

DISZKRÉT MATEMATIKA

Gyakorlati feladatsor

*A *-gal jelölt feladatok a nehezebb problémákat jelölik. (Tehát például a dolgozatbeli szorgalmi feladatok, illetve a jeles érdemjegy szintjét.)*

1. Bevezetés: halmazok és függvények

1.1. Legyen $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ páros}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 4\}$, valamint $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$. Mivel egyenlőek az alábbi halmazok?

$$B \setminus C, \quad A \setminus (B \cap C), \quad B \Delta C, \quad (B \cup C) \setminus A$$

1.2. Tekintsük az alábbi halmazokat: $A = \mathbb{Z}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ páros}\}$, $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ prím}\}$. Mivel egyenlőek az alábbi halmazok?

$$A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad A \cap B, \quad C \setminus B, \quad (A \setminus B) \cup D, \quad B \Delta D$$

1.3. Írjuk fel az $A = \{a, b, c\}$ halmaz hatványhalmazát!

1.4. Egyenlő-e az alábbi két halmaz?

- (a) Az 5-nél nagyobb egész, valamint a 6-nál nem kisebb természetes számok halmaza;
- (b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ és } x < x^2\}$ és $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ és } x = |x|\}$;
- (c) $A = \mathbb{R}$ és $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2} = x\}$.

1.5. Legyenek A , B és C a H alaphalmaz tetszőleges részhalmazai. Írjuk fel a halmazműveletek, valamint A , B , C és H segítségével H azon elemeinek halmazát, amelyek

- (a) csak a B halmaznak elemei (A , B és C közül);
- (b) pontosan két halmaznak elemei;
- (c) nem elemei mindhárom halmaznak;
- (d) legfeljebb egy halmaznak elemei;
- (e) legalább két halmaznak elemei;
- (f) legalább egy halmaznak elemei.

1.6. Jelölje X a 2017 szeptember elsején 20 és 22 óra között a „Vak késdobáló” elnevezésű vendéglátóipari egységben megjelent vendégek halmazát. Tekintsük az X alábbi részhalmazait: N a nők halmaza, T a törzsvendégek (az egységet hetente legalább 4 alkalommal látogatók) halmaza, A az alkalmi vendégek (az egységet ezidáig legfeljebb kétszer látogatók) halmaza, S a sört ivók, B pedig a bort ivók halmaza. Fogalmazzuk meg halmazelméleti műveletekkel az alábbi állításokat!

- (a) A bort ivó alkalmi vendégek között nincs nő.
- (b) A férfi törzsvendégek sört és bort is isznak.
- (c) Nincs olyan sörivó nő, aki törzsvendég.
- (d) Aki vagy csak sört, vagy csak bort iszik az alkalmi vendég és nő.
- (e) Minden alkalmi vendég sörivó.

1.7. Legyen A egy m elemű, B egy n elemű halmaz. Adjuk meg m és n függvényében legalább, ill. legfeljebb hány eleme lehet az alábbi halmazoknak!

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad A \Delta B, \quad A \times B$$

1.8. Egy társaságban 27-en beszélnek angolul, 23-an németül, 12-en mindkét nyelvet beszélnek, 8-an egyiket sem. Hány tagú a társaság?

1.9. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket! (Az értelmezési tartomány $\mathbb{R}$ lehető legbővebb részhalmaza.)

(a) $f(x) = 2x + 3$

(b) $f(x) = -\frac{x}{2}$

(c) $f(x) = 6$

(d) Az $f(x)$ elsőfokú függvényt, ha tudjuk, hogy f grafikonja illeszkedik a $(-3, 1)$ és $(2, -2)$ pontokra. Adjuk meg $f(x)$ képletét is!

(e) $f(x) = 2x^2 + 8x - 10$

(f) $f(t) = t^2 - 6t + 9$

(g) $f(x) = -x^2 - 4$

1.10. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket! (Az értelmezési tartomány $\mathbb{R}$ lehető legbővebb részhalmaza.)

(a) $f(x) = 8 - 2x$

(b) $f(x) = \frac{x}{4} + 1$

(c) Az $f(x)$ elsőfokú függvényt, ha tudjuk, hogy f grafikonja illeszkedik a $(-2, 0)$ és $(3, 4)$ pontokra. Adjuk meg $f(x)$ képletét is!

(d) $f(x) = -2x^2 - 7x + 3$

(e) $f(x) = x^2 - 2x + 4$

(f) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

(g) $f(x) = 0, 7^x$

(h) $f(x) = 3^x$

(i) $f(x) = \log_4 x$

(j) $f(x) = \log_{0,5} x$

1.11. Döntsük el, hogy az alábbi függvények közül melyik injektív, szürjektív, ill. bijektív! Ha mást nem mondunk, akkor az értelmezési tartomány $\mathbb{R}$ lehető legbővebb részhalmaza, a képtér pedig $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = x^2$

(b) $g(x) = \sin x$

(c) $h(x) = \sin x \upharpoonright \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Mi a helyzet, ha a képtér $[-1, 1]$?

(d) $f(x) = x^3$

(e) $f(x) = x^3 - x$

(f) $f(x) = ax + b$

(g) $f(x) = 2^x$

(h) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

2. Teljes indukció

2.1. Bizonyítsuk be teljes indukcióval az alábbi állításokat!

- (a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén;}$
- (b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén;}$
- (c) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén;}$
- (d) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén;}$
- (e) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén;}$
- (f) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén;}$
- (g) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén;}$
- (h) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén;}$
- (i) $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén;}$
- (j) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén;}$
- (k) $6 \mid (n^3 - n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén;}$
- (l) $6 \mid (n^3 + 5n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén;}$
- (m) $5 \mid (2^{4n+1} + 3) \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén;}$
- (n) $3 \mid (n^3 + 5n + 6) \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén;}$
- (o) $9 \mid (10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5) \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén;}$
- (p) $4 \mid (7^n + 10n - 5) \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén;}$
- (q) $\frac{n^3}{3} + \frac{n^5}{5} + \frac{7n}{15}$ egész szám minden $n \in \mathbb{N}$ esetén;
- (r) $(n+1)! > 2^{n+3}, \quad \text{ha } n \geq 5, n \in \mathbb{N};$
- (s)* $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{n+1} - 1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén;}$
- (t)* $\binom{2n}{n} < 4^{n-1}, \quad \text{ha } n \geq 5, n \in \mathbb{N};$
- (u) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén;}$
- (v)* $n^3 < 2^{n+1}, \quad \text{ha } n > 8, n \in \mathbb{N};$
- (w) $\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$

2.2. Tegyük fel, hogy $n \geq 4$ idős hölgy mindegyike tud egy pletykát (mindenki különbözőt). A hölgyek mindegyikének van telefonja, és ha két hölgy felhívja egymást, akkor az összes addig tudomásukra jutott pletykát elmondják egymásnak. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy $2n - 4$ telefonhívással megoldható, hogy mindannyian ismerjék az összes pletykát!

3. Oszthatóság

3.1. Igazoljuk az alábbi oszthatóságokat!

(a) $9|(10^{19} + 53)$

(c) $6|(10^7 - 88)$

(b) $36|(10^{17} - 64)$

(d) $12|(10^{16} + 44)$

3.2. Milyen számjegyeket írhatunk a és b helyére, hogy teljesüljön az oszthatóság?

(a) $33|\overline{52ab71}$

(c) $45|\overline{61a24b}$

(b) $36|\overline{762a4b}$

(d) $72|\overline{44a21b}$

3.3. Igazoljuk az alábbi oszthatóságokat!

(a) $200|(199^3 - 199)$

(c) $200|(101^3 + 99^3)$

(b) $7|(11^9 - 4^9)$

(d) $99|(11^{22} - 22^{11})$

3.4. Számítsuk ki, hogy $100!$ hány nullára végződik!

3.5. Létezik-e olyan n egész szám, hogy $n!$ pontosan 5 nullára végződik?

3.6. Igazoljuk, hogy négy egymást követő egész szám szorzata mindig osztható 24-gyel!

3.7. Igazoljuk, hogy ha egy tetszőleges pozitív háromjegyű számot kétszer egymás után leírunk, akkor a kapott hatjegyű szám osztható 13-mal!

3.8. Euklideszi algoritmus segítségével számítsuk ki az alábbi számok legnagyobb közös osztóját!

(a) 672 és 360,

(c) 1225 és 216,

(e) 783 és 1160,

(b) 455 és -312 ,

(d) 680 és -845 ,

(f) 3751 és 1240.

3.9. Mutassuk meg, hogy nem léteznek olyan a és b pozitív egész számok, hogy $a^2 = 5b^2$.

3.10. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi egyenletek nem oldhatók meg a pozitív egész számok körében!

(a) $n^{k+1} = (n+1)^k$,

(c) $k(k^4 + 1) = 3267$,

(b) $a^6 + 25a = 7425$,

(d) $30^n + 31^m = 32^k$.

3.11. Miért nem lehet két prímszám összege 2017?

3.12. Lehet-e 2007 egymást követő egész szám összege prímszám?

3.13. Van-e olyan n egész szám, melyre $2^n - 1$ és $2^n + 1$ is prímszám?

3.14. Lehetnek-e az $n - 12$, $n + 3$ és $n + 5$ számok egyszerre prímszámok, ahol $n \in \mathbb{Z}$?

3.15. Legyen $p > 3$ prímszám. Mutassuk meg, hogy $24|(p^2 - 1)$.

3.16. Határozzuk meg az alábbi számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét!

- | | | |
|-----------------|--------------------|-----------------|
| (a) 450 és 420, | (c) 1260 és 14850, | (e) 495 és 300, |
| (b) 539 és 364, | (d) 663 és 308, | (f) 990 és 420. |

3.17. Bizonyítsuk be, hogy négy egymást követő természetes szám között mindig van egy, amely a másik háromhoz relatív prím!

3.18. Hány pozitív osztója van az alábbi számoknak?

- | | | |
|---------|---------|---------|
| (a) 252 | (b) 600 | (c) 528 |
|---------|---------|---------|

3.19. Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek pontosan 12 pozitív osztója van?

3.20. Hány olyan pozitív osztója van 7560-nak, amely a 15-höz relatív prím?

3.21. Oldjuk meg (amennyiben lehetséges) az alábbi lineáris diofantikus egyenleteket!

- | | | |
|------------------------|------------------------|--------------------------|
| (a) $14x - 18y = 6$, | (c) $12x - 15y = 26$, | (e) $495x + 300y = 15$, |
| (b) $15x + 28y = 12$, | (d) $21x - 15y = 12$, | (f) $18x + 28y = 10$. |

3.22. Gombóc Artúrnak 1420 Ft-ja van, ezt mindet csokoládéra szeretné költeni. A boltban kétféle csokoládét lehet kapni: a lyukas csokoládénak 35 Ft darabja, a kerek csokoládénak 40 Ft. Hogyan választhat csokoládét Gombóc Artúr?

3.23.* Péter egy 20 szál virágból álló csokrot vásárolt 1430 Ft-ért. A csokorban háromféle virág található, amelyekből egy szál rendre 50, 70, ill. 80 Ft-ba kerül. Hány szál virágot tartalmaz az egyes fajtákból a csokor, ha tudjuk, hogy egyik fajtából sincs benne 10-nél több?

3.24. Oldjuk meg (amennyiben lehetséges) az alábbi lineáris kongruenciákat!

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| (a) $3x \equiv 5 \pmod{7}$, | (e) $5x \equiv 24 \pmod{13}$, |
| (b) $12x \equiv 8 \pmod{16}$, | (f) $14x \equiv 8 \pmod{21}$, |
| (c) $9x \equiv 15 \pmod{12}$, | (g) $11x \equiv 12 \pmod{18}$, |
| (d) $5x \equiv 4 \pmod{11}$, | (h) $30x \equiv 48 \pmod{58}$. |

3.25. Mennyi maradékot ad

- | | |
|------------------------------------|---|
| (a) 39^{28} , ha 29-cel osztjuk, | (d) 17^{18} , ha 40-nel osztjuk, |
| (b) 17^{40} , ha 25-tel osztjuk, | (e)* $54^{55^{56}}$, ha 13-mal osztjuk, |
| (c) 23^{81} , ha 50-nel osztjuk, | (f)* $38^{39^{40}}$, ha 11-gyel osztjuk? |

3.26. Mi az utolsó két számjegye 19^{81} -nek?

4. Komplex számok

4.1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán! Ábrázoljuk a megoldásokat a komplex számsíkon!

(a) $x^2 + 4 = 0$,

(c) $x^2 - x + 1 = 0$,

(b) $x^2 + 2x + 2 = 0$,

(d) $x^3 - 6x^2 + 13x = 0$.

4.2. Írjuk fel az alábbi komplex számok algebrai alakját!

(a) $(3 + i)(2 + 3i)$, $(-2 + 3i)(5 - 2i)$, $i(1 + 2i)$, $(-1 + i)(1 - 2i)(1 + 2i)$,

(b) $\overline{5 - 2i}$, $\overline{(3 + 4i)(2 + i)}$,

(c) $(2 - i)^3$, $i^6 + 3i^5 - 2i^3 + i^2 - 1$, i^{2017} , i^{100} ,

(d) $\frac{5 + 3i}{i}$, $\frac{1 - i}{2 + i}$, $\frac{1 - 2i}{1 - 3i}$, $\frac{2 - i}{(3 - 2i)(2 + 5i)}$.

4.3. Mely z komplex számokra igazak a következő feltételek?

(a) $\bar{z} = z$

(b) $\bar{z} = iz$

(c) $\bar{z} = \frac{1}{z}$

4.4. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

(a) $\bar{z} + 2z = 9 + 2i$,

(d) $z^2 + |z|^2 = 2 - 6i$,

(b) $\bar{z} + |z|^2 = 31 - i$,

(e) $\bar{z} \cdot z^2 = 8i$,

(c) $i^3 \cdot \bar{z} = -3 - 2i$,

(f) $z^2 = i$.

4.5. Ábrázoljuk a komplex számsíkon az alábbi halmazokat!

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0\}$,

(d) $D = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \geq 2\}$,

(b) $B = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = 0\}$,

(e) $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$,

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \leq 0\}$,

(f) $F = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = \text{Im}(z)\}$.

4.6. Adjuk meg az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját!

(a) 2 ,

(c) $-i$,

(e) $1 + i$,

(g) $-3 - 3\sqrt{3}i$,

(b) i ,

(d) $1 - i$,

(f) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

(h) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

4.7. Legyen $x = 3\left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}\right)$ és $y = 2\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right)$. Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét!

(a) $x \cdot y$,

(b) $\frac{x}{y}$,

(c) x^3 ,

(d) y^5 ,

(e) $\frac{1}{x}$,

(f) $x^2 y$.

4.8. A trigonometrikus alak segítségével határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét!

- (a) $\sqrt{i}$, (c) $(1+i)^{2008}$,
 (b) $\sqrt[3]{i}$, (d) $(1+\sqrt{3}i)^{301}$.

4.9. Számítsuk ki a $z = 81 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right)$ komplex szám második, harmadik, negyedik gyökeit! Ábrázoljuk a gyököket a komplex számsíkon!

4.10. Írjuk fel és ábrázoljuk a komplex számsíkon a harmadik, negyedik, ötödik és hatodik egységgyököket!

4.11. Az alábbi komplex számok közül melyek egységgyökök?

$$1+i, \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, \quad 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right), \quad \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2},$$

$$\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8}, \quad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -1, \quad i.$$

4.12. Legyen $\varepsilon = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}$. Mutassuk meg, hogy $k = 1, \dots, 8$ esetén ε^k előállítja az összes nyolcadik egységgyököt!

4.13. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

- (a) $z^2 - 3iz + 4 = 0$, (d) $z^2 + (2+4i)z - 3 + 3i = 0$,
 (b) $z^3 + z^2 + z = 0$, (e) $2iz^2 + (4+5i)z + 5 = 0$,
 (c) $z^5 - z = 0$, (f) $iz^2 + 2iz + 1 = 0$.

5. Polinomok

5.1. Írjuk fel az alábbi polinomok gyöktényező felbontását $\mathbb{R}$ felett!

- (a) $2x^2 - 2x - 12$ (e) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
 (b) $-x^3 - 3x^2 + 4x$ (f) $x^3 - 3x^2 - x + 3$
 (c) $4x^2 - 4x - 3$ (g) $x^4 - 16$
 (d) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ (h) $x^4 - 2x^2 + 1$

5.2. Írjunk fel olyan minimális fokszámú valós együtthatós polinomot, melynek

- (a) a -3 kétszeres, az 1 egyszeres gyöke;
 (b) az 5 és az i gyöke;
 (c) a 2 és az $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ gyöke;
 (d) az i kétszeres gyöke.

5.3. Végezzük el a kijelölt osztásokat!

- (a) $(2x^3 - x^2 - 5x - 2) : (x - 2)$
- (b) $(2x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 14x - 6) : (x - 3)$
- (c) $(-3x^3 + 48x) : (x - 4)$
- (d) $(6x^3 + 9x^2 - 5x - 4) : (2x + 1)$
- (e) $(6x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 2x) : (2x^2 - x + 1)$

5.4. Végezzük el az alábbi polinomokon a maradékos osztást!

- (a) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6, x^2 - 3x + 1$
- (b) $2x^5 - 5x^3 - 8x, x + 3$
- (c) $x^5 - 3x^4 + 1, x^2 + x + 1$
- (d) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1, x^3 + x^2 - x - 1$
- (e) $x^4 - 10x^2 + 1, x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1$

5.5. Horner-algoritmus segítségével határozzuk meg az alábbi helyettesítési értékeket!

- (a) $p(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 - 5x^2 + 2x - 4, p(2) = ?, p(-1) = ?$
- (b) $p(x) = 2x^6 - 3x^4 + x^2 + 2x + 1, p(-2) = ?$
- (c) $p(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^2 + 3x + 2, p(-2) = ?, p(3) = ?$
- (d) $p(x) = 6x^3 + 9x^2 - 5x - 4, p\left(-\frac{1}{2}\right) = ?$

6. Kombinatorika

6.1. Melyikből van több: csupa különböző számjegyből álló tízjegyű, vagy csupa különböző számjegyből álló kilencjegyű számból?

6.2. Hányféleképpen rakhatunk sorba 12 könyvet, ha 3 bizonyos könyvet egymás mellé akarunk rakni és

- (a) a három könyv sorrendje nem számít?
- (b) a három könyv sorrendje számít?

6.3. Hányféleképpen lehet a sakktáblán elhelyezni 8 egyforma bástyát úgy, hogy egyik se üsse a másikat? Mennyi lesz az eredmény, ha a 8 bástyát meg tudjuk különböztetni egymástól?

6.4. Hányféleképpen ültethetünk egy kerek asztal köré 5 házaspárt úgy, hogy a házastársak egymás mellett üljenek? (A forgatással egymásba vihető ülésrendeket azonosnak tekintjük.)

6.5. Hányféleképpen ültethetünk egy kerek asztal köré 5 férfit és 5 nőt úgy, hogy se két férfi, se két nő ne kerüljön egymás mellé? (A forgatással egymásba vihető ülésrendeket azonosnak tekintjük.)

6.6. Hány olyan hatjegyű szám van, melyben három 1-es, két 2-es és egy 3-as számjegy szerepel?

6.7. Egy urnában 5 piros, 7 fehér és 3 zöld golyó található. Egyesével kihúzzuk a golyókat és a húzás sorrendjében feljegyezzük a kihúzott golyók színét. Hányféle színsorozatot kaphatunk?

- 6.8.** Egy kiránduláson 10 diák vesz részt. Hányféleképpen helyezhetjük el őket egy két-, egy három- és egy ötágyas szobában?
- 6.9.** Hányféleképpen oszthatunk szét 12 gyerek között 15 könyvet, ha nem muszáj minden gyereknek könyvet adnunk?
- 6.10.** Hat ajánlott levelet kell kikézbesíteni, ehhez három postás áll rendelkezésre. Hányféleképpen oszthatjuk szét a leveleket közöttük?
- 6.11.** Hányféleképpen választhatunk ki egy csomag francia kártyából (4 szín, színenként 13 lap) négy páronként különböző színű lapot? Hányféleképpen választhatunk akkor, ha azt is megköveteljük, hogy ne legyen két azonos értékű sem?
- 6.12.** Hányféleképpen ültethetünk egymás mellé 10 különböző életkorú embert úgy, hogy a legidősebb és a legfiatalabb ne üljön egymás mellett?
- 6.13.** A számegyenesen az origóból indulva 10-et lépünk úgy, hogy minden lépésnél 1 egységet lépünk jobbra, vagy balra. Hányféleképpen fordulhat elő, hogy a 10 lépés után visszaérünk az origóba?
- 6.14.** Hányféleképpen juthatunk el a síkbeli koordinátarendszerben az origóból a $(4, 3)$ pontba, ha mindig csak jobbra, vagy felfelé léphetünk 1 egységet?
- 6.15.** Az (x, y, z) térbeli koordináta-rendszerben hányféleképpen juthatunk el az origóból a $(4, 3, 2)$ pontba, ha minden lépésnél az x -, y -, vagy z -tengely mentén léphetünk egy egységnyit pozitív irányban?

6.16. Hányféleképpen lehet kiolvasni az alábbi táblázatból a kombinatorika szót?

K	O	M	B	I	N	A	T
O	M	B	I	N	A	T	O
M	B	I	N	A	T	O	R
B	I	N	A	T	O	R	I
I	N	A	T	O	R	I	K
N	A	T	O	R	I	K	A

6.17. Hányféleképpen rakhatunk sorba 5 piros és 8 fehér golyót úgy, hogy ne legyen egymás mellett 2 piros golyó?

6.18. Hányféleképpen rakhatunk sorba n darab nullát és k darab 1-est ($k \leq n+1$) úgy, hogy két egyes ne kerüljön egymás mellé?

6.19. Hányféleképpen állíthatunk sorba 4 fiút és 6 lányt úgy, hogy két fiú ne álljon egymás mellett?

6.20. Hányféleképpen rakhatunk sorba 6 piros, 5 fehér és 4 kék golyót úgy, hogy 2 piros golyó ne kerüljön egymás mellé?

6.21. Hányféleképpen választhatunk ki 6 fiúból és 8 lányból 4 táncoló párt? (A párok tagjai különböző neműek.)

6.22. Egy társaságban 15 férfi és 16 nő van. Hányféleképpen választhatunk ki belőlük 7 embert úgy, hogy pontosan 4 férfi legyen közöttük?

6.23. Hányféleképpen választhatunk ki egy 11 fős társaságból két négyfős csapatot?

6.24. Egy adott héten hányféleképpen fordulhat elő, hogy pontosan három találatunk van az ötöslottón? Az ötöslottón 90 számból húznak 5-öt, a sorrend nem számít.

6.25. Egy adott héten egy szelvénnel játszva hányféleképpen fordulhat elő, hogy legalább három találatunk van az ötöslottón?

6.26. Egy csomag francia kártyából kihúzzunk 10 lapot. Hány esetben lesz ezek között

- (a) ász?
- (b) pontosan egy ász?
- (c) legfeljebb egy ász?
- (d) pontosan két ász?
- (e) legalább két ász?

6.27. Hányféleképpen oszthatunk szét 4 gyerek között 7 almát és 9 körtét?

6.28. A $(2+x)^8$ hatványozást elvégezve mi az x^3 tag együtthatója?

6.29. Elvégezve az $(1+a)^{17}$ hatványozást, mi lesz az a^{10} tag együtthatója?

6.30. Igazoljuk az alábbi összefüggést!

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

6.31. Igazoljuk az alábbi összefüggéseket!

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

7. Vektorterek

7.1. Állapítsuk meg, hogy alteret alkot-e

- (a) $\mathbb{R}^2$ -ben a $\{(0, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ halmaz,
- (b) $\mathbb{R}^2$ -ben az $\{(1, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ halmaz,
- (c) $\mathbb{R}^3$ -ban az $\{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$ halmaz
- (d) $\mathbb{R}^2$ -ben az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ halmaz,
- (e) $\mathbb{R}^2$ -ben az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ halmaz,
- (f) $\mathbb{R}^4$ -ben az $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_3\}$ halmaz,
- (g) $\mathbb{R}^3$ -ban az $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$ halmaz,
- (h) $\mathbb{R}^3$ -ban az $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = x_3\}$ halmaz,
- (i) $\mathbb{R}^2$ -ben az $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \geq 0\}$ halmaz,
- (j) a legfeljebb n -edfokú valós polinomok terében azon legfeljebb n -edfokú valós p polinomok halmaza, melyekre $p(0) = 0$ teljesül,
- (k) a legfeljebb n -edfokú valós polinomok terében azon legfeljebb n -edfokú valós p polinomok halmaza, melyekre $p(0) = 1$ teljesül,
- (l) a legfeljebb n -edfokú valós polinomok terében a páros foksámú polinomok halmaza,
- (m) a valós számsorozatok terében a számtani sorozatok halmaza.

7.2. Mutassuk meg, hogy az $(1, 2)$ és $(-3, 2)$ vektorok lineárisan függetlenek $\mathbb{R}^2$ -ben!

7.3. Lineárisan függetlenek-e $\mathbb{R}^3$ -ban az alábbi vektorrendszerek?

- (a) $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, 1, 1);$
- (b) $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1);$
- (c) $v_1 = (1, 2, 2), v_2 = (-1, -1, 2), v_3 = (2, 3, 0);$
- (d) $v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (2, 3, -1), v_3 = (-1, 2, -17);$
- (e) $v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (-2, -2, -4);$
- (f) $v_1 = (-1, 2, 1), v_2 = (2, -3, 1), v_3 = (1, 1, 2);$
- (g) $v_1 = (-1, 2, 1), v_2 = (2, -3, 1), v_3 = (1, 1, 2), v_4 = (5, 2, 0).$

7.4. Határozzuk meg az alábbi vektorok által generált alteret $\mathbb{R}^2$ -ben!

- | | |
|-------------------------|--------------------------------|
| (a) $(1, 0), (0, 1);$ | (d) $(3, 2);$ |
| (b) $(-2, 0), (0, 1);$ | (e) $(1, 2), (3, 1);$ |
| (c) $(1, -2), (2, -4);$ | (f) $(1, 0), (2, -4), (0, 2).$ |

7.5. Írjuk fel az $(1, 2)$ vektor koordinátáit $\mathbb{R}^2$ alábbi bázisaira vonatkozóan!

- | | |
|------------------------|------------------------|
| (a) $(1, 0), (0, 1);$ | (c) $(3, 1), (1, 2);$ |
| (b) $(-1, 2), (1, 1);$ | (d) $(1, -1), (1, 3).$ |

7.6. Írjuk fel az $(1, -1, 2)$ vektor koordinátáit az $\mathbb{R}^3$ alábbi bázisaira vonatkozóan!

- | | |
|--|--|
| (a) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1);$ | (c) $(-1, 2, 1), (2, -3, 1), (1, 1, 2);$ |
| (b) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1);$ | (d) $(1, 2, 2), (-1, -1, 3), (2, 3, 0).$ |

8. Mátrixok, determinánsok, lineáris egyenletrendszerek

8.1. Legyenek adottak az A , B , C és D mátrixok a következőképpen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 10 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Végezzük el az alábbi műveleteket, amennyiben lehetséges!

$$A + B, \quad 3A - 2B, \quad A^T + B^T, \quad AD, \quad CB, \quad CD, \quad AC + BC, \quad (A + B)C$$

8.2. Legyen

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \\ B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

$$Av, \quad Aw, \quad A(u + v), \quad w^T A^T, \quad A + B, \quad (-2C)^T, \quad 2A - 3B, \quad (A + B)^T, \quad AB, \quad BA, \\ B^T A^T, \quad AE, \quad EA, \quad AC, \quad A(B + C), \quad C(A - 2B), \quad A^T A, \quad AA^T.$$

8.3. Legyen

$$v = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \\ B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & -6 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

$$Av, \quad Aw, \quad A(u + v), \quad w^T A^T, \quad A + B, \quad (-2C)^T, \quad 2A - 3B, \quad (A + B)^T, \quad AB, \quad BA, \\ B^T A^T, \quad AE, \quad EA, \quad AC, \quad A(B + C), \quad C(A - 2B), \quad A^T A, \quad AA^T.$$

8.4. Számoljuk ki az alábbi mátrixok determinánsát a Sarrus-szabály segítségével.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & -7 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8.5. Számoljuk ki az alábbi mátrixok determinánsát kifejtési tétellel, vagy Gauss-eliminációval.

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} & \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{(c)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \\
 \text{(d)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -6 & -6 & 5 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} & \text{(e)} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -1 & -6 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} & \text{(f)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \\
 \text{(g)} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \text{(h)} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 4 & -8 \\ 8 & -6 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{(i)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

8.6. Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét, amennyiben az létezik.

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} & \text{(b)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{(c)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -12 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{pmatrix} \\
 \text{(d)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} & \text{(e)} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} & \text{(f)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 \text{(g)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{(h)} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} & \text{(i)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -6 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

8.7. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \end{array} & \text{(b)} \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \end{array} \\
 \text{(c)} \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 = 5 \\ 2x_1 + 8x_2 = 10 \end{array} & \text{(d)} \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \end{array} \\
 \text{(e)} \begin{array}{l} -3x_1 + x_2 + 2x_3 = -2 \\ 4x_1 - 6x_2 - x_3 = 17 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 10 \end{array} & \text{(f)} \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = 5 \\ 3x + 5y + 6z = 14 \\ 2x + 4y + 5z = 11 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{array}
 \end{array}$$

8.8. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket a Cramer-szabály alkalmazásával, amennyiben ez lehetséges!

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{array} & \text{(b)} \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{array}
 \end{array}$$

8.9. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \begin{array}{rcl} -2x_1 - x_2 + 4x_3 & = & 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 1 \\ -4x_1 - 10x_2 - 5x_3 & = & -12 \end{array} & \text{(b)} \quad \begin{array}{rcl} -4x_1 - 4x_2 + 2x_3 & = & -2 \\ -2x_1 - 7x_2 + 3x_3 & = & 6 \\ 2x_1 + 12x_2 - 5x_3 & = & -13 \end{array} \\
 \text{(c)} \quad \begin{array}{rcl} -2x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 6x_1 - 3x_2 - 4x_3 & = & -8 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 & = & 4 \end{array} & \text{(d)} \quad \begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 & = & 4 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 & = & -5 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 5x_4 & = & 8 \end{array} \\
 \text{(e)} \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 & = & -2 \\ -4x_1 + 6x_2 - x_3 & = & 5 \\ x_1 - 2x_3 & = & 0 \end{array} & \text{(f)} \quad \begin{array}{rcl} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 & = & 3 \\ -x_1 + 7x_2 + 7x_3 & = & 20 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 & = & -11 \end{array}
 \end{array}$$

8.10. Határozzuk meg az alábbi mátrixok rangját!

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -9 & -8 & -1 & 6 \\ -6 & 0 & -8 & -8 \\ 9 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

8.11. Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek rangját!

- (a) $v_1 = (1, 2), v_2 = (3, 1);$
- (b) $v_1 = (1, 0), v_2 = (2, -4), v_3 = (0, 2);$
- (c) $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, 1, 1);$
- (d) $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1);$
- (e) $v_1 = (1, 2, 2), v_2 = (-1, -1, 2), v_3 = (2, 3, 0);$
- (f) $v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (2, 3, -1), v_3 = (-1, 2, -17);$
- (g) $v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (-2, -2, -4);$
- (h) $v_1 = (-1, 2, 1), v_2 = (2, -3, 1), v_3 = (1, 1, 2);$
- (i) $v_1 = (-1, 2, 1), v_2 = (2, -3, 1), v_3 = (1, 1, 2), v_4 = (5, 2, 0).$