

Determinánsok, mátrixinvertálás, lineáris egyenletrendszerek

I. Determináns kiszámítása

1. Sarrus-szabály: 2×2 -es és 3×3 -as mátrixok determinánsának kiszámítására.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Módszer a harmadrendű esetben:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Mintafeladat:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot (-2) = 4 - (-6) = 10$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 \cdot 6 + 1 \cdot 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 4 - (-2) \cdot 2 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 0 - 6 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

2. Gauss-féle eliminációs módszer: A determinánst felső háromszög alakúra hozzuk (főátló alatti összes elem 0), ennek a determinánsnak az értéke pedig a főátlóbeli elemek szorzata:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}$$

Az átalakításnál használható lépések:

- (i) Egy $\lambda \neq 0$ skalár kiemelése tetszőleges sorból.
- (ii) Egy sor λ -szorosának hozzáadása egy másik sorhoz.
- (iii) Két sor cseréje, ekkor a determináns értéke előjelet vált.

3. Kifejtési tétel alkalmazása: Kiválasztjuk a determináns egy tetszőleges sorát, vagy oszlopát, ennek minden elemét megszorozzuk az elemhez tartozó algebrai aldeterminánssal, majd a szorzatokat összeadjuk.

Például ha az i . sor szerint fejtjük ki a determinánst, továbbá A_{ij} jelöli az a_{ij} elemhez tartozó algebrai aldeterminánst, akkor a fentiek szerint

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

A_{ij} -t, a mátrix a_{ij} eleméhez tartozó algebrai aldeterminánst úgy kapjuk meg, hogy a mátrixból kihúzzuk az i -edik sort és a j -edik oszlopot, kiszámoljuk az így adódó $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrix determinánsát, és ezt megszorozzuk a $(-1)^{i+j}$ számmal.

II. Mátrixinvertálás

1. Gauss-féle eliminációs módszer: Ha az $n \times n$ -es A mátrixot szeretnénk invertálni, akkor az $(A|E)$ $n \times 2n$ -es mátrixot (ahol E az $n \times n$ -es egységmátrix) az alábbi átalakításokkal megpróbáljuk $(E|B)$ alakúra hozni. Ha ez lehetséges, akkor a B mátrix éppen A inverze. Amennyiben az eljárás nem hajtható végre, úgy A szinguláris.

Az átalakításnál használható lépések:

- (i) Tetszőleges sor szorzása $\lambda \neq 0$ skalárral.
- (ii) Egy sor λ -szorosának hozzáadása egy másik sorhoz.
- (iii) Sorok cseréje.

Mintafeladat: Invertáljuk az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixot!

$$\begin{aligned} (A|E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array} \right) = (E|B) \end{aligned}$$

Ezért A inverze

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Ellenőrizzük, hogy $AB = BA = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Adjungált módszer: Az A négyzetes mátrix inverze megkapható az alábbi képlettel is:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A_{ij})^T,$$

tehát képezzük azt a mátrixot, amelynek (i, j) indexű eleme az A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó algebrai aldetermináns (ld. előző oldal alja), ezt a mátrixot transzponáljuk, és megszorozzuk az $\frac{1}{\det(A)}$ skalárral. Például a fenti A mátrix inverze ezek szerint:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{-2 + 6 - 3 - 2} \begin{pmatrix} +(-1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) & -(1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)) & +(1 \cdot 2 - (-1 \cdot (-1))) \\ -(2 \cdot 1 - 2 \cdot 3) & +(2 \cdot 1 - (-1) \cdot 3) & -(2 \cdot 2 - (-1) \cdot 2) \\ +(2 \cdot 0 - (-1) \cdot 3) & -(2 \cdot 0 - 1 \cdot 3) & +(2 \cdot (-1) - 1 \cdot 2) \end{pmatrix}^T = \\ &= \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}^T = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

III. Lineáris egyenletrendszerek

1. Gauss-féle eliminációs módszer: Az alábbi ekvivalens átalakítások nem változtatják meg az egyenletrendszer megoldáshalmazát. A megoldás módszere az, hogy ezen átalakítások segítségével az egyenletrendszer kibővített mátrixát trapéz alakúra hozzuk (főátló alatt csupa 0), ahonnan a legalsó egyenlettől kezdve felfelé haladva visszahelyettesítéssel adódnak a megoldások.

Ekvivalens átalakítások: egyenletek $\rightsquigarrow$ kibővített mátrix sorai

- (i) Egyenlet szorzása $\lambda \neq 0$ -val.
- (ii) Egy egyenlethez hozzáadni egy másik egyenlet λ -szorosát.
- (iii) Egyenletek sorrendjének megváltoztatása.
- (iv) Elhagyni olyan egyenletet, amely egy másik egyenlet λ -szorosa.
- (v) Ismeretlenek felcserélése együtthatóikkal együtt, minden egyenletben. ($\rightsquigarrow$ oszlopcsere)

2. Cramer-szabály: Négyzetes alaplátrix ($m = n$) esetén, ha az alaplátrix reguláris ($\det(A) \neq 0$), akkor a lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, mégpedig

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

ahol az A_i mátrix úgy adódik A -ból, hogy az i -edik oszlopot kicseréljük a szabad tagok oszlopvektorára, azaz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

↑
 j -edik oszlop

Mintafeladat: Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert a Cramer-szabály alkalmazásával:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Először ellenőriznünk kell, hogy $\det(A) \neq 0$. Ebben az esetben az alaplátrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

ennek determinánsa $\det(A) = -7 \neq 0$, ezért alkalmazható a Cramer-szabály. Továbbá

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -7, & \det(A_2) &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \\ \det(A_3) &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -14, \end{aligned}$$

ezért a megoldás

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-7}{-7} = 1, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{0}{-7} = 0, \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-14}{-7} = 2, \quad \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$