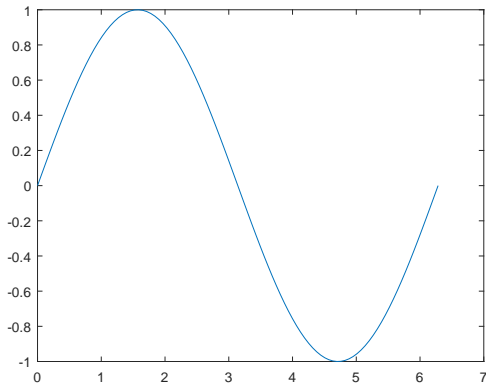
Minden pontban számítsuk ki a függvény értékét és rajzoltassuk ki a pontokat!

```
>> y=sin(x);
```

```
>> plot(x,y)
```

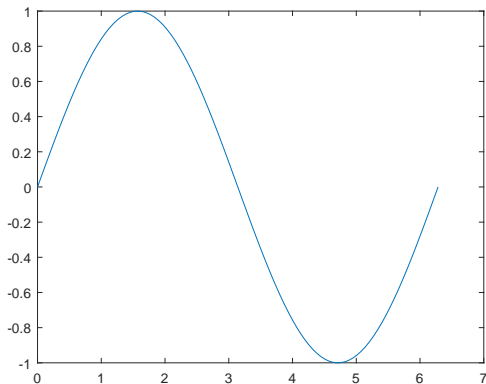
**A legtöbb Matlab-függvény vektor-argumentummal is hívható. Ebben az esetben az  $x$  minden egyes elemének kiszámolja a szinuszát, ezek kerülnek az  $y$ -ba.  $x$  és  $y$  ugyanannyi elemet tartalmaz.**

```
x=linspace(0,2*pi);  
y=sin(x);  
figure; plot(x,y)
```



# Az fplot függvény

```
figure;  
fplot('sin', [0, 2*pi])
```



## Példa

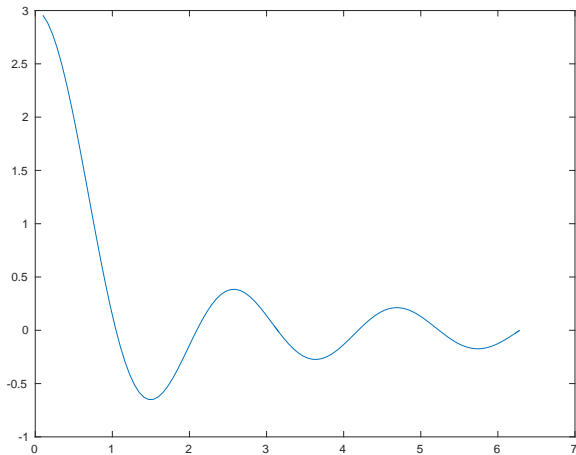
Rajzoltassuk ki az  $f(x) = \frac{\sin(3x)}{x}$  függvényt a  $[0.1, 2\pi]$  intervallumon!

```
x=linspace(0.1,2*pi);  
y=sin(3*x)./x;  
figure; plot(x,y)
```

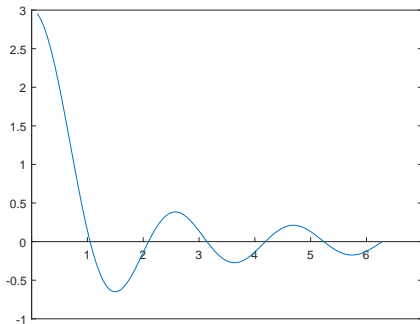
Ha  $a$  és  $b$  két ugyanolyan méretű vektor, akkor

- $a+b$  a koordinátánkénti összegük
- $3*a$  az  $a$  vektort koordinátánként szorozza 3-mal
- $a.*b$  a koordinátánkénti szorzatuk
- $a./b$  a koordinátánkénti hányadosuk
- $a.^2$  koordinátánként négyzetre emeli

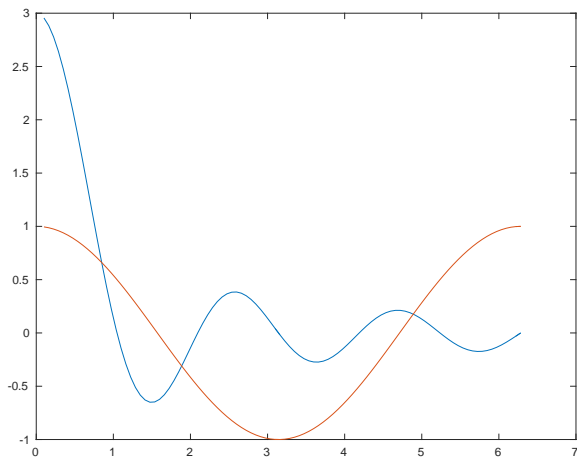
```
x=linspace(0.1,2*pi);  
y=sin(3*x)./x;  
figure; plot(x,y)
```



```
x=linspace(0.1,2*pi);  
y=sin(3*x)./x;  
figure; plot(x,y)  
ax=gca;  
ax.XAxisLocation = 'origin';  
ax.YAxisLocation = 'origin';
```



# Több függvény egy ábrán



## Több függvény egy ábrán

```
x=linspace(0.1,2*pi);  
y=sin(3*x)./x;  
z=cos(x);  
figure; plot(x,y,x,z)
```

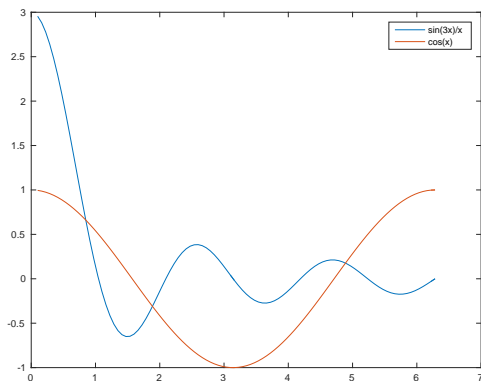
vagy

```
x=linspace(0.1,2*pi);  
y=sin(3*x)./x;  
z=cos(x);  
figure; plot(x,y)  
hold on;  
plot(x,z)  
hold off;
```

- `hold on`  
bekapcsolja a „rárajzoló” üzemmódot: az aktuális figure-ablakba rajzol, az ottani eredeti ábra meghagyásával

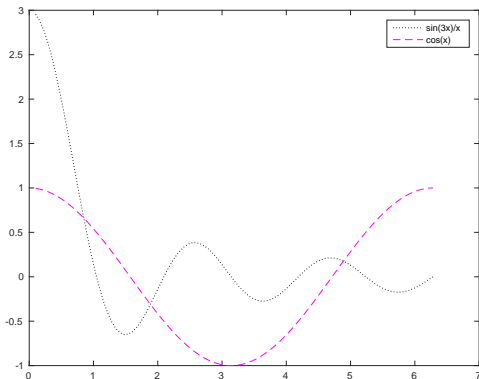
## Több függvény egy ábrán, legend box

```
x=linspace(0.1,2*pi);  
y=sin(3*x)./x;  
z=cos(x);  
figure; plot(x,y,x,z)  
legend('sin(3x)/x', 'cos(x)')
```



## Vonaltípus és szín megadása

```
x=linspace(0.1,2*pi);  
y=sin(3*x)./x;  
z=cos(x);  
figure; plot(x,y,'k:',x,z,'m--')  
legend('sin(3x)/x','cos(x)')
```



## Feladat

Ábrázolja az  $f$  függvényt az  $T$  intervallumon, és jellemezze a függvényt!

- (a)  $f(x) = x^2$  és  $T = [-3, 3]$
- (b)  $f(x) = (x - 2)^2 + 3$  és  $T = [-3, 5]$
- (c)  $f(x) = x^3$  és  $T = [-2, 2]$
- (d)  $f(x) = (x - 1)^3 + 2$  és  $T = [-2, 4]$
- (e)  $f(x) = \sin(x)$  és  $T = [0, 2\pi]$
- (f)  $f(x) = \cos(x)$  és  $T = [0, 2\pi]$
- (g)  $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$  és  $T = [0, 2\pi]$
- (h)  $f(x) = \sin(3x)$  és  $T = [0, 2\pi]$
- (i)  $f(x) = 3 \sin(x)$  és  $T = [0, 2\pi]$
- (j)  $f(x) = \operatorname{tg}(x)$  és  $T = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- (k)  $f(x) = \operatorname{ctg}(x)$  és  $T = [0, \pi]$

## Feladat

Ábrázolja az  $f$  függvényt az  $T$  intervallumon, és jellemezze a függvényt!

(a)  $f(x) = e^x$  és  $T = [-2, 5]$

(b)  $f(x) = e^{-x}$  és  $T = [-2, 5]$

(c)  $f(x) = \ln(x)$  és  $T = (0, 5]$

(d)  $f(x) = 2^x$  és  $T = [-2, 4]$

(e)  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  és  $T = [-2, 4]$

(f)  $f(x) = \arcsin(x)$  és  $T = [-1, 1]$

(g)  $f(x) = \arccos(x)$  és  $T = [-1, 1]$

## Feladat

Ábrázolja az  $f$  és  $g$  függvényeket egy ábrán!

(a)  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = \ln(x)$ ,

(b)  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = e^{-x}$ ,

(c)  $f(x) = \ln(x)$ ,  $g(x) = \log_{10}(x)$ ,

(d)  $f(x) = \arcsin(x)$ ,  $g(x) = \arccos(x)$ ,

(e)  $f(x) = \sin(x)$ ,  $g(x) = \arcsin(x)$ ,