

# 1. Kamatozási konvenciók – ismétlés

**1.1.** Egy óra árát 25%-kal felemelték, de nem volt elég kelendő, ezért az új árát 25%-kal csökkentették. Ki jár végül jobban: a vevők vagy az eladó?

**1.2.** Egy üzletben a téli kabátokat decemberben 9700 Ft-ért árulták. Mivel a kabátok nem fogytak, bizonyos %-kal leszállították az árukat. Januárban sem változott a helyzet, ezért még a tél végi kiárusítás előtt az előző árleszállításhoz viszonyítva kétszer akkora %-kal szállították le a kabátok árát. Így az új ár 4650 Ft lett. Hány százalékos volt a két árleszállítás?

**1.3.** 100.000 Ft-ot fektetünk be évi 4,3%-os kamatozás mellett. Mennyit fog ez érni 10 év múlva, ha a kamatjöváírás

- (a) évenként
- (b) negyedévente
- (c) havonta
- (d) folytonosan

történik?

**1.4.** Ez év március elsejéig Annának 230.000 Ft-ja gyűlt össze. Ezt betette a bankba évi 5%-os kamatra. Június 20-án kiderült, hogy hirtelen szüksége van a pénzre, ezért kivette. Mennyi pénzt kapott kézhez?

**1.5.** János 100.000 Ft-ot örökölt. Ezt a pénzt évi 3,5%-os kamatra betette a bankba. 8 év múlva hányszor ennyi pénze lesz?

**1.6.** A Kovács család nyert a lottón 610.000 Ft-ot. A család a pénzt a bankban lekötötte évi 6,5%-os kamatra, de 4 év múlva a bank 2%-kal csökkentette a kamatot. 10 év múlva vették ki a pénzt. Mekkora összeghez jutottak ekkor hozzá?

**1.7.** Károly úgy döntött, hogy 300.000 Ft tartalék pénzét befekteti. Az elkövetkező két évben nem vett ki és nem is tett be újabb pénzt ebbe az üzletbe. Igazán jól járt, hiszen így a második év végén 690.000 Ft-hoz jutott hozzá. Számoljuk ki, hogy ez évi hány %-os kamatnak felel meg!

**1.8.** 560.000 Ft 2 év alatt az egyik bankban 45.696 Ft-ot kamatozik. Mennyit kamatozik 130 nap alatt?

**1.9.** Beáta évente 200.000 Ft-ot rak a takarékpénztárba évi 5%-os kamatra. Hány év múlva lesz 4,5 millió Ft-ja?

**1.10.** Öt éven át minden év elején elhelyezünk a takarékpénztárban 500.000 Ft-ot 4,5%-os kamatláb mellett. Öt év eltelte után legalább hány teljes évet kell még várnunk, hogy a pénzünk 4.000.000 Ft-ra növekedjen?

**1.11.** Családi ház építésére januárban 500.000 Ft kölcsönt kaptunk évi 5%-os kamatra. Az első részletet egy évvel a kölcsön felvétele után fizetjük ki. Évente, január elején 60.000 Ft-ot tudunk törleszteni. Hányadik évben fogy el az adósságunk?

**1.12.** Évi 6%-os kamatra kapott 600.000 Ft-ot évenként egyenlő összeggel törlesztünk. Az első részletet egy évvel a kölcsön felvétele után fizetjük ki. Mennyi legyen az évi törlesztés, ha 6 alkalommal fizetünk?

**1.13.** Számoljuk ki 2,3%-os kamatláb mellett

- (a) a 3 év múlva esedékes 64.000 Ft;
- (b) az 5 év múlva esedékes 73.560 Ft

diszkontált értékét!

- (c) Számítsuk ki ugyanekkora kamatláb, viszont folytonos kamatozás mellett a 6 év múlva esedékes 48.900 Ft diszkontált értékét!

**1.14.** Egy bank 4% éves kamatot jegyez negyedéves kamatszámítással. Mekkora az ezzel ekvivalens kamatláb

- (a) éves kamatszámítással;
- (b) folytonos kamatszámítással?

## 2. Valószínűségszámítás, statisztika – ismétlés

**2.1.** Egy részvény jelenlegi árfolyama 6800 Ft. A részvény árfolyama 1 hét múlva 0,15 valószínűséggel 7050 Ft, 0,13 valószínűséggel 7320 Ft, 0,37 valószínűséggel 6750 Ft, 0,35 valószínűséggel 6500 Ft. Számoljuk ki a részvény jövő heti árfolyamának várható értékét és szórását!

**2.2.** Adott a piacon egy részvény. A részvény árfolyama minden félévben vagy 25%-kal nő, vagy 20%-kal csökken. Tegyük fel, hogy az egyes időszakokban történő árfolyamváltozások függetlenek egymástól. Az elkövetkezendő két félévre az alábbiakat ismerjük.

- Annak a valószínűsége, hogy mind a két félévben nő a részvény árfolyama 0,2,
- annak a valószínűsége, hogy az első félévben nő, a másodikban pedig csökken az árfolyam 0,4,
- annak, hogy az első félévben csökken, a másodikban pedig nő 0,3,
- annak pedig, hogy mind a két félévben csökken az árfolyam 0,1 a valószínűsége.

Számoljuk ki az alábbi feltételes valószínűségeket!

- (a) A 2. félévben nőtt az árfolyam, feltéve, hogy az 1. félévben is nőtt a részvény árfolyama.
- (b) A 2. félévben csökkent az árfolyam, feltéve, hogy az 1. félévben nőtt a részvény árfolyama.
- (c) A 2. félévben nőtt az árfolyam, feltéve, hogy az 1. félévben csökkent a részvény árfolyama.
- (d) A 2. félévben csökkent az árfolyam, feltéve, hogy az 1. félévben is csökkent a részvény árfolyama.

**2.3.** Tekintsük az előző feladatban szereplő részvényt, és legyen a kezdeti részvényárfolyam 10\$. Számoljuk ki a részvény jövő évi árfolyamának várható értékét és szórását!

### 3. Európai opciók kifizetése, kereskedési stratégiák

Legyenek adva egy adott részvényre vonatkozóan európai opciók. Mi a kifizetésünk  $S_T$  függvényében az alábbi esetekben?

**3.1.** Veszünk 3 db 2 hónap múlva lejáró 5100 Ft kötési árfolyamú európai vételi opciót és 1 db 2 hónap múlva lejáró 5100 Ft kötési árfolyamú európai eladási opciót.

**3.2.** Veszünk 1 db fél év múlva lejáró 2300 Ft kötési árfolyamú európai vételi opciót és 1 db fél év múlva lejáró 2000 Ft kötési árfolyamú európai eladási opciót.

**3.3.** Veszünk 1 db 1 hónap múlva lejáró 7100 Ft kötési árfolyamú európai vételi opciót és eladunk 1 db 1 hónap múlva lejáró 6850 Ft kötési árfolyamú európai vételi opciót.

**3.4.** Veszünk 1 db 1 hónap múlva lejáró 7100 Ft kötési árfolyamú európai eladási opciót és eladunk 1 db 1 hónap múlva lejáró 6850 Ft kötési árfolyamú európai eladási opciót.

**3.5.** Veszünk 1 db 2 hónap múlva lejáró 5000 Ft kötési árfolyamú európai vételi opciót, 1 db 2 hónap múlva lejáró 6000 Ft kötési árfolyamú európai vételi opciót, valamint eladunk 2 db 2 hónap múlva lejáró 5500 Ft kötési árfolyamú európai vételi opciót. Mi a helyzet, ha az eladott opciók kötési árfolyama 5300, ill. 5700 Ft?

#### Kereskedési stratégiák.

**3.6.** Állítsunk össze egy bal terpesz típusú stratégiát az alábbi, egy adott részvényre vonatkozó európai opciókból: öt hónap múlva lejáró 3400 Ft kötési árfolyamú európai vételi opció, öt hónap múlva lejáró 3600 Ft kötési árfolyamú európai eladási opció és öt hónap múlva lejáró 3400 Ft kötési árfolyamú európai eladási opció. Tudjuk, hogy a részvény árfolyama lejáratkor 3550 Ft lesz. Adjuk meg a stratégia kifizetését is!

**3.7.** Állítsunk össze egy széles terpesz típusú stratégiát az alábbi, egy adott részvényre vonatkozó európai opciókból: negyedév múlva lejáró 3300 Ft kötési árfolyamú európai eladási opció, fél év múlva lejáró 3300 Ft kötési árfolyamú európai eladási opció, negyedév múlva lejáró 3100 Ft kötési árfolyamú európai vételi opció és negyedév múlva lejáró 3400 Ft kötési árfolyamú európai vételi opció. Tudjuk, hogy a részvény árfolyama lejáratkor 3000 Ft lesz. Adjuk meg a stratégia kifizetését is!

**3.8.** Állítsunk össze egy erősödő különbözeti ügylet típusú stratégiát az alábbi, egy adott részvényre vonatkozó európai opciókból: nyolc hónap múlva lejáró 8100 Ft kötési árfolyamú európai vételi opció, nyolc hónap múlva lejáró 7800 Ft kötési árfolyamú európai eladási opció, kilenc hónap múlva lejáró 8050 Ft kötési árfolyamú európai eladási opció és nyolc hónap múlva lejáró 8400 Ft kötési árfolyamú európai vételi opció. Tudjuk, hogy a részvény árfolyama lejáratkor 8880 Ft lesz. Adjuk meg a stratégia kifizetését is!

**3.9.** Állítsunk össze egy pillangó különbözeti ügylet típusú stratégiát az alábbi, egy adott részvényre vonatkozó európai opciókból: négy hónap múlva lejáró 1700 Ft kötési árfolyamú európai vételi opció, négy hónap múlva lejáró 1500 Ft kötési árfolyamú európai vételi opció, négy hónap múlva lejáró 1500 Ft kötési árfolyamú európai eladási opció, négy hónap múlva lejáró 1650 Ft kötési árfolyamú európai vételi opció és négy hónap múlva lejáró 1600 Ft kötési árfolyamú európai vételi opció. Tudjuk, hogy a részvény árfolyama lejáratkor 1550 Ft lesz. Adjuk meg a stratégia kifizetését is!

**3.10.** Tekintsünk egy részvényre kiírt kétféle eladási opciót, 3 hónapos lejárattal. Az egyik eladási opció kötési ára 50\$, a másiké 55\$, míg az opciók piaci értéke 2\$ és 3\$. A jelenlegi részvényár 51\$.

- Konstruáljunk a fenti opciókból bull spread (növekvő különbözeti ügylet) stratégiát! Mennyi kezdőtőke szükséges ehhez?
- Határozzuk meg a stratégia kifizetési függvényét és ábrázoljuk azt!
- Mennyi lenne a teljes kifizetésünk 3 hónap múlva, ha ezalatt az idő alatt 5 dollárt emelkedne a részvényár?

## 4. Az opciós árakra vonatkozó alsó korlátok

**4.1.** A piacon egy részvény jelenlegi árfolyama 5100 Ft. Egy erre a részvényre vonatkozó európai vételi opció kötési árfolyama 5000 Ft, a lejáratig hátralévő idő 6 hónap, továbbá a kockázatmentes kamatláb éves szinten 12%. Lehet-e az opció arbitrázsmentes díja 398 Ft? Ha nem, akkor adjunk a 398 Ft-os opciós díj mellett arbitrázs-stratégiát!

**4.2.** A piacon egy részvény jelenlegi árfolyama 2000 Ft. Egy erre a részvényre vonatkozó európai vételi opció kötési árfolyama 1800 Ft, a lejáratig hátralévő idő 1 év, továbbá a kockázatmentes kamatláb éves szinten 10%. Lehet-e az opció arbitrázsmentes díja 300 Ft? Ha nem, akkor adjunk a 300 Ft-os opciós díj mellett arbitrázs-stratégiát!

**4.3.** A piacon egy részvény jelenlegi árfolyama 3800 Ft. Egy erre a részvényre vonatkozó európai eladási opció kötési árfolyama 4000 Ft, a lejáratig hátralévő idő 3 hónap, továbbá a kockázatmentes kamatláb éves szinten 10%. Lehet-e az opció arbitrázsmentes díja 110 Ft? Ha nem, akkor adjunk a 110 Ft-os opciós díj mellett arbitrázs-stratégiát!

**4.4.** A piacon egy részvény jelenlegi árfolyama 3700 Ft. Egy erre a részvényre vonatkozó európai eladási opció kötési árfolyama 4000 Ft, a lejáratig hátralévő idő fél év, továbbá a kockázatmentes kamatláb éves szinten 5%. Lehet-e az opció arbitrázsmentes díja 100 Ft? Ha nem, akkor adjunk a 100 Ft-os opciós díj mellett arbitrázs-stratégiát!

## 5. Az $n$ -lépéses bináris modell

### Feltétel kötvény és részvény hozamaira.

**5.1.** Legyen egy egylépéses bináris piacon adva egy részvény és egy kötvény. A kötvény kockázatmentes kamatlába éves szinten 11%. A részvény jelenlegi árfolyama 5000 Ft. A részvény árfolyama 8 hónap múlva vagy 5900 Ft-ra vagy 5450 Ft-ra nő. Van-e a piacon arbitrázs lehetőség? Ha van, akkor adjunk meg egy arbitrázs-stratégiát!

**5.2.** Legyen egy egylépéses bináris piacon adva egy részvény és egy kötvény. A kötvény kockázatmentes kamatlába éves szinten 22%. A részvény jelenlegi árfolyama 4500 Ft. A részvény árfolyama fél év múlva vagy 4950 Ft-ra nő vagy 3600 Ft-ra csökken. Van-e a piacon arbitrázs lehetőség? Ha van, akkor adjunk meg egy arbitrázs-stratégiát!

### Európai opciók árazása 1-lépéses bináris piacokon.

**5.3.** Legyen adva a piacon egy részvény, melynek jelenlegi árfolyama 4000 Ft. Egy hónap múlva a részvény árfolyama vagy 4200 Ft-ra nő vagy 3800 Ft-ra fog csökkenni. A piacon a kockázatmentes kamatláb évi 8%. Mennyi az erre a részvényre vonatkozó európai vételi opció igazságos ára, melynek kötési árfolyama 3900 Ft, ha tudjuk, hogy a lejáratig még egy hónap van hátra? Adjuk meg kinek van arbitrázs lehetősége a piacon, és adjuk meg az arbitrázs-stratégiát, ha az opció ára

- (a) 200 Ft;
- (b) 150 Ft!

**5.4.** Legyen adva a piacon egy részvény, melynek jelenlegi árfolyama 50 €. Két hónap múlva a részvény árfolyama vagy 53 €-ra fog nőni, vagy 48 €-ra fog csökkenni. A piacon a kockázatmentes kamatláb évi 10%. Mennyi az erre a részvényre vonatkozó európai vételi opció igazságos ára, melynek kötési árfolyama 49 €, ha tudjuk, hogy a lejáratig még két hónap van hátra?

**5.5.** Legyen adva a piacon egy részvény, melynek jelenlegi árfolyama 50 \$. Fél év múlva a részvény árfolyama vagy 60 \$-ra nő vagy 42 \$-ra csökken. A piacon a kockázatmentes kamatláb évi 12%. Mennyi az erre a részvényre vonatkozó európai vételi opció igazságos ára, melynek kötési árfolyama 48 \$, ha tudjuk, hogy a lejáratig még hat hónap van hátra? Mennyi az erre a részvényre vonatkozó, azonos lejáratú idejű és kötési árú európai eladási opció igazságos ára? Ellenőrizzük, hogy valóban teljesül a put-call paritás!

**5.6.** Legyen adva a piacon egy részvény, melynek jelenlegi árfolyama 5000 Ft. Hat hónap múlva a részvény árfolyama vagy 5500 Ft-ra nő vagy 4500 Ft-ra csökken. A piacon a kockázatmentes kamatláb évi 10%. Mennyi az erre a részvényre vonatkozó európai eladási opció igazságos ára, melynek kötési árfolyama 5000 Ft, ha tudjuk, hogy a lejáratig még hat hónap van hátra? Mennyi az erre a részvényre vonatkozó, azonos lejáratú idejű és kötési árú európai vételi opció igazságos ára? Ellenőrizzük, hogy valóban teljesül a put-call paritás!

**5.7.** Legyen adva a piacon egy részvény, melynek jelenlegi árfolyama 8000 Ft. Négy hónap múlva a részvény árfolyama vagy 8500 Ft-ra nő vagy 7500 Ft-ra csökken. A piacon a kockázatmentes kamatláb évi 5%. Mennyi az erre a részvényre vonatkozó európai eladási opció igazságos ára, melynek kötési árfolyama 8000 Ft, ha tudjuk, hogy a lejáratig még négy hónap van hátra?

**5.8.** Legyen adva a piacon egy részvény, melynek jelenlegi árfolyama 4000 Ft. Három hónap múlva a részvény árfolyama vagy 4500 Ft-ra nő vagy 3500 Ft-ra csökken. A piacon a kockázatmentes kamatláb évi 8%. Mennyi az erre a részvényre vonatkozó európai eladási opció igazságos ára, melynek kötési árfolyama 4000 Ft, ha tudjuk, hogy a lejáratig még három hónap van hátra?

## **Európai és amerikai opciók árazása 2-lépéses bináris piacokon**

**5.9.** Legyen adva a piacon egy részvény, melynek jelenlegi árfolyama 4000 Ft. A részvény árfolyama az első öt hónapban vagy 15%-kal nő vagy 4%-kal csökken, míg a második öt hónapban 10%-kal nő vagy 10%-kal csökken. A piacon a kockázatmentes kamatláb az első öt hónapban éves szinten 8%, míg a második öt hónapban 10%. Mennyi az erre a részvényre vonatkozó európai vételi opció igazságos ára, melynek kötési árfolyama 3900 Ft, ha tudjuk, hogy a lejáratig még tíz hónap van hátra?

**5.10.** Legyen adva a piacon egy részvény, melynek jelenlegi árfolyama 10.000 Ft. A részvény árfolyama a következő két hat hónapos időszakban vagy 10%-kal nő vagy 10%-kal csökken. A piacon a kockázatmentes kamatláb minden félévben éves szinten 8%. Mennyi az erre a részvényre vonatkozó európai vételi opció igazságos ára, melynek kötési árfolyama 10.000 Ft, ha tudjuk, hogy a lejáratig még egy év van hátra? Mennyi az ugyanerre a részvényre vonatkozó európai eladási opció igazságos ára, melynek kötési árfolyama szintén 10.000 Ft, ha tudjuk, hogy a lejáratig még egy év van hátra? Ellenőrizzük le, hogy valóban teljesül a put-call paritás!

**5.11.** Legyen adva a piacon egy részvény, melynek jelenlegi árfolyama 5000 Ft. A részvény árfolyama a következő két három hónapos időszakban vagy 6%-kal nő vagy 5%-kal csökken. A piacon a kockázatmentes kamatláb minden három hónapos időszakban éves szinten 5%. Mennyi az erre a részvényre vonatkozó európai vételi opció igazságos ára, melynek kötési árfolyama 5100 Ft, ha tudjuk, hogy a lejáratig még hat hónap van hátra? Mennyi az ugyanerre a részvényre vonatkozó európai eladási opció igazságos ára, melynek kötési árfolyama szintén 5100 Ft, ha tudjuk, hogy a lejáratig még hat hónap van hátra? Ellenőrizzük le, hogy valóban teljesül a put-call paritás!

**5.12.** Legyen adva a piacon egy részvény, melynek jelenlegi árfolyama 4000 Ft. A részvény árfolyama a következő két három hónapos időszakban vagy 10%-kal nő vagy 10%-kal csökken. A piacon a kockázatmentes kamatláb mindkét három hónapos időszakban éves szinten 12%.

(a) Mennyi az erre a részvényre vonatkozó európai eladási opció igazságos ára, melynek kötési árfolyama 4200 Ft, ha tudjuk, hogy a lejáratig még hat hónap van hátra?

- (b) Mennyi ugyanennek az opciónak az ára, ha az első periódus végén részvényenként 100 Ft osztalékfizetés történik?
- (c) Mennyi ugyanennek az opciónak az ára, ha az első periódus végén osztalékfizetés történik, mégpedig az aktuális részvényárfolyam 2%-át fizetik részvényenként?

**5.13.** Legyen adva a piacon egy részvény, melynek jelenlegi árfolyama 100 €. A részvény árfolyama az első hónapban vagy 10%-kal nő vagy 20%-kal csökken, míg a második hónapban 20%-kal nő vagy 10%-kal csökken. A piacon a kockázatmentes kamatláb az első hónapban éves szinten 10%, míg a második hónapban 12%. Mennyi az erre a részvényre vonatkozó amerikai eladási opció igazságos ára, melynek kötési árfolyama 110 €, ha tudjuk, hogy a lejáratig még két hónap van hátra?

**5.14.** Legyen adva a piacon egy részvény, melynek jelenlegi árfolyama 5000 Ft. A részvény árfolyama a következő két évben vagy 20%-kal nő vagy 20%-kal csökken. A piacon a kockázatmentes kamatláb minden évben éves szinten 5%. Mennyi az erre a részvényre vonatkozó amerikai eladási opció igazságos ára, melynek kötési árfolyama 5200 Ft, ha tudjuk, hogy a lejáratig még két év van hátra?

**5.15.** Legyen adva a piacon egy részvény, melynek jelenlegi árfolyama 5000 Ft. A részvény árfolyama a következő két harmadévben vagy 20%-kal nő vagy 6%-kal csökken. A piacon a kockázatmentes kamatláb minden négy hónapban éves szinten 5%. Mennyi az erre a részvényre vonatkozó amerikai vételi opció igazságos ára, melynek kötési árfolyama 5300 Ft, ha tudjuk, hogy a lejáratig még nyolc hónap van hátra?

**5.16.** Legyen adva a piacon egy részvény, melynek jelenlegi árfolyama 4000 Ft. A részvény árfolyama a következő két negyedévben vagy 10%-kal nő vagy 10%-kal csökken. A piacon a kockázatmentes kamatláb minden negyedévben éves szinten 12%. Mennyi az erre a részvényre vonatkozó amerikai eladási opció igazságos ára, melynek kötési árfolyama 4200 Ft, ha tudjuk, hogy a lejáratig még fél év van hátra?

**5.17.** Egy részvény jelenlegi ára 100\$, félévente egyszer változik az ára +8%-kal vagy -10%-kal, osztalékot nem fizet a következő évben. A kockázatmentes kamatláb évi 6%.

- (a) Adott egy európai eladási opció, melynek 6 hónap múlva lesz lejárat, kötési ára 105\$. Határozzuk meg az opció jelenlegi értékét és deltáját.
- (b) Put-call paritás segítségével határozzuk meg egy ugyanarra a részvényre kötött azonos paraméterű (lejárat, kötési ár) európai vételi opció árát!
- (c) Mennyi lenne egy 1 évre kiírt amerikai eladási (put) opció értéke, mely minden másban az (a) pontbeli opcióval egyezik meg?

## Európai opciók árazása többlépéses binomiális piacokon

**5.18.** Tekintsünk egy 3-lépéses bináris piacot, ahol a kereskedési időpontok között eltelt idő 1 hónap, a kockázatmentes kamatláb éves szinten 6%. Tegyük fel, hogy a kezdeti részvényárfolyam 100€, amely minden időszakban vagy 6%-kal növekszik, vagy 4%-kal csökken.

- (a) Tekintsünk egy európai eladási opciót, amelynek lejárat ideje 3 hónap, lehívási ára 110€. Határozzuk meg ezen opció igazságos árát a megfelelő európai vételi opció árát és a put-call paritást használva.
- (b) Tekintsünk egy olyan európai opciót, mely 3 hónap múlva 100€-t fizet, ha a részvényárfolyam valamelyik lépésben csökkent, egyébként pedig 0€. Határozzuk meg ezen európai opció igazságos árát.

## 6. A folytonos modell

### A Black–Scholes-féle árazás

Képletek:

$$c = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)$$
$$p = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1) \quad (\text{put-call paritásból})$$

Ahol:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$\sigma$ : volatilitás (a részvényárfolyam relatív változékonysága)

$\Phi$ :  $\mathcal{N}(0, 1)$  eloszlású v.v. eloszlásfüggvénye. Ekkor  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ .  $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

**6.1.** Adva van a piacon egy részvény, melynek jelenlegi árfolyama 4200 Ft, a részvény árfolyamának volatilitása éves szinten 20%. Egy erre a részvényre vonatkozó európai vételi opció kötési árfolyama 4000 Ft és a lejáratig még hat hónap van hátra. A piacon a kockázatmentes kamatláb éves szinten 10%. Mennyi ezen opció igazságos ára?

**6.2.** Adva van a piacon egy részvény, melynek jelenlegi árfolyama 69 €, a részvény árfolyamának volatilitása éves szinten 35%. Egy erre a részvényre vonatkozó európai eladási opció kötési árfolyama 70 € és a lejáratig még hat hónap van hátra. A piacon a kockázatmentes kamatláb éves szinten 5%. Mennyi ezen opció igazságos ára?

**6.3.** Adva van a piacon egy részvény, melynek jelenlegi árfolyama 40 \$, a részvény árfolyamának volatilitása éves szinten 15%. Egy erre a részvényre vonatkozó európai vételi opció kötési árfolyama 42 \$ és a lejáratig még negyedév van hátra. A piacon a kockázatmentes kamatláb éves szinten 12%. Mennyi ezen opció igazságos ára?

**6.4.** Adva van a piacon egy részvény, melynek jelenlegi árfolyama 5000Ft, a részvény árfolyamának volatilitása éves szinten 20%. Egy erre a részvényre vonatkozó európai eladási opció kötési árfolyama 4800Ft és a lejáratig még 4 hónap van hátra. A piacon a kockázatmentes kamatláb éves szinten 10%. Mennyi ezen opció igazságos ára?

### A volatilitás becslése

**6.5.** Egy részvény elmúlt 10 heti záróárfolyama sorrendben az alábbi volt:

30,2\$    32\$    31,1\$    30,1\$    30,3\$    30,3\$    30,6\$    33\$    32,9\$    33\$

Becsüljük meg a volatilitást a historikus módszer segítségével!

**6.6.** Egy részvény elmúlt 8 havi záróárfolyama sorrendben az alábbi volt (Ft-ban):

4100    4250    4200    4170    4050    4000    4000    4080

Becsüljük meg a volatilitást a historikus módszer segítségével!

**6.7.** Számítsuk ki annak a(z osztalékot nem fizető) részvénynek az implikált volatilitását, amelyre szóló európai vételi opció ára \$6.31, amikor a jelenlegi részvényárfolyam \$55, kötési árfolyam \$50, a lejáratig hátralévő idő 3 hónap és a kockázatmentes kamatláb 8%.

## 1. Historikus módszer.

Tegyük fel, hogy a részvény árára  $n + 1$  darab múltbeli megfigyelésünk van:  $S_0, S_1, \dots, S_n$ . Jelölje  $\delta t$  az egymást követő megfigyelések között eltelt időintervallumok hosszát. Legyen  $u_i := \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), továbbá  $s^*$  az  $u_1, \dots, u_n$  adatokból számolt korrigált empirikus szórás, azaz

$$s^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}$$

Ekkor a volatilitás becslése:  $\hat{\sigma} = \frac{s^*}{\sqrt{\delta t}}$ .

## 2. Implikált (visszaszámított) volatilitás – intervallumfelezés.

Egy részvény árfolyamának volatilitását szeretnénk becsülni. Tegyük fel, hogy a piacon adott egy opciós szerződés a tekintett részvényre vonatkozóan. Az implikált volatilitás a volatilitásnak az az értéke, amellyel elvégezve a Black–Scholes árazást, megkapjuk az opció árát (vagy egy ahhoz kellően közeli árat).

Tehát ha például egy vételi opciót tekintünk az adott részvényre vonatkozóan, akkor a

$$c = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)$$

formulából (amely  $d_1$ -en és  $d_2$ -n keresztül függ  $\sigma$ -tól) a volatilitás kivételével minden adatot ismerünk. Így ha meg tudnánk oldani az egyenletet, akkor megkapnánk az implikált volatilitás értékét.

Bár  $\sigma$  nem fejezhető ki  $S_0, K, T, r$  és  $c$  függvényeként, numerikusan (pl. intervallumfelezéssel) a visszaszámított volatilitás értéke meghatározható. A módszer során felhasználjuk, hogy az opció  $c$  igazságos ára a volatilitás monoton növekvő függvénye, azaz növekvő  $\sigma$  esetén a kapott ár is nagyobb.

## Görögök

Érzékenységi mutatók.

- Delta ( $\Delta$ ): opció igazságos ára a részvényárfolyam függvényében:

$$\Delta_f = \frac{\partial f}{\partial S}, \quad \Delta_c = \Phi(d_1), \quad \Delta_p = \Phi(d_1) - 1$$

- Gamma ( $\Gamma$ ): delta változása a részvényárfolyam függvényében:

$$\Gamma_f = \frac{\partial \Delta_f}{\partial S}, \quad \Gamma_c = \frac{\Phi'(d_1)}{S_0\sigma\sqrt{T}}, \quad \Gamma_p = \Gamma_c$$

- Theta ( $\Theta$ ): opció igazságos árának változása az idő függvényében:  $\Theta_f = \frac{\partial f}{\partial t}$ ,

$$\Theta_c = rKe^{-rT}\Phi(d_2) + \frac{\sigma}{2\sqrt{T}}S_0\Phi'(d_1), \quad \Theta_p = rKe^{-rT}(\Phi(d_2) - 1) + \frac{\sigma}{2\sqrt{T}}S_0\Phi'(d_1)$$

- Rho ( $\rho$ ): opció igazságos árának változása az  $r$  függvényében:  $\rho_f = \frac{\partial f}{\partial r}$ ,

$$\rho_c = Ke^{-rT}T\Phi(d_2), \quad \rho_p = Ke^{-rT}T(\Phi(d_2) - 1)$$

- Vega ( $V$ ): opció igazságos árának változása a volatilitás ( $\sigma$ ) fv.-ében:

$$V_f = \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad V_c = V_p = S_0\Phi'(d_1)\sqrt{T}$$

**6.8.** Számítsuk ki a Black–Scholes-féle árazásra vonatkozó feladatbeli opciókhoz tartozó görögök értékeit és értelmezzük őket!

## 7. Numerikus módszerek szemléltetése R-ben

**7.1.** Vegyük a piacon az AAA részvényt. A 2025. évi februári és márciusi napi záróadatok alapján becsljük meg historikus módszerrel a részvény árfolyamának volatilitását.

**7.2.** Egy, az AAA részvényre vonatkozó európai vételi opcióról a következőket tudjuk: kötési árfolyama 385 Ft, az opció lejáratáig hátralévő idő 1 év, a részvény kezdeti árfolyama pedig a március 31-ei záróár. Rögzített 5%-os kockázatmentes kamatláb mellett szemléltessük, hogy ezen opciónak a Cox-Ross-Rubinstein árazási formulával kapott igazságos ára konvergál a Black-Scholes árazási formulával kapott igazságos árhoz, amennyiben a lépések számával  $+\infty$ -hez tartunk (azaz amint  $n \rightarrow +\infty$ ).

**7.3.** Közelítsük a Monte-Carlo szimuláció segítségével az előző feladatbeli opció igazságos árát! Végezzük el a Monte-Carlo szimulációt kis mintaelemszám és nagy mintaelemszám esetén is, és vizsgáljuk meg mind a két esetben, hogy a becslt opciós díj mennyivel tér el a Cox-Ross-Rubinstein árazási formulával kapott igazságos árhoz képest!