

Mátrixműveletek és lineáris egyenletrendszerek Gyakorló feladatok

1. feladat Legyenek adottak az A , B , C és D mátrixok a következőképpen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 10 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Végezzük el az alábbi műveleteket, amennyiben lehetséges!

$$3A - 2B, \quad AD, \quad CB, \quad CD, \quad AC + BC, \quad (A + B)C$$

2. feladat Számoljuk ki a determinánsok értékét!

$$\begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -12 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 8 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

3. feladat Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 - 5x_2 &= -7 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 8x_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} 2x_1 + 9x_2 - x_3 &= -3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ -2x_1 - 10x_2 + 16x_3 &= 8 \end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 2 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 &= -14 \end{aligned}$$

$$(5) \quad \begin{aligned} 3x + 2y - 12z &= 1 \\ -x + 2z &= 1 \\ 2x + 2y - 10z &= 2 \end{aligned}$$

$$(6) \quad \begin{aligned} -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 4x_1 - 6x_2 - x_3 &= 17 \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 &= -14 \end{aligned}$$

$$(7) \quad \begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 13 \\ x + 2y + 4z &= 10 \\ 2x + y + 3z &= 11 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + z &= 5 \end{aligned}$$

$$(8) \quad \begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= -1 \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 + 4x_4 &= 7 \\ -3x_1 + 5x_2 - 8x_3 - 2x_4 &= -11 \end{aligned}$$

4. feladat Invertáljuk az alábbi mátrixokat!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -12 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Végeredmények:

1. Mátrixműveletek:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 12 & -9 & 4 \\ 1 & 13 & -17 \end{pmatrix} \quad AD = \begin{pmatrix} 6 \\ -30 \end{pmatrix} \quad CB : \text{nem lehet összeszorozni}$$

$$CD = \begin{pmatrix} 11 \\ 63 \\ 32 \end{pmatrix} \quad AC + BC = (A + B)C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 16 \\ 2 & 16 & 66 \end{pmatrix}$$

2. Determinánsok értékei: $-2, 11, 0, 38, -12, 0, -13, 78$

3. Lineáris egyenletrendszerek:

$$(1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2) \text{ellentmondásos} \quad (3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(8) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{17}{2} \\ -\frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -17 \\ -7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Mátrixinvertálás:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 8 & -7 & -5 \\ -1 & 5 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} : \text{nem létezik},$$

$$E^{-1} = E, \quad F^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -4 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad H^{-1} : \text{nem létezik}$$